Přírodovědecká fakulta

NÁHODNÉ PROCESY

Ivan Křivý

UNIVERSITAS
OSTRAVIENSIS

OSTRAVSKÁ UNIVERZITA 2014

ANOTACE

Předkládaná distanční opora představuje základy teorie náhodných procesů. Je určena posluchačům prezenčního a kombinovaného studia studijních programů A*plikovaná matematika*, *Aplikované informatika* a *Informatika*. Zahrnuje následující témata:

- Náhodné procesy, jejich rozdělení a klasifikace
- Matematický aparát pro studium náhodných procesů
- Větvící se procesy
- Markovovy řetězce s diskrétním časem
- Markovovy řetězce s oceněním přechodů
- Konečné Markovovy řetězce se spojitým časem
- Spočetné Markovovy řetězce se spojitým časem
- Teorie hromadné obsluhy

ÚVOD

Předkládaná distanční opora (modul), která se Vám dostává do ruky, byla vytvořena inovací původní opory [15]. V souvislosti s touto inovací byly provedeny následující změny:

- upravena struktura celé distanční opory,
- stávající kapitoly (lekce) doplněny o kontrolní otázky, kontrolní úkoly a nové korespondenční úkoly a poznatky.
- nově zařazena kapitola věnovaná Markovovým řetězcům s oceněním přechodů.

Distanční opora je určena pro jednosemestrální studium náhodných procesů, speciálně Markovových řetězců s diskrétním i spojitým časem. Poskytuje teoretický základ pro studium předmětu Analýza časových řad zařazeného do studijních plánů oborů *Aplikovaná matematika*, *Aplikace matematiky v ekonomii* a *Informatika* na Přírodovědecké fakultě Ostravské univerzity v Ostravě.

Cíle modulu:

Po prostudování tohoto modulu

- pochopíte základní pojmy teorie náhodných procesů (náhodný proces a jeho rozdělení, Markovův proces, pravděpodobnosti přechodů, stacionární rozdělení apod.),
- naučíte se klasifikovat stavy daného náhodného procesu.
- naučíte se počítat pravděpodobnosti přechodu mezi stavy daného náhodného procesu,
- dokážete určit, zda pro daný náhodný proces existuje stacionární (resp. limitní) rozdělení pravděpodobnosti, a také jej spočítat, pokud existuje,
- pochopíte význam náhodných procesů pro řešení konkrétních úloh v praxi,
- naučíte se aplikovat Markovovy řetězce na řešení úloh z teorie hromadné obsluhy,
- seznámíte se se základy teorie obnovy.

Celý modul je rozčleněn do následujících lekcí: Obsah modulu

- náhodné procesy, jejich rozdělení a charakteristiky,
- matematický aparát pro studium náhodných procesů,
- větvící se procesy
- Markovovy řetězce s diskrétním časem I
- konečné Markovovy řetězce s diskrétním časem II,
- Markovovy řetězce s oceněním přechodů,
- konečné Markovovy řetězce se spojitým časem,
- spočetné Markovovy řetězce se spojitým časem,

- procesy množení,
- procesy množení a zániku,
- teorie hromadné obsluhy.

Struktura lekce

Jednotlivé lekce zpravidla obsahují:

- formulaci cílů lekce (tedy toho, co by měl student po jejím prostudování umět, znát, pochopit),
- klíčová slova,
- průvodce studiem,
- vlastní výklad učiva,
- řešené příklady,
- kontrolní otázky k procvičení učiva,
- korespondenční úkol,
- pojmy k zapamatování,
- shrnutí.

Všechny tři zařazené korespondenční úkoly mají charakter individuální seminární práce, která je určena k ověření Vašich schopností aplikovat získané znalosti na analýzu konkrétního (Vámi vybraného) náhodného procesu. Součástí Vašich studijních povinností je splnění jednoho, popř. dvou korespondenčních úkolů; jejich hodnocení bude započteno do celkového hodnocení kurzu.

V každé kapitole je uvedeno vše potřebné pro samostatné studium, počínaje definicemi základních pojmů a konče využitím teoretických poznatků v praxi. V zájmu správného pochopení probírané látky jsou jednotlivá témata doplněna řešením typových příkladů. Doporučujeme čtenáři, aby se nad každým příkladem důkladně zamyslel. Pochopení principů řešení je totiž nezbytným předpokladem pro porozumění dalšímu výkladu.

Čas potřebný k prostudování jednotlivých lekcí explicitně neuvádíme, neboť z našich zkušeností vyplývá, že rychlost studia značně záleží na Vašich schopnostech a studijních návycích.

Předpokládáme, že si mnozí z Vás budou chtít doplnit a rozšířit poznatky studiem dalších literárních pramenů (učebnic a skript), jež se zabývají jak teorií, tak i aplikacemi náhodných procesů. Při výkladu jsme vycházeli především z monografie Fellera [7] a skript [5,6,19,20]. Další doporučenou literaturu uvádíme v závěrečné části této distanční opory. Věříme, že Vám předkládaný studijní materiál pomůže pochopit základní principy teorie náhodných procesů, a přejeme Vám hodně úspěchů ve studiu.

Autor

1 NÁHODNÉ PROCESY, JEJICH ROZDĚLENÍ A CHARAKTERISTIKY

Po prostudování této úvodní kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie náhodných (stochastických) procesů (náhodný proces a jeho rozdělení) a jejich návaznost na základní pojmy klasické teorie pravděpodobnosti (náhodná veličina a její rozdělení),
- poznáte nejvýznamnější charakteristiky náhodných procesů, zejména střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci,
- seznámíte se s klasifikací náhodných procesů,
- poznáte některé významné typy náhodných procesů.

Klíčová slova: náhodný proces, trajektorie, distribuční funkce, střední hodnota, rozptyl, kovarianční funkce, stacionarita, spojitost, procesy s diskrétním časem, procesy se spojitým časem, bílý šum, náhodné procházka po přímce, Brownův pohyb.

Úvodní kapitola je věnována základům obecné teorie náhodných procesů. Nejprve zavádíme pojem náhodného procesu, jeho rozdělení a základních charakteristik. Následuje klasifikace náhodných procesů, zejména podle struktury množiny jeho stavů a časové množiny. Na závěr pak uvádíme příklady některých významných typů náhodných procesů.

1.1 Definice náhodného procesu

Náhodný (stochastický) proces je abstraktní pojem pro matematický popis náhodných jevů, které jsou navíc funkcí času. Náhodné procesy tak vyjadřují dynamiku náhodných jevů, proto se často mluví o tzv. statistické dynamice.

Příklady náhodných procesů nacházíme ve všech oblastech vědy a techniky: kolísání signálu v přijímacím zařízení, Brownův pohyb hmotných částic, změny v počtu zákazníků čekajících na obsluhu, změny v počtu kosmických částic dopadajících na povrch Země, kolísání sluneční aktivity apod.

Teorie náhodných procesů je, např. ve srovnání s matematickou analýzou nebo teorií pravděpodobnosti, poměrně mladá matematická disciplína. Její základy byly položeny v první polovině minulého století především zásluhou prací Markova, Sluckého, Kolmogorova, Chinčina, Craméra a Loèveho. Za zakladatele moderní teorie náhodných procesů jsou považováni Ito a Karhunen. K dalšímu rozvoji teorie pak významně přispěli zejména Frechét, Lévy, Feller a Wiener. Více podrobností nalezne čtenář ve skriptech [10].

Náhodný proces

Definice 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a T neprázdná podmnožina $\mathbb{R}$. Pak soustava reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá reálný **náhodný proces**.

Poznámka 1. Náhodný proces můžeme také definovat jako zobrazení $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t \in T$ je $X_t(\omega)$ náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Poznámka 2. V aplikacích vystačíme s reálnými náhodnými veličinami, v teorii je však někdy výhodné analogicky definovat analogicky komplexní náhodný proces.

Náhodný proces můžeme považovat za funkci dvou proměnných: elementárního jevu ω a časové proměnné *t*. Pro pevně zvolené $t \in T$ je $X_t = X_t(.)$ náhodná veličina definovaná na Ω. Pro pevně zvolené $\omega \in \Omega$ je $X_{(.)}(\omega)$ reálná funkce času *t*; tato funkce se nazývá **trajektorie** (**realizace**) náhodného procesu.

Trajektorie náhodného procesu

V aplikacích se pomocí náhodného procesu popisuje chování nějakého systému v čase, přičemž přechody z jednoho stavu systému do druhého mají náhodný charakter. V takovém případě se stav systému ztotožňuje s hodnotou náhodného procesu.

1.2 Rozdělení náhodného procesu

V tomto odstavci zavedeme pojem distribuční funkce náhodného procesu.

Definice 1.2. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je daný náhodný proces. Dále nechť $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$. Pak distribuční funkce náhodného vektoru $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)$ definovaná předpisem

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \ldots, X_{t_n} < x_n\right)$$

se nazývá ***n*-rozměrná distribuční funkce náhodného procesu** $\{X_t, t \in T\}$, jestliže jsou splněny tzv. Kolmogorovovy podmínky konzistence:

Distribuční funkce náhodného procesu

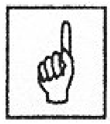
a) Pro libovolnou permutaci $\boldsymbol{\pi}$ množiny $\{1, 2, \ ..., \ n\}$ platí

$$F_{t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, ..., t_{\pi(n)}}\left(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ ..., \ x_{\pi(n)}\right) = F_{t_1, t_2, ..., t_n}\left(x_1, \ ..., \ x_n\right).$$

b) n-rozměrná distribuční funkce náhodného procesu je marginální distribuční funkcí $(n+1)$-rozměrné distribuční funkce náhodného procesu, tj.

$$\lim_{x_{n+1} \to \infty} F_{t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}}\left(x_1, x_2, \ ..., \ x_n, x_{n+1}\right) = F_{t_1, t_2, ..., t_n}\left(x_1, \ ..., \ x_n\right).$$

K pravděpodobnostnímu popisu náhodného procesu je nutno znát jeho distribuční funkce pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí.



Věta 1.1. (Kolmogorovova věta). Nechť $\left\{F_{t_1, t_2, ..., t_n}\left(x_1, x_2, \ ..., \ x_n\right)\right\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Pak existuje náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1, t_2, \ ..., t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1, x_2, \ ..., \ x_n$ platí

$$P\left(X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \ ..., \ X_{t_n} < x_n\right) = F_{t_1, t_2, ..., t_n}\left(x_1, x_2, \ ..., \ x_n\right).$$

Důkaz je uveden např. v učebnici Štěpána [22. □

1.3 Základní charakteristiky náhodného procesu

Nejprve definujeme tři základní charakteristiky náhodného procesu, a to střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci.

Definice 1.2. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathbf{E}X_t$. Pak funkce $\mu_t = \mathbf{E}X_t$ definovaná na množině T se nazývá **střední hodnota náhodného procesu** $\{X_t, t \in T\}$.

Střední hodnota náhodného procesu

Definice 1.3. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro všechna $t \in T$ platí $\mathbf{E}\left|X_t\right|^2 < +\infty$. Pak funkce dvou proměnných $R(s,t)$ definovaná na množině $T \times T$ předpisem

$$R(s,t) = \mathbf{E}\left[\left(X_s - \mu_s\right)\left(X_t - \mu_t\right)\right]$$

Autokovarianční funkce

se nazývá **autokovarianční funkce náhodného procesu** $\{X_t, t \in T\}$. Speciálně, hodnota $R(t,t)$ této funkce se nazývá **rozptyl náhodného procesu** v čase *t*.

Rozptyl náhodného procesu

V této části ještě zavedeme pojmy stacionarita a spojitost náhodného procesu.

Striktní stacionarita

Definice 1.4. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **striktně stacionární**, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a pro libovolná $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a h taková, že $t_k \in T,\ t_k + h \in T,\ 1 \le k \le n$ platí

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1+h,t_2+h,\ldots,t_n+h}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Z uvedené definice vyplývá, že všechny náhodné veličiny X_t mají identické rozdělení a jejich základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl a autokovarianční funkce) jsou invariantní vůči posunutí v čase. Procesy, které nejsou striktně stacionární, se nazývají evoluční.

Kromě striktní stacionarity se pro procesy s konečnými momenty druhého řádu zavádí i slabší pojem tzv. slabé stacionarity. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **slabě stacionární**, jestliže jeho střední hodnota a rozptyl jsou konstantní v čase a jeho autokovarianční funkce je invariantní vůči posunutí v čase.

Slabá stacionarita

Definice 1.5. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **stochasticky spojitý** (spojitý podle pravděpodobnosti) **v bodě** $t_0 \in T$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P\left(\left|X_t - X_{t_0}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Spojitost procesu

Náhodný proces je **stochasticky spojitý**, je-li spojitý v každém bodě množiny *T*.

Proces, který je spojitý podle předcházející definice, nemusí mít spojité trajektorie.

1.4 Klasifikace náhodných procesů

Náhodné procesy můžeme klasifikovat z různých hledisek.

Podle struktury časové množiny *T* rozlišujeme:

Proces s diskrétním časem

- **proces s diskrétním časem** (časová řada), když $T = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ nebo $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$;

Proces se spojitým časem

- **proces se spojitým časem**, když prvky množiny T nabývají hodnot z nějakého nedegenerovaného intervalu, tj. $T = [a, b],\ -\infty \le a < b \le \infty$.

Podle struktury množiny stavů (stavového prostoru) rozeznáváme:

Proces s diskrétními stavy

- **proces s diskrétními stavy**, když náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot,

Proces se spojitými stavy

- **proces se spojitými stavy**, když náhodné veličiny X_t nabývají hodnot z nějakého nedegenerovaného intervalu.

Podle typu závislosti náhodných veličin X_t pro různé hodnoty t lze např. rozlišit (podrobněji viz [10]):

- **proces s nezávislými hodnotami**, právě když pro všechna $s, t \in T,\ s \neq t,$ jsou náhodné veličiny $X_s,\ X_t$ nezávislé;
- **proces s nekorelovanými hodnotami,** právě když pro všechna $s, t \in T,\ s \neq t,$ platí $\mathbf{E}\left(X_s X_t\right) = \mathbf{E}X_s \mathbf{E}X_t$ (předpoklad $\mathbf{E}\left|X_t\right|^2 < +\infty$);
- **proces s nezávislými přírůstky,** právě když pro všechna $t_1, t_2,\ \ldots, t_n,\ n \geq 3,\quad t_1 < t_2 <\ \ldots\ < t_n,$ platí, že rozdíly $X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots,$ $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ jsou nezávislé veličiny.

1.5 Příklady náhodných procesů

Bílý šum

Bílý šum je náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tvořený nezávislými náhodnými veličinami s nulovou střední hodnotou a stejným konečným rozptylem.

Nechť $Y_1, Y_2,\ \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny nabývající hodnot ± 1 s pravděpodobnostmi $1/2$. Nechť $X_0 = 0$ a $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$..Náhodná veličina X_n pak udává polohu, kterou má částice pohybující se náhodně po celočíselných krocích na přímce, a to ve všech krocích se stejnou pravděpodobností v obou směrech. Takový proces $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ se **nazývá náhodná procházka po přímce**.

Náhodná procházka po přímce

Wienerův proces (**Brownův pohyb**) je náhodný proces $\{W_t,\ t \geq 0\}$ se spojitými trajektoriemi, který má následující tři vlastnosti:

Brownův pohyb

1. $W_0 = 0$,
2. přírůstky $W_t - W_s,\ 0 \leq s < t,$ mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2 \left(t - s\right)$, kde σ^2 je kladná konstanta,
3. pro libovolné disjunktní intervaly $\left(s_k, t_k\right),\ 0 \leq s_k < t_k,\ k = 1, 2,\ \ldots, n,$ jsou přírůstky $X_{t_k} - X_{s_k}$ nezávislé náhodné veličiny.

Uvedené příklady procesů patří do rozsáhlé třídy náhodných procesů, kterým se říká **Markovovy procesy**. Problematice Markovových procesů budou v tomto studijním textu věnovány kapitoly 4 – 7.

Kontrolní otázky

1. Jak souvisí definice náhodného procesu s definicí náhodné veličimy?
2. Co je to trajektorie náhodného procesu?
3. Jak souvisí n-rozměrná distribuční funkce náhodného procesu s distribuční funkcí n-rozměrného náhodného vektoru?
4. Jak souvisejí definice základních charakteristik náhodného procesu s charekteristikami náhodné veličiny.
5. Jaký je rozdíl mezi striktní a slabou stacionariotu náhodného procesu?

6. Uveďte nějaké příklady náhodných procesů s diskrétním časem a se spojitým časem.

Korespondenční úkol č. 1. Pokuste se odvodit tři základní vlastnosti jednorozměrného Brownova pohybu. Vycházejte přitom z definice náhodné procházky po přímce a základních znalostí teorie pravděpodobnosti včetně centrální limitní věty.

Pojmy k zapamatování:

- náhodný proces,
- trajektorie (realizace) náhodného procesu,
- distribuční funkce náhodného procesu,
- střední hodnota náhodného procesu,
- rozptyl náhodného procesu,
- autokovarianční funkce náhodného procesu,
- stacionarita náhodného procesu,
- spojitost náhodného procesu,
- náhodný proces s diskrétním časem,
- náhodný proces se spojitým časem,
- náhodný proces s diskrétními stavy,
- náhodný proces se spojitými stavy,
- bílý šum,
- náhodná procházka po přímce,
- Brownův pohyb (Wienerův proces).

Shrnutí

Tato kapitola obsahuje základy obecné teorie náhodných procesů. Jsou v ní především definovány pojmy náhodný proces, jeho trajektorie (realizace), rozdělení (systém distribučních funkcí splňujících Kolmogorovovy podmínky konzistence) a základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl, autokovarianční funkce). Kapitola je také doplněna o klasifikaci náhodných procesů (zejména podle struktury časové množiny a struktury množiny stavů procesu) a příklady některých významnějších náhodných procesů (bílý šum, větvící se proces a Brownův pohyb).

2 MATEMATICKÝ APARÁT PRO STUDIUM NÁHODNÝCH PROCESŮ

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte význam vytvořující funkce pro studium celočíselných náhodných veličin,
- naučíte se pomocí vytvořující funkce počítat základní teoretické charakteristiky celočíselných náhodných veličin (střední hodnotu a rozptyl),
- naučíte se také konstruovat vytvořující funkce pro konvoluci celočíselných náhodných veličin a pro tzv. složená rozdělení.

Klíčová slova: celočíselná náhodná veličina, její vytvořující funkce, konvoluce rozdělení součtu nezávislých celočíselných náhodných veličin, složené rozdělení.

V úvodní části této kapitoly jsou uvedeny definice dvou základních pojmů (celočíselná náhodná veličina a její vytvořující funkce). Zvláštní pozornost je přitom věnována využití vytvořující funkce pro výpočet střední hodnoty a rozptylu celočíselné náhodné veličiny. Sami se můžete přesvědčit o tom, že pomocí vytvořující funkce lze hodnoty zmíněných charakteristik počítat mnohem snadněji než s využitím příslušných definičních vztahů. V dalších odstavcích se pak seznámíte s konvolucí celočíselných náhodných veličin a složeným rozdělením, jakož i s příslušnými vytvořujícími funkcemi.

2.1 Vytvořující funkce

Nejprve zavedeme pojem celočíselná náhodná veličina, přesněji celočíselná nezáporná náhodná veličina.

Celočíselná náh. veličina

Definice 2.1. **Celočíselná náhodná veličina** je diskrétní náhodná veličina, která může nabývat pouze hodnot z množiny celých nezáporných čísel, tj. hodnot 0, 1, … .

Vhodným matematickým aparátem ke studiu takových veličin je jejich vytvořující funkce.

Vytvořující funkce

Definice 2.2. Nechť X je celočíselná náhodná veličina s rozdělením daným posloupností $\{p_j\}$, kde $p_j = P(X = j)$ pro $j = 0,1,\ldots$. Její **vytvořující funkce** $P(s)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{p_j\}$, tj. řada

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j,$$

kde s je pomocná reálná proměnná. Posloupnost $\{p_j\}$ je zřejmě omezená, proto $P(s)$ konverguje alespoň v intervalu $(-1,1)$. Navíc $P(s)$ musí konvergovat také pro $s = 1$, protože platí

$$P(1) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1.$$

Označme $q_k = P(X > k) = \sum_{j>k} p_j$ pro $k = 0,1, \dots$. Vytvořující funkce $Q(s)$ posloupnosti $\{q_j\}$ má tvar

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j.$$

Také tato vytvořující funkce (nekonečná řada) konverguje alespoň v intervalu $(-1,1)$, neboť posloupnost $\{q_j\}$ je omezená. Nemusí však konvergovat v bodě $s = 1$. Souvislost mezi oběma vytvořujícími funkcemi je dána následující větou.

Věta 2.1. Pro každé $s \in (-1,1)$ platí

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}.$$

Důkaz. Uvedený vztah se převede na tvar $(1-s)Q(s) = 1 - P(s)$ a porovnají se koeficienty u jednotlivých mocnin s na obou stranách této rovnosti. □

Pomocí vytvořující funkce celočíselné náhodné veličiny lze velmi snadno spočítat hodnoty jejich teoretických charakteristik (střední hodnota, rozptyl, jiné momentové charakteristiky). V této části se omezíme pouze na výpočet střední hodnoty a rozptylu (variance).

Věta 2.2. Pro střední hodnotu celočíselné náhodné veličiny X platí

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} q_j = P'_-(1) = Q(1),$$

kde $P'_-(1)$ značí derivaci $P(s)$ zleva v bodě $s = 1$.

Důkaz. Z věty 2.1 a věty o přírůstku funkce dostaneme, že pro nějaké $\sigma \in (s,1)$ platí

$$Q(s) = \frac{P(1) - P(s)}{1-s} = P'(\sigma).$$

Nechť $s \to 1-$ (konvergence zleva), pak také $\sigma \to 1-$. Řady $P'(s)$ a $Q(s)$ jsou řady s nezápornými koeficienty, a proto musí platit

$$Q(1) = \lim_{\sigma \to 1-} P'(\sigma) = P_-'(1) \ \text{ neboli } \ \sum_{j=0}^{\infty} q_j = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j ,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Věta 2.3. Nechť poloměr konvergence řady $P(s)$ je větší než 1. Pak platí

$$\operatorname{var} X = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = 2Q'(1) + Q(1) - Q^2(1).$$

Důkaz. Vyjdeme ze vztahu $P(s) = 1 - (1-s)Q(s)$. Postupným derivováním tohoto vztahu dostaneme

$$P'(s) = Q(s) - (1-s)Q'(s), \quad \text{a tedy } P'(1) = Q(1),$$
$$P''(s) = 2Q'(s) - (1-s)Q''(s), \ \text{a tedy } P''(1) = 2Q'(1).$$

Dále platí $P'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \mathbf{E}X$, $P''(1) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j = \mathbf{E}\big(X(X-1)\big)$. Odtud plyne

$$\operatorname{var} X = \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbf{E}X - (\mathbf{E}X)^2 =$$
$$= P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2 = 2Q'(1) + Q(1) - Q^2(1),$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Příklady

Příklad 2.1. Určíme vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl alternativního rozdělení, pro nějž platí

$$\mathrm{P}(X = j) = \begin{cases} q \text{ pro } j = 0, \\ p \text{ pro } j = 1, \end{cases}$$

přičemž $p + q = 1$.

Řešení. Pro vytvořující funkci alternativního rozdělení zřejmě platí $P(s) = q + ps$. Odtud derivováním dostaneme

$$\mathbf{E}X = P'(1) = (q+ps)'_{s=1} = p;\ P''(1) = (q+ps)''_{s=1} = 0,$$

takže

$$\operatorname{var}X = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Příklad 2.2. Určíme vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení, pro nějž platí

$$\mathrm{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad \text{pro } j = 0,1,\ \ldots,\ n.$$

Řešení. Vytvořující funkci binomického rozdělení lze (s využitím binomické věty) zapsat ve tvaru

$$P(s) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (ps)^j q^{n-j} = (q+ps)^n .$$

Odtud postupně dostaneme

$$\mathbf{E}X = P'(1) = np(q+ps)^{n-1}\Big|_{s=1} = np,$$
$$P''(1) = n(n-1)\,p^2 (q+ps)^{n-2}\Big|_{s=1} = n(n-1)\,p^2,$$
$$\operatorname{var} X = npq.$$

Vytvořující funkce pro vybraná rozdělení diskrétního typu jsou uvedeny v tab. 2.1.

Tab. 2.1: Vytvořující funkce vybraných rozdělení diskrétního typu

Rozdělení (parametry)	Vytvořující funkce
Alternativní ($p \in (0,1)$)	$q + ps$
Binomické ($n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$	$(q+ps)^n$
Poissonovo (λ >0]	$e^{-\lambda+\lambda s}$
Geometrické ($p \in (0,1)$)	$\dfrac{p}{1-qs}$
Negativně binomické ($n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$)	$\left(\dfrac{p}{1-qs}\right)^n$

2.2 Konvoluce

Vyjdeme z definice konvoluce dvou číselných posloupností.

Definice 2.3. Nechť $\{p_j\}$ a $\{r_j\}$, $j \geq 0$, jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Pak posloupnost $\{h_j\}$ definovaná vztahem

Konvoluce posloupností

$$h_j = p_0 r_j + p_1 r_{j-1} + \ ... + \mathrm{p}_j r_0, \ \ j \geq 0, \tag{2.1}$$

se nazývá **konvolucí posloupností** $\{p_j\}$ a $\{r_j\}$ a značí se $\{h_j\} = \{p_j\} * \{r_j\}$.

Z uvedené definice vyplývá bezprostředně následující tvrzení. Nechť X a Y jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_j\}$, resp. $\{r_j\}$. Pak součet $S = X + Y$ má rozdělení $\{h_j\}$ dané vztahem (2.1), a tedy **rozdělení součtu dvou nezávislých celočíselných náhodných veličin je konvolucí jejich rozdělení**.

Konvoluce rozdělení

Věta 2.4. Vytvořující funkce $H(s)$ součtu dvou nezávislých náhodných veličin X a Y s vytvořujícími funkcemi $P(s)$, resp. $R(s)$, je rovna součinu vytvořujících funkcí obou těchto veličin, tj. $H(s) = P(s)R(s)$.

Důkaz je triviální. Vytvořme součin $P(s)R(s)$. Koeficient při mocnině s^j je zřejmě dán vztahem (2.1). □

Konvoluce $\{p_j\} * \{p_j\}$ se nazývá druhou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_j\}$ a značí se $\{p_j\}^{2*}$ a podobně lze zavést i vyšší konvoluční mocniny. Dříve uvedená tvrzení je možno zobecnit na součet libovolného počtu nezávislých celočíselných náhodných veličin. Speciálně platí:

Nechť $X_1, X_2, \ ..., X_n$ jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny se stejným rozdělením $\{p_j\}$, pak rozdělení jejich součtu $S = X_1 + X_2 + \ ... \ + X_n$ je n-tou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_j\}$ a vytvořující funkce $H(s)$ jejich součtu je rovna $P^n(s)$.

Příklad 2.3. Dokážeme, že binomické rozdělení Bi(n,p) je n-tou konvoluční mocninou rozdělení alternativního.

Řešení. Náhodná veličina X s binomickým rozdělením Bi(n,p) udává počet úspěchů v sérii n nezávislých Bernoulliových pokusů s konstantní pravděpodobností úspěchu p v každém jednotlivém pokusu. Tuto veličinu lze vyjádřit jako součet $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sdruženě nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením (0 = neúspěch s pravděpodobností q, 1 = úspěch s pravděpodobností p). Proto pro vytvořující funkci binomického rozdělení Bi(n,p) platí

$$P(s) = P_{\text{alt}}^{n}(s) = (q + ps)^{n},$$

což je v souladu s výsledkem příkladu 2.2.

2.3 Složené rozdělení

Definice 2.4. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny. Nechť všechna X_j mají identické rozdělení $\{f_j\}$. Nechť celočíselná náhodná veličina N má rozdělení $\{g_n\}$. Pak rozdělení $\{h_j\}$ náhodné veličiny $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, tedy rozdělení součtu náhodného počtu celočíselných náhodných veličin, se nazývá **složené rozdělení**.

Složené rozdělení

Věta 2.5. Pro složené rozdělení $\{h_j\}$ platí

$$h_j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_j^{n*}$$

Důkaz. Podle věty o úplné pravděpodobnosti dostaneme

$$h_j = \mathrm{P}(S = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N = n)\mathrm{P}(S = j \mid N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N = n)\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_j^{n*},$$

neboť rozdělení součtu $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ je n-tou konvoluční mocninou rozdělení $\{f_j\}$. □

Příklad 2.4. Nechť g_n je pravděpodobnost, že samička určitého druhu hmyzu naklade právě n vajíček. Dále nechť p je pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živý jedinec. Určíme pravděpodobnost toho, že samička „dá život“ právě j jedincům.

Řešení. Rozdělení $\{g_n\}$ počtu nakladených vajíček N není v zadání úlohy blíže specifikováno. Pro počet S vylíhnutých jedinců zřejmě platí

$S = X_1 + X_2 + \ ... \ + X_N$, kde každá z veličin X_i má alternativní rozdělení. Proto můžeme psát

$$\mathrm{P}\left(X_1 + X_2 + \ ... \ X_N = j\right) = \sum_{n=o}^{\infty} g_n \binom{n}{j} p^j \left(1-p\right)^{n-j}.$$

Přitom jsme využili toho, že n-tou konvoluční mocninou alternativního rozdělení je rozdělení binomické.

V dalším výkladu odvodíme vztahy pro vytvořující funkci a základní charakteristiky složeného rozdělení.

Věta 2.6. Vytvořující funkce veličiny S, tj. součtu náhodného počtu N stejně rozdělených celočíselných náhodných veličin X_j má tvar

$$H\left(s\right) = G\left(F\left(s\right)\right),$$

kde $G\left(s\right)$ značí vytvořující funkci veličiny N a $F\left(s\right)$ vytvořující funkci každé z veličin X_j.

Důkaz. Pro hledanou vytvořující funkci zřejmě platí

$$H\left(s\right) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} g_n f_j^{n*} s^j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{n*} s^j,$$

kde f_j^{n*} reprezentuje j-tý člen posloupnosti $\left\{f_j\right\}^{n*}$. Vnitřní součet představuje vytvořující funkci posloupnosti $\left\{f_j\right\}^{n*}$ a ta má podle zobecněné věty 2.4 tvar $F^n\left(s\right)$. Odtud dostaneme

$$H\left(s\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n F^n\left(s\right) = G\left(F\left(s\right)\right). \qquad \square$$

Příklad 2.5. Nechť veličina N má Poissonovo rozdělení, tj. platí $g_n = \dfrac{\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}$ pro $n = 0, 1, \ ...$ a každá z veličin X_j rozdělení alternativní. Určíme vytvořující funkci veličiny $S = X_1 + X_2 + \ ... \ + X_N$.

Řešení. Pro vytvořující funkci veličiny N dostaneme

$$G\left(s\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\left(\lambda s\right)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda s\right)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda s} = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda s}.$$

Vytvořující funkce veličin X_j má (viz příklad 2.1) tvar $F\left(s\right) = q + ps$. Proto $H\left(s\right) = G\left(F\left(s\right)\right) = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda\left(q+ps\right)} = \mathrm{e}^{-\lambda p+\lambda ps}$, což je vytvořující funkce Poissonova rozdělení s parametrem λp.

Věta 2.7. Pro střední hodnotu veličiny S platí

$$\mathbf{E}S = \mathbf{E}\left(X_1 + X_2 + \ \dots \ + X_N\right) = \mathbf{E}N \ \mathbf{E}X_1.$$

Důkaz. S využitím vlastností vytvořující funkce dostaneme

$$\mathbf{E}S = \Big[G\big(F(s)\big)\Big]'_{s=1} = G'\big(F(1)\big)F'(1) = G'(1)F'(1) = \mathbf{E}N \ \mathbf{E}X_1. \qquad \square$$

Věta 2.8. Pro rozptyl (varianci) veličiny S platí

$$\operatorname{var} S = \mathbf{E}N \ \operatorname{var} X_1 + \left(\mathbf{E}X_1\right)^2 \operatorname{var} N.$$

Důkaz. Nejprve určíme derivace vytvořující funkce $H(s)$ v bodě $s = 1$. Zřejmě platí $H'(1) = G'(1)F'(1)$; $\quad H''(1) = G''(1)\big[F'(1)\big]^2 + G'(1)F''(1)$.

Dále jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var} S = H''(1) + H'(1) - [H'(1)]^2 = \\
&= G''(1)[F'(1)]^2 + G'(1)F''(1) + G'(1)F'(1) - [G'(1)F'(1)]^2 = \\
&= G'(1)\left(F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2\right) + [F'(1)]^2\left(G''(1) + G'(1) - [G''(1)]^2\right) = \\
&= \mathbf{E}N \ \operatorname{var} X_1 + \left(\mathbf{E}X_1\right)^2 \operatorname{var} N,
\end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen. $\square$

Vlastností složeného rozdělení využijeme v kapitole 3 věnované větvícím se procesům.

Kontrolní otázky

1. Jaký význam má vytvořující funkce celočíselné náhodné veličiny?
2. Proč se v případě konvoluce rozdělení součtu několika celočíselných náhodných veličin předpokládá jejich nezávislost?
3. K čemu se v praxi používá složeného rozdělení

Kontrolní úkoly

1. Určete vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení daného vztahem $\mathrm{P}(X = j) = \dfrac{\lambda^j \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!}$ pro $j = 0, 1, \ \dots$.
2. Určete vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl geometrického rozdělení daného vztahem $\mathrm{P}(X = j) = (1-p)^j \, p = q^j p$ pro $j = 0, 1, \ \dots$.
3. Nechť veličina N má binomické rozdělení (viz příklad 2.2) a veličiny X_j rozdělení alternativní. Určete vytvořující funkci veličiny $S = X_1 + X_2 + \ \dots \ + X_N$.

Korespondenční úkol č. 2. Dokažte, že tzv. negativně binomické rozdělení je n-tou konvoluční mocninou geometrického rozdělení a určete rozdělení pravděpodobnosti pro negativně binomické rozdělení.

Návod. Náhodná veličina s negativně binomickým rozdělením NBi(n,p) udává počet neúspěchů předcházejících n-tému úspěchu v sérii nezávislých Bernoulliových pokusů s konstantní pravděpodobností úspěchu p v každém jednotlivém pokusu. Naproti tomu náhodná veličina s geometrickým rozdělením udává počet neúspěchů předcházejících prvnímu úspěšnému pokusu v uvažované sérii Bernoulliových pokusů.

$$[\,\mathrm{P}(X = j) = \binom{n+j-1}{j} p^n q^j\,]$$

Pojmy k zapamatování:

- celočíselná náhodná veličina,
- vytvořující funkce celočíselné náhodné veličiny,
- konvoluce rozdělení nezávislých celočíselných náhodných veličin,
- složené rozdělení.

Shrnutí

V úvodním odstavci zavádíme dva fundamentální pojmy: celočíselná (nezáporná) náhodná veličina a její vytvořující funkce. Zdůrazňujeme význam vytvořující funkce pro výpočet základních teoretických charakteristik celočíselných náhodných veličin: střední hodnoty a rozptylu (variance). V dalších odstavcích pak vysvětlujeme, jak (s využitím aparátu vytvořujících funkcí) počítat charakteristiky součtu konečného, resp. náhodného počtu celočíselných náhodných veličin.

3 VĚTVÍCÍ SE PROCESY

Obsah této kapitoly je koncipován tak, abyste po jejím prostudování:

- pochopili podstatu větvících se procesů,
- naučili se počítat základní teoretické charakteristiky větvících se procesů, jmenovitě střední hodnotu a rozptyl velikosti populace v jednotlivých generacích větvícího se procesu,
- uměli spočítat pravděpodobnost extinkce (zániku) větvícího se procesu,
- poznali možnosti aplikace teorie větvících se procesů v praxi.

Klíčová slova: větvící se proces, větev procesu, generace procesu, vytvořující funkce procesu, střední hodnota, variance, extinkce, aplikace.

V této kapitole využijete teoretických znalostí, které jste získali studiem kapitoly předcházející. Pochopíte, že teorie větvících se procesů je založena na poznatcích o složeném rozdělení a jeho vlastnostech. V závěrečném odstavci se seznámíte s některými možnostmi aplikací teorie větvících se procesů.

3.1 Podstata větvícího se procesu

Větvící se proces

Definice 3.1. **Větvící se proces** (**Galtonův-Watsonův proces větvení**) je náhodný proces $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ takový, že náhodná veličina X_n udává počet částic v n-té generaci, $n = 0,1, \ldots$. V našich úvahách budou vystupovat částice (např. jedinci nějaké populace), jež mohou generovat částice téhož druhu. Budeme předpokládat, že:

- na počátku existuje k ($k > 0$) částic, které reprezentují tzv. nultou generaci,
- každá částice n-té generace ($n \geq 0$) je schopna s pravděpodobností p_j, $j \geq 0$, vytvořit právě j nových částic (svých bezprostředních potomků), jež jsou součástí bezprostředně následující **generace** s pořadovým číslem $n+1$,
- částice se chovají vzájemně nezávislé.

Generace větvícího se procesu

Větev procesu

Je zřejmé, že každá částice nulté generace iniciuje samostatnou **větev větvícího se procesu**. Tento proces zanikne pouze v tom případě, když každá z jeho větví je ukončena, tj. neobsahuje žádnou částici.

Typickým příkladem větvícího se procesu je štěpení jader izotopu $^{235}_{92}U$ tepelnými neutrony. Pro jednoduchost předpokládejme, že na počátku existuje jediný tepelný neutron. Při jeho „srážce“ s uvažovaným jádrem se uvolňuje energie a vznikají (kromě štěpných produktů – fragmentů jádra) tepelné neutrony první generace, jejichž počet je dán náhodnou veličinou s rozdělením $\{p_j\}$. Každý z těchto tepelných neutronů první generace (nezávisle na ostatních) může generovat tepelné neutrony druhé generace a štěpná reakce (větvící se proces) se tak může dále rozvíjet.

3.2 Vytvořující funkce větvícího se procesu

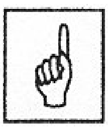
Nechť X_n je celočíselná náhodná veličina, jež označuje počet částic n-té generace a $P_n(s)$ její vytvořující funkce. Předpokládejme pro jednoduchost, že na počátku existuje (s pravděpodobností rovnou 1) jediná částice, tj. $X_0 = 1$. Příslušná vytvořující funkce má tedy tvar $P_0(s) = s$.

Počet částic X_1 první generace má podle předpokladu rozdělení $\{p_j\}$, tj. vytvořující funkci $P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$, takže platí $P_1(s) = P(s)$.

Počet bezprostředních potomků každé z X_1 částic první generace je celočíselná náhodná veličina s rozdělením také $\{p_j\}$. Podle věty 2.6 o složeném rozdělení dostaneme pro vytvořující funkci veličiny X_2 vztah $P_2(s) = P(P(s))$.

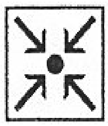
Částice třetí generace jsou „potomky druhého řádu“ částic první generace. Veličina X_3 je tedy součtem X_1 nezávislých náhodných veličin, z nichž každá má stejné rozdělení jako veličina X_2. Z toho plyne pro vytvořující funkci veličiny X_3 vztah $P_3(s) = P(P_2(s))$.
Na druhé straně jsou částice třetí generace bezprostředními potomky X_2 částic druhé generace, takže X_3 je součtem X_2 nezávislých náhodných veličin majících stejné rozdělení jako X_1. Odtud plyne $P_3(s) = P_2(P(s))$.

Na otázku, jak určit vytvořující funkci pro počet částic libovolné generace, odpovídá následující věta.



Věta 3.1. Pro vytvořující funkce $P_n(s)$, $n \geq 1$, platí rekurentní vztah $P_{n+1}(s) = P(P_n(s)) = P_n(P(s))$.

Důkaz. Stačí provést stejnou úvahu jako v předcházející části tohoto odstavce pro $n = 3$. □



Příklad 3.1. Nechť počet bezprostředních potomků jedné částice má Poissonovo rozdělení, jehož vytvořující funkce je spočtena v příkladu 2.5. Určete vytvořující funkce $P_n(s)$ pro $n = 1, 2, 3$.

Řešení. Vytvořující funkce $P_1(s)$ je přímo vytvořující funkcí Poissonova rozdělení, tj. $P_1(s) = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda s}$. Dále dostaneme

$$P_2(s) = P\left(P(s)\right) = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda s}},$$

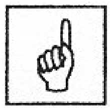
$$P_3(s) = P_2\left(P(s)\right) = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda s}}}.$$

3.3 Charakteristiky větvícího se procesu

Nejprve zavedeme střední hodnotu μ počtu bezprostředních potomků jedné částice vztahem

$$\mu = \mathbf{E}X_1 = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j .$$

Je zřejmé, že tato veličina je současně střední hodnotou počtu částic první generace.



Věta 3.2. Střední hodnota počtu částic *n*-té generace ($n \geq 0$) je dána vztahem

$$\mathbf{E}X_n = \mu^n. \tag{3.1}$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Uvedený vztah zřejmě platí pro $n = 0$. V nulté generaci existuje pouze jediná částice, takže skutečně platí $\mathbf{E}X_0 = \mu^0 = 1$. Předpokládejme, že vztah platí pro nějaké přirozené číslo *n*, a dokážeme jeho platnost pro $n+1$.

Podle věty 2.7 o střední hodnotě složeného rozdělení (konkrétně střední hodnotě součtu X_n náhodných veličin s rozdělením $\{p_j\}$) dostaneme

$$\mathbf{E}X_{n+1} = \mathbf{E}X_n \mathbf{E}X_1 = \mu^n \mu = \mu^{n+1}.$$

Tím je platnost vztahu dokázána pro všechna přirozená *n*. □

V závislosti na hodnotě parametru μ se střední hodnota velikosti populace (počtu částic) s rostoucím *n* nemění (pro $\mu = 1$), exponenciálně vzrůstá (pro $\mu > 1$), nebo exponenciálně klesá (pro $\mu < 1$).

Poznámka. Tvrzení věty 3.2 je možno rozšířit i na případ, kdy nultou generaci tvoří $k > 1$ vzájemně nezávislých částic. Pak zřejmě platí $\mathbf{E}X_n = k\mu^n$.

Dále označme symbolem σ^2 rozptyl (varianci) počtu bezprostředních potomků jedné částice, tj. $\operatorname{var} X_1 = \sigma^2$.

Věta 3.3. Rozptyl počtu částic *n*-té generace ($n \geq 0$) je dán vztahem

$$\operatorname{var} X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{1-\mu^n}{1-\mu}. \tag{3.2}$$

Důkaz provedeme také matematickou indukcí. Pro $n = 0$ vztah zřejmě platí, tedy $\operatorname{var} X_0 = 0$. Vyjdeme z předpokladu, že vztah platí pro nějaké přirozené *n* a dokážeme jeho platnost pro $n+1$.

K tomuto důkazu použijeme větu 2.8 o rozptylu složeného rozdělení (konkrétně rozptylu součtu X_n náhodných veličin s rozdělením $\{p_j\}$). Podle této věty dostaneme

$$\operatorname{var} X_{n+1} = \mathbf{E}X_n \operatorname{var} X_1 + \left(\mathbf{E}X_1\right)^2 \operatorname{var} X_n = \mu^n \sigma^2 + \sigma^2 \mu^{n+1} \frac{1-\mu^n}{1-\mu} =$$

$$= \sigma^2 \mu^n \left[1 + \frac{\mu\left(1-\mu^n\right)}{1-\mu} \right] = \sigma^2 \mu^n \left[\frac{1-\mu+\mu-\mu^{n+1}}{1-\mu} \right] = \sigma^2 \mu^n \left[\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu} \right],$$

čímž je důkaz ukončen. □

Poznámka. Ve speciálním případě $\mu = 1$ platí pro rozptyl počtu částic *n*-té generace jednoduchý vztah $\operatorname{var} X_n = n\sigma^2$. Důkaz se provede analogicky.

Pro $\mu = 1$ rozptyl velikosti populace (počtu částic) roste lineárně s hodnotou *n*. Je-li $\mu > 1$ ($\mu < 1$), pak rozptyl velikosti populace s rostoucím *n* exponenciálně vzrůstá (klesá).

3.4 Pravděpodobnost extinkce větvícího se procesu

Extinkce větvícího se procesu

Uvažujme nyní pravděpodobnost x_n tzv. **extinkce** větvícího se procesu, tj. toho, že se větvící proces $\{X_n, n \in \mathrm{N}\}$, vycházející z jediné částice nulté generace, zastaví dříve, než dosáhne *n*-té generace. V triviálním případě $p_0 = 0$ platí zřejmě $x_n = 0$ pro všechna $n \geq 1$ a extinkce větvícího se procesu není možná. Nechť tedy $0 < p_0 \leq 1$. V takovém případě má posloupnost $\{x_n\}$ následující vlastnosti (viz [8]).

1. Pravděpodobnosti x_n rostou s hodnotou n, tj.

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ \ldots <1.$$

2. Nultá generace obsahuje právě jedinou částici, proto $x_0 = 0$. Pravděpodobnost, že tato částice nevytvoří žádného bezprostředního potomka, je p_0, takže $x_1 = p_0$.

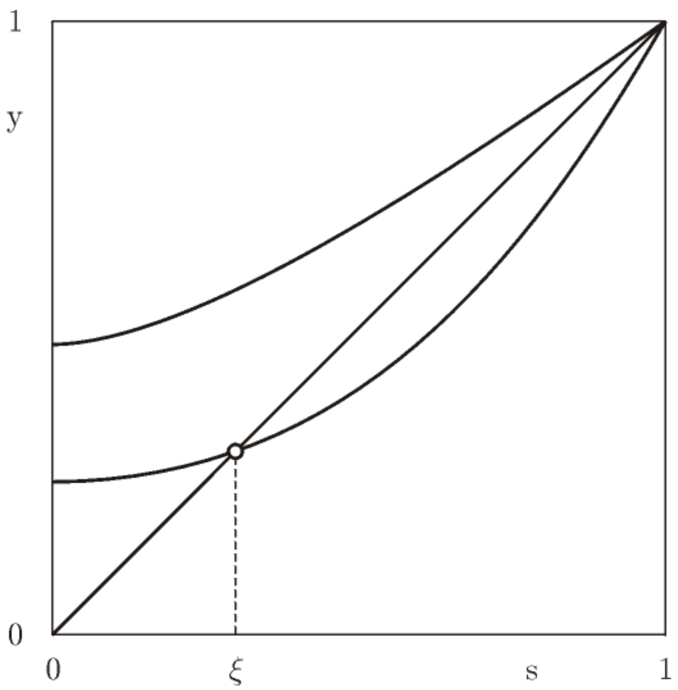
3. Posloupnost $\{x_n\}$ je rostoucí a omezená, proto musí mít vlastní limitu. Jelikož zřejmě platí

$$x_n = P_n(0) = P(P_{n-1}(0)) = P(x_{n-1}),$$

musí tato limita ξ vyhovovat funkcionální rovnici

$$\xi = P(\xi). \tag{3.3}$$

Vytvořující funkce $P(s) = P_1(s)$ i její derivace $P_1'(s)$ obsahují pouze kladné členy a musí tedy růst v intervalu $0 < s \le 1$. Křivka $y = P_1(s)$ je konvexní a protíná přímku $y = s$ nejvýše ve dvou bodech, z nichž jedním je bod [1,1] (viz obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Ilustrace k řešení rovnice (3.3)

Lze poměrně snadno dokázat (viz [7]), že nutná a postačující podmínka pro existenci kořenu $\xi < 1$ rovnice (3.1) má tvar $\mu = P_1'(1) > 1$, kde μ značí střední hodnotu počtu bezprostředních potomků jednoho objektu. V tomto případě křivka $y = P(s)$ vychází z bodu $[0, p_0]$ protíná přímku $y = s$ v bodě

[ξ, $P(\xi)$] a leží pod ní, až dosáhne bodu [1,1]. Je-li naopak $\mu \leq 1$, pak křivka $y = P(s)$ leží v celém intervalu (0,1) nad přímkou $y = s$, a proto neexistuje vůbec žádný kořen $\xi < 1$ rovnice (3.3).

Je-li tedy $\mu > 1$, pak kořen $\xi < 1$ udává jednoznačně pravděpodobnost extinkce větvícího se procesu po nějakém konečném počtu generací. Platí-li však $\mu \leq 1$, potom má rovnice (3.3) jediný kořen $\xi = 1$ a větvící se proces $\{ X_n, n \in \mathrm{N}\}$ zanikne s jistotou.

Uvedený výsledek se snadno rozšíří na případ, kdy nultou generaci netvoří jediná částice, ale $k > 1$ vzájemně nezávislých objektů. V takovém případě je pravděpodobnost extinkce všech k větví procesu rovna jednoduše ξ^k. Výraz $1-\xi^k$ pak udává pravděpodobnost, že se aspoň jedna z větví bude úspěšně rozvíjet.

3.5 Aplikace větvícího se procesu

Teorie větvících se procesů má celou řadu užitečných aplikací. V následujícím přehledu uvádíme některé z nich:

- průběh štěpné reakce v jaderném reaktoru,
- rozvoj populace s tzv. nepřekrývajícími se generacemi, tj. takové populace (např. populace některých druhů hmyzu), u níž rodičovská generace nepřechází (nepřežívá) do generace bezprostředních potomků,
- šíření malých epidemií z jednoho nebo více nezávislých zdrojů nákazy v případě, že se nákaza šíří přímým kontaktem mezi infekčním jedincem a jedinci citlivými vůči nákaze,
- šíření malých lesních kalamit (např. kůrovce) z jednoho nebo více nezávislých zdrojů,
- průběh tzv. pyramidálních her.

Ukážeme možnosti využít model větvícího se procesu v epidemiologii [2]. Epidemie skončí, jakmile všechny větve tohoto grafu sestávají z konečného počtu hran.

Uvažovaný model vychází z následujících předpokladů:

- na počátku existuje K infikovaných jedinců, kteří importují nemoc do zdravé populace;
- doba infekčnosti je spojitou náhodnou veličinou, jež má exponenciální rozdělení s parametrem μ;
- ke kontaktu mezi nakaženými a vnímavými jedinci dochází zcela náhodně, přičemž průměrný počet nových případů přímo infikovaných jedním nakaženým jedincem za jednotku času je roven λ;

- infikovaní jedinci jsou nezávislí, což znamená, že počet případů generovaných jedním nakaženým jedincem nezávisí na počtu případů generovaných kterýmkoli jiným nakaženým jedincem.

Každý infikovaný jedinec zůstává zdrojem nákazy po jistou dobu T (tzv. dobu infekčnosti), mající exponenciální rozdělení s hustotou

$$f(t)=\mu \mathrm{e}^{-\mu t}.$$

Během této doby se nemoc může přenášet na vnímavé jedince. Předpokládejme přitom, že nakažený jedinec přímo infikuje v průměru λ vnímavých jedinců za jednotku času. Pak pravděpodobnost $p_j,\ j=0,1,\ \ldots,$ že takové individuum generuje v průběhu své infekční periody j nových případů nemoci, je

$$p_j=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu \mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j. \tag{3.4}$$

Vztah (3.2) připomíná definici rozdělení pravděpodobností pro nějakou celočíselnou náhodnou veličinu s geometrickým rozdělením. Faktor $\lambda/(\lambda+\mu)$ je možno interpretovat jako pravděpodobnost přenosu nemoci při kontaktu nakaženého jedince s jedincem vnímavým.

Známe-li rozdělení pravděpodobností p_j, potom pro střední hodnotu počtu nových případů generovaných jediným nakaženým individuem dostaneme

$$\mathbf{E}X_1=\sum_{j=0}^{\infty} jp_j=\frac{\lambda}{\mu}. \tag{3.5}$$

Ze vztahu (3.1) vyplývá, že střední hodnota počtu infikovaných jedinců v n-té generaci, kteří pocházejí z jediného nakaženého individua v generaci nulté, je rovna $\left(\lambda/\mu\right)^n$. Odtud pro celkovou velikost epidemie N_1 způsobené jedním infikovaným jedincem dostaneme

$$\mathbf{E}N_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=\frac{\mu}{\mu-\lambda} \quad \text{pro } \lambda<\mu. \tag{3.6}$$

Je tedy zřejmé, že střední hodnota náhodné veličiny N_1 zústává konešná tehdy a jen tehdy, když platí $\lambda<\mu$.

Celková velikost epidemie N způsobená K nezávislými infikovanými jedinci je zřejmě K-násobkem hodnoty určené vztahem (3.6), tj.

$$\mathbf{E}N=\frac{K\mu}{\mu-\lambda} \quad \text{pro } \lambda<\mu. \tag{3.7}$$

K určení pravděpodobnosti extinkce jedné větve uvažované epidemie postačí, když vyjdeme z rovnice (3.3) a za $P(\xi)$ dosadíme vytvořující funkci geometrického rozdělení ve tvaru (3.4). Dostaneme

$$\xi = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\xi}{\lambda+\mu}\right)^{j}.$$

Po úpravě přejde tato rovnice na tvar

$$\xi^2 - \left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)\xi + \frac{\mu}{\lambda} = 0.$$

Jejím řešením pak dostaneme

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \lambda < \mu, \\ \dfrac{\mu}{\lambda}, & \text{je-li } \lambda \geq \mu. \end{cases}$$

Odtud vyplývá pro pravděpodobnost toho, že všech *K* větví epidemie dříve či později skončí , vztah

$$\mathrm{P}(\text{epidemie skončí}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{K}, & \text{je-li } \lambda \geq \mu, \\ 1, & \text{je-li } \lambda < \mu. \end{cases} \tag{3.8}$$

Ze vztahu (3.8) je zřejmé, že pokud má epidemie skončit s jistotou, musí být splněna podmínka $\lambda \leq \mu$. Tato podmínka je ekvivalentní požadavku, aby střední hodnota počtu nových případů infikovaných přímo jedním nakaženým individuem byla menší než jedna.

Navržený model byl úspěšně použit k popisu průběhu malých epidemií bacilární úplavice na severní Moravě.

Kontrolní otázky

1. Jaké jsou obvyklé předpoklady při definování větvícího se procesu?
2. Jak se postupuje při určování vytvořující funkce počtu částic dané generace?
3. Jak byste postupovali při určení pravděpodobnosti extinkce větvícího se procesu?

Kontrolní úkoly

1. V části 3.3 jsme dokázali vztahy pro výpočet střední hodnoty a variance počtu částic *n*-té generace matematickou indukcí.
2. Nechť počet bezprostředních potomků jedné částice má binomické rozdělení. Určete vytvořující funkce $P_n(s)$ pro $n = 1, 2$ a 3.

Korespondenční úkol č. 3. Pokuste se definovat nějaký větvící se proces a provést jeho podrobnější analýzu. Můžete přitom vycházet z námětů uvedených v odstavci 3.5.

Vaše práce by měla mít následující strukturu:

a) definice větvícího se procesu (s důrazem na předpoklady a rozdělení počtu bezprostředních potomků jedné částice),

b) podrobnější popis průběhu zvoleného větvícího se procesu,

c) stanovení vytvořující funkce, střední hodnoty a rozptylu (variance) pro jednotlivé generace procesu,

d) výpočet pravděpodobnosti extinkce procesu před dosažením *n*-té generace,

e) interpretace získaných teoretických výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- větvící se proces,
- větev větvícího se procesu,
- generace větvícího se procesu,
- extinkce větvícího se procesu.

Shrnutí:

V této kapitole je zaveden pojem větvícího se procesu a vysvětlena jeho podstata. Dále jsou odvozeny vztahy pro základní charakteristiky větvícího se procesu: střední hodnotu a rozptyl (varianci) počtu částic v *n*-té generaci, jakož i pravděpodobnost extinkce větvícího se procesu před dosažením *n*-té generace.

4 MARKOVOVY ŘETĚZCE S DISKRÉTNÍM ČASEM I

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie, zejména Markovův řetězec s diskrétním časem, pravděpodobnosti přechodu, pravděpodobnosti stavu Markovova řetězce v daném čase,
- naučíte se konstruovat matici pravděpodobností přechodu,
- naučíte se klasifikovat stavy Markovova řetězce.

Klíčová slova: Markovův řetězec s diskrétním časem, pravděpodobnost přechodu, homogenní Markovův řetězec, nehomogenní Markovův řetězec, matice pravděpodobností přechodu, počáteční rozdělení Markovova řetězce, pravděpodobnost přechodu vyšších řádů, Perronův vzorec, pravděpodobnost stavu v daném čase, stav trvalý, stav přechodný, stav nenulový, stav nulový, stav periodický, stav neperiodický, stav ergodický.

Tato kapitola obsahuje definice relativně velkého počtu nových pojmů a také řadu významných vět, z nichž některé uvádíme bez důkazu. Věnujte maximální pozornost základním pojmům teorie Markovových řetězců s diskrétním časem a diskrétními stavy, abyste dokázali úspěšně řešit konkrétní úlohy včetně následujících kontrolních úkolů a také korespondenčních úkolů.

4.1 Markovův řetězec a jeho reprezentace

Uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovanou posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Nechť $S = \{s_0, s_1, s_2 \ ...\}$, zkráceně $\{0, 1, 2, \ ...\}$, je **množina stavů** náhodného procesu $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ a její prvky **stavy** tohoto procesu. Tato množina může být konečná nebo spočetně nekonečná. Říkáme, že systém je v čase $t = n$ ve stavu s_i, právě když $X_n = i$.

Množina stavů

Definice 4.1. Posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá **Markovův řetězec** (dále **MŘ**) **s diskrétním časem**, jestliže

$$P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ ..., X_0 = i_0\right) = P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) \quad (4.1)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna přirozená čísla $i, j, i_{n-1}, ..., i_0$ taková, že platí $P\left(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ ..., X_0 = i_0\right) > 0.$

Markovská vlastnost

Vztah (4.1) vyjadřuje tzv. **markovskou vlastnost**, což znamená, že pravděpodobnost určité hodnoty procesu v budoucnosti (v čase $n+1$) závisí jen na jeho hodnotě v přítomném čase *n* a nikoli na jeho hodnotách v minulosti (v časech $n-1, n-2, \ ..., 0$).

Pravděpodobnosti přechodu

Homogenní MŘ
Nehomogenní MŘ

Podmíněné pravděpodobnosti $P\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = p_{ij}\left(n, n+1\right)$ se nazývají **pravděpodobnosti přechodu** ze stavu s_i (v čase *n*) do stavu s_j (v čase $n+1$) nebo také **pravděpodobnosti přechodu prvního řádu**. Pokud tyto pravděpodobnosti nezávisejí na *n*, značí se jednoduše p_{ij} a příslušný **Markovův řetězec** je **homogenní**. V opačném případě jde o **nehomogenní Markovův řetězec.** Dále se budeme zabývat pouze homogenními Markovovými řetězci.

Matice pravděpodobností přechodu

Čtvercová matice $\mathbf{P} = \left\{p_{ij}\right\}$, tvořená pravděpodobnostmi přechodu p_{ij} mezi jednotlivými stavy, se nazývá **matice pravděpodobností přechodu** homogenního MŘ. Tato matice má následující vlastnosti:

a) pro všechna i, j platí $p_{ij} \geq 0$,

b) pro všechna i platí $\sum_j p_{ij} = 1$.

Stochastická matice

Matice s těmito vlastnostmi se nazývá **stochastická matice**.

Počáteční rozdělení MŘ

Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{p}^{(0)} = \left\{p_i^{(0)}\right\}$, kde $p_i^{(0)} = P\left(X_0 = i\right)$ se nazývá **počáteční rozdělení** homogenního Markovova řetězce.

Markovův řetězec s diskrétními stavy je tedy plně určen (definován) zadáním:

- množiny stavů *S*,
- vektoru počátečního rozdělení $\mathbf{p}^{(0)} = \left(p_i^{(0)}\right)$,
- matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = \left(p_{ij}\right)$.

Příklad 4.1. Náhodná procházka s absorbujícími stěnami. Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech na přímce, a to v každém kroku o jednotku vpravo s pravděpodobností *p* nebo o jednotku vlevo s pravděpodobností $q = 1 - p$, přitom nezávisle na předcházejících krocích. Jestliže částice dosáhne bodu $x = 0$ nebo $x = a$ $\left(a > 0\right)$, pak v těchto bodech setrvá (je v nich absorbována). Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

Řešení. Množina možných stavů systému je zřejmě $S = \{0, 1, \ldots, a\}$. Pro pravděpodobnosti přechodů dostaneme jednoduchou úvahou

$$p_{00} = p_{aa} = 1,$$

$$p_{j,j-1} = q,\ p_{j,j+1} = p \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, a-1.$$

Označíme-li řádky i sloupce matice $\mathbf{P}$ pomocí symbolů jednotlivých stavů systému (tedy $0, 1, \ldots, a$), bude mít matice pravděpodobností přechodů tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad lze snadno interpretovat. Dva hráči spolu hrají posloupnost partií, přičemž v každé partii hráč vyhraje jednu korunu s pravděpodobností p nebo prohraje jednu korunu s pravděpodobností q. Hraje se tak dlouho, dokud jeden z obou hráčů neprohraje všechny své peníze.

Příklad 4.2. Série úspěšných pokusů. Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů, tj. posloupnost nezávislých pokusů se dvěma možnými výsledky (úspěch, neúspěch) takových, že pravděpodobnost úspěchu p zůstává konstantní. Předpokládejme, že systém je v čase $t = n$ ve stavu s_j, jestliže v n-tém pokuse dosáhla série po sobě jdoucích úspěchů délky j. Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

Řešení. Množina stavů MŘ je zřejmě spočetně nekonečná, tedy $S = \{0, 1, \ldots\}$. Pro pravděpodobnosti přechodů platí:

a) $p_{j0} = q,\ p_{j,j+1} = p$ pro všechna přirozená čísla j,

b) $p_{jk} = 0$ ve všech ostatních případech.

Odtud pro matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ dostaneme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.3. Posloupnost hodů hrací kostkou. Předpokládejme, že systém je ve stavu s_j jestliže j představuje nejvyšší číslo, které padlo v předcházejících hodech. Sestavte matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

Řešení. V tomto případě je $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Pro pravděpodobnosti přechodů platí:

- $p_{i,i-k}=0$ pro $i=1,2,\ ...,\ 6$ a $0<k\le i-1$,
- $p_{ii}=i/6$ pro $i=1,2,3,4,5,6$,
- $p_{i,i+k}=1/6$ pro $i=1,2,3,4,5,6$ a $0<k\le 6-i$.

Hledaná matice $\mathbf{P}$ má tedy tvar

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}..$$

4.2 Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů

Nechť je dán homogenní MŘ s diskrétním časem $\{X_n, n\in\mathrm{N}\}$. Uvažujme nyní pravděpodobnosti přechodů ze stavu s_i v nějakém čase m do stavu s_j v čase $m+n$. Takové pravděpodobnosti se nazývají **pravděpodobnosti přechodů po *n* krocích** nebo **pravděpodobnosti přechodů *n*-tého řádu**; budeme je označovat $p_{ij}^{(n)}$.

Pravděpodobnost přechodu *n*-tého řádu

Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí

$$p_{ij}^{(2)}=\sum_{\nu} p_{i\nu}p_{\nu j},\ ...,\ p_{ij}^{(n+1)}=\sum_{\nu} p_{i\nu}p_{\nu j}^{(n)},\ ...$$

neboli maticově

$$\mathbf{P}^2=\mathbf{P}.\mathbf{P},\ ...,\ \mathbf{P}^{n+1}=\mathbf{P}.\mathbf{P}^n,\ ...,$$

kde $\mathbf{P}^n=\left\{p_{ij}^{(n)}\right\}$. Je zřejmé, že pravděpodobnosti přechodů *n*-tého řádu jsou prvky *n*-té mocniny matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Pro úplnost dodáváme $\mathbf{P}^0=\left(\delta_{ij}\right)$.

Je-li dána v konkrétním případě matice $\mathbf{P}$, máme k dispozici tři postupy, jak určit pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů (matici $\mathbf{P}^n$).

1) Postupné umocňování matice $\mathbf{P}$. Tento postup je vhodný zejména tehdy, jsou-li prvky matice $\mathbf{P}$ dány numericky.
2) Určení prvků matice $\mathbf{P}^n$ přímo z definice MŘ. Postup si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 4.4. Vyjděte ze zadání příkladu 4.2, jenž se týkal série úspěšných pokusů, a určete přímo prvky matice $\mathbf{P}^n$.

Řešení. Z počátečního stavu *j* můžeme po *n* krocích přejít do:

- stavu $j+n$, jestliže všech *n* pokusů skončí úspěchem,
- stavu 0, skončí-li poslední n-tý pokus neúspěchem,
- stavu 1, skončí-li předposlední pokus neúspěchem a poslední úspěchem,
- stavu 2, budou-li výsledky posledních tří pokusů neúspěch, úspěch a úspěch atd.

Matice pravděpodobností přechodů *n*-tého řádu bude mít tedy tvar

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} q & qp & qp^2 & \dots & qp^{n-1} & p^n & 0 & 0 & \dots \\ q & qp & qp^2 & \dots & qp^{n-1} & 0 & p^n & 0 & \dots \\ q & qp & qp^2 & \dots & qp^{n-1} & 0 & 0 & p^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

3) Použití **Perronova vzorce** známého z teorie matic (viz např. [7]). Tento postup je možný pouze tehdy, je-li matice $\mathbf{P}$ konečného řádu. Obecný tvar Perronova vzorce je dosti komplikovaný, proto se omezíme jen na případ, kdy všechna charakteristická čísla matice $\mathbf{P}$ jsou jednoduchá. Pak má Perronův vzorec tvar

Perronův vzorec

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k^n P_{ij}(\lambda_k)}{\psi_k(\lambda_k)}, \tag{4.2}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ jsou charakteristická čísla matice $\mathbf{P}$,

$P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P})$ je charakteristický polynom matice $\mathbf{P}$,

$\psi_k(\lambda) = P(\lambda) / (\lambda - \lambda_k)$ a $P_{ij}(\lambda)$ jsou prvky matice $\operatorname{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P})$.

4.3 Pravděpodobnosti stavu systému v daném čase

Označme $\mathbf{p}^{(n)} = \left\{ p_i^{(n)} \right\}$ vektor nepodmíněných pravděpodobností jednotlivých stavů systému v čase $t = n$. Z věty o úplné pravděpodobnosti plyne

$$p_j^{(n)} = \sum_i p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \text{ a také obecně } p_j^{(m+n)} = \sum_i p_i^{(m)} p_{ij}^{(n)}.$$

Jsou-li $\mathbf{p}^{(0)}$ a $\mathbf{p}^{(n)}$ řádkové vektory, můžeme psát

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{n}, \text{ obecně } \mathbf{p}^{(n+m)} = \mathbf{p}^{(m)}\mathbf{P}^{n}.$$

Podobně lze ukázat, že také platí

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)}\mathbf{P}.$$

Příklad 4.5. Uvažujte náhodnou procházku s absorbujícími stěnami (viz příklad 4.1) za předpokladu, že $a = 3$ a částice je na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu 2. Určete pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému v časech $t = 1$ a $t = 2$.

Řešení. Množina možných stavů systému je $S = \{0,1,2,3\}$ a pro vektor počátečního rozdělení pravděpodobností zřejmě platí $\mathbf{p}^{(0)} = \{0\ 0\ 1\ 0\}$. Proto

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & pq & p \end{pmatrix}.$$

Pro další výklad bude užitečná následující věta.

Věta 4.1. Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ nezávislá na výchozím stavu *i*, pak existuje také $\lim\limits_{n\to\infty} p_{j}^{(n)}$ a obě limity se rovnají.

Důkaz. Nechť pro všechna i platí $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = k$. Pak můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_i p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \sum_i p_i^{(0)} = k \sum_i p_i^{(0)} = k,$$

čímž je věta dokázána. □

4.4 Rekurentní jevy

Teorie Markovových řetězců s diskrétním časem souvisí velmi těsně s teorií tzv. rekurentních jevů. Pojem rekurentního jevu je sice srozumitelný, ale jeho formální definice je velmi těžkopádná, proto ji nebudeme v tomto učebním textu uvádět. Podrobné poučení o rekurentních jevech můžete nalézt např. ve skriptech [3].

Přímo z definice rekurentních jevů vyplývají následující tvrzení.

Věta 4.2. Je-li systém na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu s_j, pak každý průchod systému stavem s_j je rekurentní jev.

Důkaz je uveden např. ve skriptech [3,5]. □

Uvažujme Markovův řetězec s diskrétním časem, který je na počátku (v čase $t = 0$) v nějakém konkrétním stavu s_j. Doba potřebná k tomu, aby se systém poprvé vrátil do stavu s_j, se nazývá **doba (čas) návratu** do stavu s_j. Tato náhodná veličina má pravděpodobnostní rozdělení $\left\{ f_j^{(n)} \right\}$. To znamená, že $f_j^{(n)}$ udává pravděpodobnost toho, že systém bude v čase $t = n$ poprvé ve stavu s_j, byl-li na počátku (v čase $t = 0$) také ve stavu s_j. Pravděpodobnosti doby návratu $f_j^{(n)}$ souvisejí s pravděpodobnostmi přechodu po *n* krocích $p_{jj}^{(n)}$ takto

Doba návratu do daného stavu

$$p_{jj}^{(n)} = f_j^{(0)} p_{jj}^{(n)} + f_j^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \ ... \ + f_j^{(n)} p_{jj}^{(0)},$$

přičemž $f_j^{(0)} = 0$ a $p_{jj}^{(0)} = 1$.

Věta 4.3. Je-li systém na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu $s_i \neq s_j$ pak každý průchod systému stavem s_j je rekurentní jev se zpožděním.

Důkaz je uveden např. ve skriptech [3,5]. □

Uvažujme nyní Markovův řetězec s diskrétním časem, který je na počátku (v čase $t = 0$) v nějakém konkrétním stavu $s_i \neq s_j$. Doba potřebná k tomu, aby se systém poprvé dostal do stavu s_j, se nazývá **doba čekání na první průchod stavem** s_j. Tato náhodná veličina má rozdělení $\left\{ f_{ij}^{(n)} \right\}$, takže $f_{ij}^{(n)}$ udává pravděpodobnost toho, že systém bude v čase $t = n$ poprvé ve stavu s_j, byl-li na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu $s_i \neq s_j$. Pravděpodobnosti $f_{ij}^{(n)}$ souvisejí s pravděpodobnostmi přechodu po *n* krocích $p_{ij}^{(n)}$ prostřednictvím vztahů

Doba čekání na první průchod daným stavem

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \left(f_j^{(0)} p_{ij}^{(n)} + f_j^{(1)} p_{ij}^{(n-1)} + \ ... \ f_j^{(n)} p_{ij}^{(0)} \right),$$

kde $f_{ij}^{(0)} = 0$ a $p_{ij}^{(0)} = 0$.

4.5 Klasifikace stavů Markovova řetězce

Definice 4.2. Stav s_j Markovova řetězce se nazývá **trvalý**, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = 1$, a **přechodný**, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} < 1$.

Stav trvalý
Stav přechodný

Do stavu trvalého se Markovův řetězec určitě někdy (dříve nebo později) dostane. Přesněji řečeno, do trvalého stavu se Markovův řetězec vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích. Naproti tomu do přechodného stavu se Markovův řetězec s pravděpodobností $1-\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ nikdy nevrátí.

Označme μ_j střední hodnotu doby návratu do stavu s_j. Pak můžeme vyslovit tuto definici.

Stav nenulový
Stav nulový

Definice 4.3. Trvalý stav s_j Markovova řetězce se nazývá **nenulový**, jestliže $\mu_j < +\infty$, a **nulový**, jestliže $\mu_j = +\infty$.

Trvalý stav je tedy nenulový, když střední doba návratu do tohoto stavu nabývá konečné hodnoty, v opačném případě je nulový.

U trvalých nenulových stavů rozlišujeme ještě stavy periodické a neperiodické.

Stav periodický
Stav neperiodický

Definice 4.4. Nechť λ je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které platí $p_{jj}^{(n)} > 0$. Je-li $\lambda > 1$, říkáme, že stav s_j je **periodický s periodou** λ. Je-li však $\lambda = 1$, pak říkáme, že stav s_j je **neperiodický (aperiodický)**.

Markovův řetězec je neperiodický, jsou-li všechny jeho stavy neperiodické. Jinak se nazývá periodický.

Pravděpodobnosti $f_j^{(n)}$, resp. $f_{ij}^{(n)}$, se v praxi určují mnohem obtížněji než pravděpodobnosti $p_{jj}^{(n)}$, resp. $p_{ij}^{(n)}$, proto je užitečná následující věta.

Věta 4.4.

(1) Stav s_j je přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty$. V tomto případě platí $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < +\infty$ pro každé i.

(2) Stav s_j je trvalý nulový, právě když platí $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$, ale $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$.

(3) Je-li stav s_j trvalý nenulový a neperiodický, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} \text{ a } \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

(4) Je-li stav s_j trvalý nenulový a periodicky s periodou λ, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j} \text{ a pro } i \neq j \ (0 \leq \nu < \lambda - 1) \ \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n\lambda+\nu)} = \frac{\lambda}{\mu_j}\sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k\lambda+\nu)}.$$

Důkaz tohoto tvrzení je uveden ve skriptech [5]. □

Kritérium neperiodičnosti. Je-li $p_{jj} > 0$, pak stav s_j je neperiodický. Tato podmínka je postačující, nikoli nutná.

Příklad 4.6. Uvažujme zjednodušený model počasí se dvěma stavy: $s_1 = \{\text{deštivo}\}$ a $s_2 = \{\text{slunečno}\}$. To znamená, že předpověď na zítřejší den je určena pouze počasím dnešního dne. Nechť matice pravděpodobností přechodu má tvar $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Jak je to s periodicitou stavů?

Řešení. Diagonální prvky přechodové matice jsou kladné, oba stavy jsou tedy neperiodické a celý Markovův řetězec je také neperiodický.

Stav ergodický

Definice 4.5. Stavy trvalé nenulové a neperiodické se nazývají **ergodické**.

Pro klasifikaci stavů Markovova řetězce je užitečná následující věta.

Věta 4.5. V Markovově řetězci s konečně mnoha stavy neexistují stavy trvalé nulové a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

Důkaz je uveden ve skriptech [5]. □

Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi homogenními a nehomogenními Markovovými řetězci?
2. Čím je jednoznačně utčen Markovův řetězec s diskrétním časem?
3. Je možno použít Perronova vzorce ve tvaru uvedeném v této opoře pro libovolnou matici pravděpodobností přechodu?
4. Jaký mají význam takové charakteristiky rekurentních jevů, jakými jsou doba návratu do daného stavu a doba čekání na první průchod daným stavem?
5. Jak se liší stavy trvalé od stavů přechodných?
6. Kdy je daný Markovův řetězec periodický?

Kontrolní úkoly

1. Uvažujte posloupnost nezávislých pokusů s množinou n možných výsledků $\{1, 2, ..., n\}$, které nastávají s konstantními pravděpodobnostmi $p_1, p_2, ..., p_n$. Předpokládejte přitom, že systém je

ve stavu s_j, jestliže právě provedený pokus skončí výsledkem j. Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

2. Náhodná procházka s odrážejícími stěnami. Představte si částici, která se chová jako v příkladu 4.1 s tím rozdílem, že namísto absorbujících stěn v bodech 0 a a existují odrážející stěny v bodech $\frac{1}{2}$ a $a-\frac{1}{2}$. To znamená, že částice přecházející z bodu 1 do bodu 0 je vrácena zpět do bodu 1, a také částice přecházející z bodu $a-1$ do bodu a se vrací do bodu $a-1$. Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

3. Je dána neomezená zásoba kuliček. V každém kroku zařadíme jednu kuličku náhodně do jedné z N přihrádek. Systém je ve stavu s_j, $j=1,2,\ ...,\ a,$ jestliže je obsazeno právě j přihrádek (jednou nebo více kuličkami). Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

4. Ehrenfestův pokus. Nechť N vzájemně rozlišitelných molekul plynu je rozděleno do dvou nádob A a B. V každém kroku se náhodně vybere jedna molekula a přemístí se z nádoby, ve které se právě nachází, do nádoby druhé. Stav systému je dán počtem molekul v nádobě A. Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

5. Nechť je dána matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

   Spočtěte prvky matice $\mathbf{P}^n$.

6. Uvažujte posloupnost hodů hrací kostkou (viz příklad 4.3) za předpokladu, že vektor počátečního rozdělení má tvar $\mathbf{p}^{(0)}=\{0,0,1,0,0,0\}$. Určete pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému v časech $t=1$ a $t=2$.

7. Uvažujte náhodnou procházku v obci se čtyřmi ulicemi, které tvoří strany čtverce. Chodec nacházející se v libovolném z vrcholů čtverce může jít s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ „vpravo“ nebo „vlevo“. Matice pravděpodobností přechodu má zřejmě tvar

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Posuďte periodicitu stavů tohoto Markovova řetězce.

Korespondenční úkol č. 4. Definujte nějaký Markovův řetězec s diskrétními stavy a proveďte klasifikaci jeho stavů.

Vaše práce by měla mít následující strukturu:

a) definice Markovova řetězce,

b) podrobnější popis stavů tohoto Markovova řetězce a přechodových pravidel,

c) sestavení matice pravděpodobností přechodu,

d) klasifikace stavů řetězce.

Pojmy k zapamatování:

- Markovská vlastnost,
- Markovův řetězec s diskrétním časem,
- Markovův řetězec homogenní,
- Markovův řetězec nehomogenní,
- množina stavů Markovova řetězce,
- matice pravděpodobností přechodu,
- počáteční rozdělení pravděpodobností,
- pravděpodobnosti přechodu vyšších řádů,
- Perronův vzorec,
- doba návratu do daného stavu,
- doba čekání na první průchod daným stavem,
- stav trvalý,
- stav přechodný,
- stav trvalý nenulový,
- stav trvalý nulový,
- stav trvalý nenulový neperiodický = stav ergodický,
- stav trvalý nenulový periodický (s periodou λ).

Shrnutí

V této kapitole vycházíme z pojmu Markovova řetězce s diskrétními stavy a diskrétním časem. Zavádíme základní pojmy teorie takových Markovových řetězců (např. množina stavů, pravděpodobnosti přechodů, počáteční rozdělení, rozložitelné a nerozložitelné řetězce, stacionární rozdělení), předkládáme čtenáři klasifikaci stavů (stavy trvalé a přechodné, stavy trvalé nenulové a nulové, stavy trvalé nenulové neperiodické a periodické) a odvozujeme rovnice pro výpočet pravděpodobnosti absorpce v nějaké uzavřené množině trvalých stavů.

5 MARKOVOVY ŘETĚZCE S DISKRÉTNÍM ČASEM II

Po prostudování této kapitoly:

- naučíte se rozlišovat rozložitelné a nerozložitelné Markovovy řetězce,
- naučíte se počítat stacionární pravděpodobnosti Markovova řetězce, pokud existují,
- naučíte se počítat pravděpodobnosti absorpce v nějaké uzavřené množině trvalých stavů.

Klíčová slova: dosažitelnost stavu, uzavřená množina stavů, nerozložitelný Markovův řetězec, rozložitelný Markovův řetězec, stavy téhož typu, stacionární rozdělení, absorpce uzavřenou množinou trvalých stavů.

Tato kapitola je pokračováním kapitoly bezprostředně předcházející. Obsahuje také mnoho nových pojmů z teorie Markovových řetězců s diskrétním časem. Věnujte maximální pozornost pochopení těchto pojmů, abyste dokázali úspěšně řešit konkrétní úlohy.

5.1 Nerozložitelné a rozložitelné Markovovy řetězce

Nejprve uvedeme několik užitečných definic.

Dosažitelnost stavu

Definice 5.1. Stav s_j je **dosažitelný** ze stavu s_i, jestliže existuje přirozené číslo $n \geq 0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Z uvedené definice vyplývá, že každý stav je dosažitelný ze sebe sama, protože platí $p_{ii}^{(0)} = 1$.

Příklad 5.1. Náhodná procházka s pohlcujícími stěnami: ze stavů $1, 2, a-1$ jsou dosažitelné všechny stavy, ze stavu 0 jen stav 0 a ze stavu a pouze stav a.

Uzavřená množina stavů

Definice 5.2. Neprázdná množina *C* stavů Markovova řetězce je **uzavřená,** jestliže žádný stav vně množiny *C* není dosažitelný z žádného stavu uvnitř *C*. Nejmenší uzavřená množina obsahující *C* se nazývá **uzávěr** množiny *C*.

Uzavřená množina stavů C představuje samozřejmě také Markovův řetězec. Příslušnou matici přechodu dostaneme vynecháním těch řádků a sloupců, které odpovídají stavům nacházejícím se vně množiny C.

Věta 5.1. Množina stavů C je uzavřená právě tehdy, když platí

$$\forall s_i \in C,\ \forall s_j \notin C:\ p_{ij} = 0.$$

Důkaz. $(\Rightarrow)$ Vyplývá přímo z definice uzavřené množiny.

$(\Leftarrow)$ Předpokládejme, že je splněna podmínka uvedená v dokazované větě. Pak ale musí platit (vzhledem k definici uzavřené množiny stavů) $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna $n > 0$. □

Nyní přejdeme k definici nerozložitelného Markovova řetězce.

Nerozložitelný MŘ
Rozložitelný MŘ

Definice 5.3. Markovův řetězec se nazývá **nerozložitelný**, jestliže v něm kromě množiny všech stavů neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů. V opačném případě se Markovův řetězec nazývá **rozložitelný**.

Věta 5.2. Markovův řetězec je nerozložitelný, právě když každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu.

Důkaz vyplývá přímo z definic uvedených v této kapitole. □

Markovův řetězec z příkladu 4.1 je zřejmě rozložitelný, protože stavy 0 a a jsou absorpční a tvoří uzavřenou množinu, zatímco Markovův řetězec z příkladů 4.2 je nerozložitelný.

Věta 5.3. Markovův řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný, právě když jeho matice pravděpodobností přechodu má (po případném přečíslování) tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

kde v diagonálních polích jsou čtvercové matice $\mathbf{P}_1, \mathbf{B}$ a v pravém horním poli nulová matice. Matice $\mathbf{P}_1$ představuje matici pravděpodobností přechodu pro uzavřenou množinu trvalých stavů, matice $\mathbf{B}$ odpovídá přechodným stavům.

Důkaz. Stačí přečíslovat stavy tak, aby nejnižší pořadová čísla příslušela stavům uzavřené množiny. Uvedené tvrzení pak vyplývá z věty 5.1. □

Příklad 5.2. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodneme, zda je řetězec rozložitelný nebo nerozložitelný.

Řešení. Nechť $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ je množina stavů uvažovaného řetězce. Stavy s_1 a s_5 tvoří zřejmě uzavřenou množinu, proto je řetězec rozložitelný. Přečíslujeme-li stavy podle schématu $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \to (\tilde{s}_1, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4, \tilde{s}_5, \tilde{s}_2)$, dostaneme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Uvažovaný Markovův řetězec je tedy rozložitelný.

Doporučujeme čtenáři, aby si při určování dosažitelnosti stavů nebo rozložitelnosti Markovova řetězce kreslil diagram s šipkami reprezentujícími přechody mezi jednotlivými stavy řetězce.

Stavy téhož typu

Definice 5.4. **Stavy** s_i a s_j jsou **téhož typu**, jestliže jsou

- oba přechodné,
- oba trvalé nulové,
- oba trvalé nenulové a neperiodické
- oba trvalé nenulové a periodické.

Věta 5.4. Je-li stav s_j dosažitelný ze stavu s_i a naopak, jsou oba stavy téhož typu.

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že existují přirozená čísla M a N taková, že $p_{ij}^{(N)} = \alpha > 0$, $p_{ji}^{(M)} = \beta > 0$. Pro libovolné přirozené n zřejmě platí

$$p_{ii}^{(n+N+M)} \geq p_{ij}^{(N)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(M)} = \alpha\beta p_{jj}^{(n)}$$

a také

$$p_{jj}^{(n+N+M)} \geq p_{ji}^{(M)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(N)} = \alpha\beta\, p_{ii}^{(n)}.$$

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$, z prvního z uvedených vztahů vyplývá, že také $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty$. To podle věty 4.4 znamená, že je-li stav s_i přechodný, je také stav s_j přechodný. Analogicky se provede důkaz i pro stavy ostatních typů. □

Důsledek 1. V nerozložitelném Markovově řetězci jsou všechny stavy téhož typu.

Důsledek 2. V nerozložitelném Markovově řetězci jsou všechny stavy trvalé nenulové (viz věta 4.5).

Na závěr tohoto odstavce uvedeme bez důkazu ještě větu pro periodické stavy nerozložitelného Markovova řetězce.

Věta 5.5. Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec, jehož všechny stavy jsou periodické s periodou λ. Pak existuje rozklad množiny všech stavů na λ podmnožin $G_0, G_1, \ldots, G_{\lambda-1}$ takový, že přechody po jednom kroku ze stavů množiny G_ν jsou možné jen do stavů množiny $G_{\nu+1}$ ($0 \leq \nu \leq \lambda - 2$), resp. ze stavů množiny $G_{\lambda-1}$ do stavů množiny G_0.

Příklad 5.3. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vyšetříme periodicitu jeho stavů.

Řešení. Uvedený Markovův řetězec je podle věty 5.2 nerozložitelný, což znamená, že všechny jeho stavy jsou stejného typu. Spočteme mocniny matice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všechny stavy řetězce jsou trvalé nenulové a periodické s periodou $\lambda = 3$, protože mocniny $\mathbf{P}^{3k}$, $k \geq 1$, mají na hlavní diagonále vesměs nenulové prvky, kdežto ostatní mocniny mají na hlavní diagonále samé nuly. Množinu jeho stavů lze podle věty 5.5 rozložit na tři podmnožiny takto: $G_0 = \{s_1, s_2\}$, $G_1 = \{s_4\}$, $G_2 = \{s_3\}$. Můžete se o tom snadno přesvědčit.

5.2 Stacionární rozdělení

Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.

Stacionární rozdělení

Definice 5.5. Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots)$ se nazývá **stacionární rozdělení** tohoto nerozložitelného Markovova řetězce, jestliže platí $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$ pro všechna j neboli maticově $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$, přičemž všechny prvky vektoru jsou nenulové a $\sum_{i=1} \pi_i = 1$.

Stacionaritu lze interpretovat následujícím způsobem. Mějme velký počet nezávislých systémů (např. částic), které se řídí stejným Markovovým řetězcem. Podle zákona velkých čísel je relativní četnost částic, které jsou v čase $t = n$ ve stavu s_i, přibližně rovna pravděpodobnosti $a_i^{(n)}$. V případě stacionarity je tedy rozdělení relativních četností částic v jednotlivých stavech neměnné v čase.

Věta 5.6. V nerozložitelném Markovově řetězci existuje stacionární rozdělení, právě když všechny stavy jsou trvalé nenulové. Toto rozdělení je jediné a pro všechna i, j platí

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ v případě neperiodickém,}$$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ij}^{(\nu)} > 0 \text{ v případě periodickém.}$$

Důkaz této věty (poněkud zdlouhavý) je uveden ve skriptech [5]. □

Věty 5.6 se užívá často jako kritéria pro klasifikaci stavů daného nerozložitelného Markovova řetězce. Zjistíme-li totiž, že existuje stacionární rozdělení, pak jsou všechny stavy takového řetězce trvalé nenulové.

Příklad 5.4. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu (náhodná procházka s odrážejícími stěnami)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix},$$

kde $p + q = 1.$ Určete stacionární rozdělení a proveďte klasifikaci stavů.

Řešení. Markovův řetězec je podle věty 5.2 nerozložitelný, a tedy všechny jeho stavy jsou téhož typu. Rovnice pro určení stacionárního rozdělení mají tvar

$$\pi_1 = q\pi_1 + q\pi_2,$$
$$\pi_j = p\pi_{j-1} + q\pi_{j+1} \text{ pro } j \geq 2.$$

Postupným řešením těchto rovnic dostaneme

$$\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1, \ \pi_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_1, \ \ldots$$

nebo obecně

$$\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} \pi_1 \text{ pro } j \geq 1.$$

Rozlišíme dva případy.

a) Je-li $p < q$, pak $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \pi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j = \dfrac{\pi_1}{1 - \frac{p}{q}} = 1,$

z čehož vyplývá, že $\pi_1 = 1 - \dfrac{p}{q}.$ Stacionární rozdělení zřejmě existuje,

protože všechna π_j jsou kladná a platí $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1.$ Toto rozdělení má tvar

$$\pi_j = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}.$$

V tomto případě jsou všechny stavy Markovova řetězce podle věty 5.6 trvalé nenulové.

b) Je-li ovšem $p \geq q$, potom pro libovolné $\pi_1 > 0$ platí $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = +\infty,$ a tedy stacionární rozdělení neexistuje. V tomto případě věta 5.6 říká jen to, že všechny stavy jsou buď přechodné nebo trvalé nulové.

Dvojně stochastická matice

Definice 5.6. Matice s nezápornými prvky, jejíž všechny řádkové i sloupcové součty jsou rovny 1, se nazývá **dvojně stochastická**.

Pro dvojně stochastické matice pravděpodobností přechodu platí užitečná věta.

Věta 5.7. Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec s dvojně stochastickou maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$.
a) Je-li počet stavů řetězce konečný a rovný *N*, pak stacionární rozdělení existuje a má tvar

$$\pi_j = \frac{1}{N} \text{ pro všechna } 1 \le j \le N.$$

b) Je-li počet stavů nekonečný, stacionární rozdělení neexistuje.

Důkaz.
a) Stačí ověřit, že $\pi_j = \frac{1}{N}$ pro všechna $1 \le j \le N$ je skutečně řešením soustavy rovnic v definici stacionárního rozdělení. Dostaneme

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} p_{ij} = \frac{1}{N}.1 = \frac{1}{N}.$$

b) Důkaz provedeme sporem. Pro jednoduchost uvažujeme neperiodický případ, kdy pro všechna i, j platí $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} > 0$. Z definice dvojně stochastické matice $\mathbf{P}$ platí, že i každá její mocnina je dvojně stochastická, takže $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$ pro každé *j*. Pro libovolné *N* tedy platí $1 \ge \sum_{i=1}^{N} p_{ij}^{(n)}$. Odtud limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme $1 \ge \frac{N}{\mu_j}$, tj. $\frac{1}{\mu_j} = 0$, což je spor. □

5.3 Rozklad množiny všech stavů Markovova žetězce

Markovovy řetězce obsahují obecně trvalé i přechodné stavy. Nechť je dán libovolný Markovův řetězec obsahující trvalé stavy. Vezmeme trvalý stav s nejnižším indexem s_{j1} a utvoříme jeho uzávěr C_1, tj. množinu všech stavů dosažitelných ze stavu s_{j1}). Dále vezmeme trvalý stav s_{j2} s nejnižším indexem mezi těmi, co nepatří do množiny C_1, a vytvoříme jeho uzávěr C_2. Takto postupujeme až do vyčerpání všech trvalých stavů daného Markovova řetězce. Tímto postupem vytvořené množiny $C_1, C_2, ..., C_r$ představují disjunktní rozklad množiny všech trvalých stavů na nerozložitelné uzavřené množiny stavů. Uvedený rozklad je jednoznačný, samozřejmě až na očíslování.

Kromě trvalých stavů existují v Markovově řetězci obecně ještě stavy přechodné. Z přechodných stavů jsou dosažitelné stavy trvalé, ale nikoliv naopak.

Příklad 5.5. Uvažujme náhodnou procházku s pohlcujícími stěnami. V tomto případě existují dvě uzavřené množiny trvalých stavů: $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{a\}$ a všechny ostatní stavy jsou přechodné.

V Markovově řetězci s konečně mnoha stavy odpovídá rozkladu množiny všech stavů matice

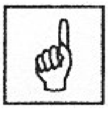
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_r & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

kde v diagonálních polích jsou čtvercové matice a v polích nad hlavní diagonálou vesměs nulové matice. Matice $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_r$ představují matice pravděpodobností přechodu pro uzavřené množiny trvalých stavů $C_1, C_2, ..., C_r$ a matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_r$ odpovídají stavům přechodným. Matice $\mathbf{P}$ ve větě 5.3 tedy odpovídá speciálnímu případu Markovova řetězce s jedinou uzavřenou množinou trvalých stavů.

5.4 Absorpce uzavřenou množinou trvalých stavů

Absorpce uzavřenou množinou trvalých stavů

Označme množinu všech přechodných stavů *T*. Nechť $s_j \in T$ je nějaký přechodný stav a *C* nějaká nerozložitelná uzavřená množina trvalých stavů. V této části ukážeme, jak se počítá pravděpodobnost x_j toho, že systém, který je na počátku ve stavu s_j, vstoupí někdy do množiny *C* (je **absorbován množinou *C***). Výraz $1 - x_j$ pak reprezentuje pravděpodobnost toho, že systém setrvá navždy v množině *T*, nebo bude absorbován nějakou jinou uzavřenou množinou trvalých stavů.



Věta 5.8. Pravděpodobnosti x_j pro stav $s_j \in T$ vyhovují soustavě rovnic

$$x_j - \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} x_\nu = x_j^{(1)}, \tag{5.1}$$

kde $x_j^{(1)} = \sum_{k \in C} p_{jk}$ značí pravděpodobnost přechodu systému ze stavu s_j do množiny *C* už v prvním kroku.

Důkaz. Označme $x_j^{(n)}$ pravděpodobnost absorpce množinou C právě v n-tém kroku. Pak zřejmě platí $x_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^{(n)}$. Pravděpodobnosti $x_j^{(n)}$ splňují rekurentní vztah $x_j^{(n+1)} = \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} x_\nu^{(n)}$ pro všechna $n \geq 1$ a každé $s_j \in T$. Sečtením přes všechna n skutečně dostaneme vztah (5.1). □

Zbývá ještě zodpovědět otázku, kdy jsou pravděpodobnosti x_j jediným řešením soustavy rovnic (5.1).

Věta 5.9. V Markovově řetězci s konečně mnoha stavy jsou pravděpodobnosti x_j jediným řešením soustavy (5.1).

Důkaz je uveden v práci [5]. □

Příklad 5.6. Uvažujme náhodnou procházku s absorbujícími stěnami a položme $C = \{s_0\}$. Spočteme pravděpodobnosti x_j $(1 \leq \mathrm{j} \leq a-1)$, že částice vycházející ze stavu *j* (z bodu *j*) bude pohlcena ve stavu 0.

Řešení. Soustava rovnic (5.1) má v tomto případě tvar

$$
\begin{aligned}
&x_1 - q = p x_2, \\
&x_j = p x_{j+1} + q x_{j-1} \quad \text{pro } 2 \leq j \leq a-2, \\
&x_{a-1} = q x_{a-2}.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Dodefinujeme okrajová podmínky:

$$x_0 = 1 \text{ (částice ve stavu 0 už je)}, \tag{5.3}$$

$$x_a = 0 \text{ (částice ze stavu } a \text{ nemůže uniknout).}$$

Soustava rovnic (5.2) je ekvivalentní diferenční rovnici

$$p x_{j+1} - x_j + q x_{j-1} = 0,\ 1 \leq j \leq a-1, \tag{5.4}$$

s okrajovými podmínkami (5.3).

Její řešení budeme hledat ve tvaru $x_j = \lambda^j$, kde λ představují kořeny charakteristické rovnice $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$. Snadno nalezneme: $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Dále rozlišíme dva případy.

a) Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, má charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen rovný 1. Obecné řešení rovnice (5.4) je v tomto případě

$$x_j = A.1^j + jB.1^j = A + jB.$$

Konstanty A, B určíme z okrajových podmínek (5.3): $A = 1,\ B = -\dfrac{1}{a}$.

Výsledné řešení diferenční rovnice má tedy tvar $x_j = 1 - \dfrac{j}{a}$, $1 \le j \le a - 1$.

b) V případě $p \ne q$ je obecné řešení diferenční rovnice (5.4)

$$x_j = A.1^j + B\left(\frac{q}{p}\right)^j .$$

Z okrajových podmínek (5.3) dostaneme:

$$A = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}\ ,\quad B = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a},$$

Výsledné řešení diferenční rovnice je tedy

$$x_j = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^j}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1},\ 1 \le j \le a - 1.$$

Všimněte si analogie mezi řešením této diferenční rovnice a řešením homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Rozdíl je pouze ve tvaru hledaného řešení.

5.5 Aplikace

Markovovy řetězce s diskrétním časem jsou užitečným nástrojem pro zkoumání stachastických systémů, tj. systémů, u nichž dochází v průběhu času k náhodným změnám s určitými pravděpodobnostmi. V následujícím přehledu uvádíme některé z možných aplikací:

- analýza podílu vzájemně si konkurujících subjektů na trhu s výrobky nebo službami (viz např. [11, 14]),
- vývoj situace na trhu práce, kde jednotlivé stavy systému mohou být např. nezaměstnaní, pracovníci ve své profesi, pracovníci v jiné profesi (viz [11]),
- vývoj četnosti nějaké populce, jsou-li známy rychlosti zrodu (narození) a zániku (smrti) v závislosti ne velikosti populace (viz např. [1]),

- vývoj situace při sledování stupně závislosti populace na konzumaci alkoholu nebo drog (viz např. [18]),
- analýza prosté obnovy selhávajících homogenních jednotek, které mají omezenou životnost a pro něž jsou známy pravděpodobnosti selhání v jednotlivých obdobích (viz např. [11]),
- analýza průběhu některých her, u nichž je přechod do vyššího stavu podmíněn dosažením stavu bezprostředně předcházejícího (jako např. u posloupnosti hodů hrací kostkou).

Kontrolní otázky

1. Jak se vytvoří matice pravděpodobností přechodu pro nějakou uzavřenou množinu stavů Markovova řetězce?
2. Co je třeba udělat nejdříve, chcete-li použít větu 5.3 pro rozhodování o rozložitelnosti Markovova řetězce s konečně mnoha stavy?
3. Kdy existuje stacionární rozdělení v Markovově řetězci?
4. Jak se využívá věta 5.6 pro klasifikaci stavů nerozložitelného Markovova řetězce?
5. Jsou možné v Markovově řetězci přechody ze stavu trvalého do stavu přechodného?
6. Jak byste zobecnili větu 5.3 pro Markovův řetězec s více uzavřenými množinami stavů?

Kontrolní úkoly

1. Jak je to s dosažitelností stavů v případě náhodné procházky s odrážejícími stěnami?

2. Rozhodněte, zda je Markovův řetězec s přechodovou maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

rozložitelný nebo nerozložitelný.

3. Rozhodněte, zda je Markovův řetězec s přechodovou maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rozložitelný nebo nerozložitelný.

4. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení, případně proveďte klasifikaci stavů tohoto řetězce.

5. Uvažujte model havarijního pojištění. Nechť pojišťovna používá tři kategorie pojistného pro pojištění automobilů: s_1 - základní pojistné, s_2 - bonus 30 %, s_3 - bonus 50 %. Průběh platby lze modelovat Markovovým řetězcem s množinou stavů $\{s_1, s_2, s_3\}$ a výchozím stavem s_1. Přechody o kategorii výše nastávají při beznehodovém provozu automobilu. Nastane-li alespoň jedna nehoda, je pojištěný zařazen v následujícím roce do stavu s_1. Jestliže se počet nehod v daném roce řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ, má matice pravděpodobností přechodu tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1-e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení.

6. Uvažujte náhodnou procházku s absorbujícími stěnami a položme $C = \{a\}$. Spočtěte pravděpodobnosti x_j $(1 \le j \le a-1)$, že částice vycházející ze stavu *j* bude pohlcena ve stavu *a*.

7. Je dán Markovův řetězec s množinou stavů $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť počáteční stav je s_2. Určete pravděpodobnost, že systém někdy skončí ve stavu s_1.

Korespondenční úkol č. 5. Pokuste se definovat nějaký Markovův řetězec s diskrétními stavy a diskrétním časem a provést jeho podrobnější analýzu.

Vaše práce by měla mít následující strukturu:

a) definice Markovova řetězce,
b) podrobnější popis stavů tohoto Markovova řetězce a přechodových pravidel,
c) sestavení matice pravděpodobností přechodu,
d) klasifikace stavů řetězce,
e) určení stacionárního rozdělení (pokud existuje),
f) interpretace získaných teoretických výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- dosažitelnost stavu,
- uzavřená množina stavů,
- nerozložitelný Markovův řetězec,
- rozložitelný Markovův řetězec,
- stavy téhož typu,
- stacionární rozložení,
- rozklad množiny stavů,
- absorpce uzavřenou množinou trvalých stavů.

Shrnutí

V této kapitole zavádíme další pojmy teorie Markovových řetězců s diskrétním časem (dosažitelnost stavu, uzavřená množina stavů, stacionární rozdělení, rozklad množiny stavů) a uvádíme postupy pro výpočet stacionárního rozdělení a pravděpodobnosti absorpce v nějaké uzavřené množině trvalých stavů.

6 MARKOVOVY ŘETĚZCE S OCENĚNÍM PŘECHODŮ

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte význam Markovových řetězců s oceněním přechodů,
- naučíte se počítat očekávaný výnos, resp. diskontovaný očekávaný výnos, Markovova řetězce za dané období,
- naučíte se aplikovat teoretické poznatky na řešení konkrétních úloh.

Klíčová slova: ergodické Markovovy řetězce, ocenění přechodu, očekávaný výnos Markovova řetězce za dané období, diskontní faktor, diskontovaný očekávaný výnos Markovova řetězce za dané období.

V této kapitole se budeme zabývat výhradně ergodickými Markovovými řetězci s diskrétním časem, přitom budeme vyházet z prací [5, 19]. Při výpočtech očekávaných výnosů daného řetězce budeme s výhodou využívat maticových operací. Zopakujte si proto základy maticového počtu, abyste mohli snáze aplikovat získané vědomosti v praxi.

6.1 Markovovy řetězce s oceněním přechodů

Výklad začneme definicí ergodického Markovova řetězce.

Ergodický Markovův řetězec

Definice 6.1. **Markovův řetězec** se nazývá ergodický, jestliže je nerozložitelný, má konečně mnoho stavů a všechny jeho stavy jsou ergodické, tj. trvalé nenulové a neperiodické.

Ocenění přechodu

Uvažujme ergodický Markovův řetězec s N stavy, tj. s množinou stavů $S=\{s_{1,}, s_2,..., s_N\}$, ve zkratce $\{1,2,...,N\}$. Každému přechodu ze stavu s_i do stavu s_i je přiřazeno **ocenění přechodu** (zisk nebo ztráta) $r_{ij}, i,j \in S,$ které se vztahuje na jednotku času (jedno období).

K určení Markovova řetězce s oceněním přechodů je třeba zadat:

- množinu stavů,
- matici pravděpodobností přechodů (stochastickou matici typu $N \times N$),
- matici ocenění přechodů $R=\{\, r_{ij} \}$ (kvadratickou matici $N \times N$).

Poznámka. Prvky matice R mohou nabývat libovolných konečných hodnot; kladné hodnoty znamenají zisk, záporné ztrátu.

Očekávaný výnos přechodu

Očekávaný výnos spojený s realizací **přechodů** ze stavu s_i za jednotku času (jedno období) je zřejmě

$$q_i = \sum_{j \in S} r_{ij} p_{ij}, \quad 1 \le i \le N, \tag{6.1}$$

kde p_{ij} je pravděpodobnost přechodu ze stavu s_i do stavu s_i.

Očekávaný výnos realizace nějaké dané posloupnosti přechodů $\{ X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n \}$ je $r_{ii_1} + r_{i_1 i_2} + \ldots + r_{i_n - 1, i_n}$ a pravděpodobnost této realizace je $p_i p_{ii_1} \ldots p_{i_n - 1, i_n}$.

Z uvedeného lze určit očekávaný výnos posloupnosti n přechodů ze stavu s_i (očekávaný výnos za n období). Nechť $v_i(n)$ značí očekávaný výnos přechodů ze stavu s_i za n období. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} v_i(n) &= \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} \left(r_{ij_1} + r_{j_1 j_2} + \ldots + r_{j_n - 1 j_n} \right) p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_n - 1 j_n} = \\ &= \sum_{j_1} p_{ij_1} \left[r_{ij_1} + \sum_{j_2} \ldots \sum_{j_n} \left(r_{j_1 j_2} + \ldots + r_{j_n - 1 j_n} \right) \right] p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_n - 1 j_n} = \\ &= q_i + \sum_{j_1} p_{ij_1} v_{j_1}(n-1), \qquad 1 \le i \le N,\ n \ge 2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Věta 6.1. Pro očekávaný výnos Markovova řetězce (procesu) za n období platí rekurentní vztah

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1), \qquad n \ge 1, \tag{6.3}$$

kde $\mathbf{q} = \mathbf{v}(1)$ je sloupcový vektor o složkách $\left(q_i,\ 1 \le i \le N\right)$, který představuje očekávaný výnos za jedno období, a $\mathbf{v}(n)$ sloupcový vektor o složkách $\left(v_i(n),\ 1 \le i \le N\right)$.

Důkaz. Vztah (6.3) představuje maticový zápis vztahu (6.2) pro $n > 2$. Jestliže položíme $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, bude uvedený vztah platit i pro $n = 1$. □

Poznámka. V některých učebních textech se namísto „očekávaný výnos“ používá spojení „střední hodnota očekávaného výnosu“.

Opakovaným použitím rekurentního vzorce (6.3) dostaneme

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\left(\mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-2)\right) = \ldots = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^k \mathbf{q}. \tag{6.4}$$

Právě uvedený vztah není pro praktické výpočty příliš vhodný. Proto se v odborné literatuře objevují některé aproximace tohoto vztahu platné pro velké hodnoty n $(n \to \infty)$.

Věta 6.2. Pro očekávaný výkon Markovova řetězce za n období $(n \to \infty)$ platí

$$\mathbf{v}(n) = n\mathbf{P}^{\infty}\mathbf{q} + \mathbf{A}\mathbf{q} + o\left(\rho^{n}\right), \quad \rho < 1, \tag{6.5}$$

kde $\mathbf{P}^{\infty}$ je kvadratická matice typu $N \times N$), jejíž každý řádek obsahuje složky vektoru stacionárního rozdělení a $\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{k} - \mathbf{P}^{\infty}\right)$.

Důkaz.

Vztah (6.4) lze upravit takto:

$$\mathbf{v}(n) = n\mathbf{P}^{\infty}\mathbf{q} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathbf{P}^{k} - \mathbf{P}^{\infty}\right)\mathbf{q} = n\mathbf{P}^{\infty}\mathbf{q} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{k} - \mathbf{P}^{\infty}\right)\mathbf{q} - \sum_{k=n}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{k} - \mathbf{P}^{\infty}\right)\mathbf{q}. \tag{6.5}$$

Řada matic $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{k} - \mathbf{P}^{\infty}\right)$ má konečný součet, protože je majorizována geometrickou řadou $\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{k}$, kde $\rho < 1$. Poslední člen ve výrazu (6.5) představuje n-tý zbytek řady $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}^{k} - \mathbf{P}^{\infty}\right)$ vynásobený $\mathbf{q}$, proto je tento člen nekonečně malá veličina řádu $o\left(\rho^{n}\right)$. □

Jestliže řádky matice $\mathbf{A}$ označíme jako $\mathbf{a}_i^T$, řádky matice $\mathbf{P}^{\infty}$ jako $\boldsymbol{\pi}^T$ a zavedeme označení $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{q} = c$, $\mathbf{a}_i^T = b_i$, můžeme vztah (6.4) zapsat ve tvaru

$$v_i(n) \approx nc + b_i, \quad 1 \le i \le N. \tag{6.6}$$

kde symbol ≈ označuje zanedbání zbytku $o\left(\rho^{n}\right)$.

Příklad 6.1 (viz [5]). Nechť je dán Markovův řetězec se dvěma stavy a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

a maticí ocenění přechodů

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme očekávané výnosy za n období (časových jednotek).

Řešení. Nejprve vypočteme mocniny $\mathbf{P}^{k}$. Charakteristický polynom matice $\mathbf{P}$ je

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1/1 & -1/2 \\ -2/5 & \lambda - 3/5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11/10\,\lambda + 1/10$$

a jeho charakteristická čísla jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1/10$. Po dosazení do Perronova vzorce (4.2) dostaneme

$$\mathbf{P}^k = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{10^k}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}^\infty = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^\infty = \frac{1}{10^k}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dále spočteme

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^\infty\right) = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{10}{81}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix},\ c = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 1,\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Nakonec po dosazení do vztahu (6.6) dostaneme

$$v_1(n) \approx n + \frac{50}{9},\ v_2(n) \approx n - \frac{40}{9}.$$

Poznámky.

1) Matici $\mathbf{P}^\infty$ můžeme určit dvěma postupy: buď z matice $\mathbf{P}^k$ limitním přechodem pro $k \to \infty$, nebo spočtením stacionárního rozdělení uvažovaného Markovova řetězce.

2) Matice $\mathbf{A}$ je dána součtem nekonečné mocninné řady s kvocientem $1/10$.

6.2 Markovovy řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nejprve si připomeneme některé základní pojmy finanční matematiky. Označme symbolem α úrokovou míru. To znamená, že jednotkový kapitál na počátku úrokovacího období vzroste na částku $1+\alpha$ na konci úrokovacího období. Naopak, jednotková částka splatná na konci úrokovacího období má na jeho začátku hodnotu $\beta = \dfrac{1}{1+\alpha}$.

Diskontní faktor

Diskontováním se nazývá přepočítávání částek splatných na konci prvního, druhého, ... období na jejich počáteční hodnotu; faktor β se nazývá **diskontní faktor**.

Budeme opět vycházet z ergodického Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu **P** a maticí ocenění přechodů **R**, přitom však všechna ocenění diskontujeme k počátečnímu okamžiku. To znamená, že přechod ze stavu s_i v čase **n** do stavu s_j v čase $n+1$ oceníme částkou $\beta^n r_{ij}$, kde β je daný diskontní faktor ($0<\beta<1$). Pro očekávaný diskontní výnos Markovova řetězce za n období při počátečním stavu s_i pak dostaneme

$$
\begin{aligned}
v_i(n) &= \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \left(r_{ij_1} + \beta r_{j_1 j_2} + \dots + \beta^{n-1} r_{j_{n-1} j_n} \right) p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} = \\
&= \sum_{j_1} r_{ij_1} p_{ij_1} + \beta \sum_{j_1} p_{ij_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} \left(r_{j_1 j_2} + \beta r_{j_2 j_3} + \dots + \beta^{n-2} r_{j_{n-1} j_n} \right) p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} \dots p_{j_{n-1} j_n} \\
&= q_i + \beta \sum_{j_1} p_{ij_1} v_{j_1}(n-1), \qquad 1 \le i \le N,\ n \ge 1.
\end{aligned}
$$

Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 6.3 (viz [5]). Pro diskontovaný očekávaný výnos Markovova řetězce za n období platí rekurentní vztah

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1), \quad n \ge 1, \tag{6.7}$$

kde β je diskontní faktor a význam ostatních symbolů je stejný jako ve větě 6.1.

Opakovaným použitím vztahu (6.7) dostaneme

$$\mathbf{v}(n) == \mathbf{q} + \beta \mathbf{P}\left(\mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-2)\right) = \ \dots \ = \sum_{k=1}^{n-1} \beta^k \mathbf{P}^k \mathbf{q}, \ n \ge 1.$$

Právě uvedený vztah není také příliš vhodný pro praktické výpočty. V následující větě uvedeme aproximaci tohoto vztahu platnou pro velké hodnoty n $(n \to \infty)$.

Věta 6.2. Pro diskontovaný očekávaný výnos Markovova řetězce za n období $(n \to \infty)$ platí

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{v} + o\left(\beta^n\right),$$

kde **v** je jednoznačně určeno řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}. \tag{6.8}$$

Důkaz tohoto tvrzení je uveden v práci [5]. □

Poznámka. Soustava (6.8) je tvořena N rovnicemi o N neznámých. Její determinat je různý od nuly, takže výsledné hodnoty složek v_i vektoru **v** jsou jediným řešením soustavy.

Příklad 6.2. Vyjdeme ze zadání příkladu 6.1 a položíme $\beta = \frac{1}{2}$ a určíme ošekávaný diskontovaný výnos uvažovaného Markovova řetězce za n období $(n \to \infty)$.

Řešení. Z dat uvedených v příkladu 6.1 nejprve spočteme

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Pv} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} v_1 & \frac{1}{2} v_2 \\ \frac{2}{5} v_1 & \frac{3}{5} v_2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do soustavy (6.8) dostaneme

$$v_1 = 6 + \frac{1}{4} v_1 + \frac{1}{4} v_2,$$
$$v_2 = -3 + \frac{1}{5} v_1 + \frac{3}{10} v_2.$$

Její řešení má tvar: $v_1 = \frac{138}{19}$ a $v_2 = \frac{-42}{19}$.

6.3 Aplikace

Markovovy řetězce s oceněním přechodů mají celou řadu aplikací především v ekonomické oblasti. Pro ilustraci uvedeme příklad převzatý ze skript [19].

Příklad 6.3. Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 1) nebo neúspěšný (stav 2), přičemž předpokládá, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období závisí jen na tom, jak se výrobek prodával v bezprostředně předcházejícím období. Z toho je zřejmé, že dynamika prodeje je popsána Markovovým řetězcem. Předpokládejme, že matice pravděpodobností přechodů je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

a odpovídající matice ocenění přechodů

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Určíme očekávaný výnos z prodeje uvažovaného výrobku za n období pro velké hodnoty n ($n \to \infty$).

Řešení. Vyjdeme ze vztahu (6.9). Charakteristický polynom matice **P** má tvar

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{8}{10} & -\frac{2}{10}\\ -\frac{3}{10} & \lambda-\frac{7}{10}\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{15}{10}+\frac{5}{10},$$

její charakteristická čísla jsou $\lambda_1=1$ a $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

Po dosazení do Perronova vzorce dostaneme

$$\mathbf{P}^k=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6 & 4\\ 6 & 4\end{pmatrix}+\frac{1}{2^k}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -4\\ -6 & 6\end{pmatrix},\ \mathbf{P}^\infty=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6 & 4\\ 6 & 4\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^k-\mathbf{P}^\infty=\frac{1}{2^k}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -4\\ -6 & 6\end{pmatrix}.$$

Dále postupně spočteme

$$\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}^k-\mathbf{P}^\infty\right)=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\begin{pmatrix}4 & -4\\ -6 & 6\end{pmatrix}=\frac{2}{10}\begin{pmatrix}4 & -4\\ -6 & 6\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}=\begin{pmatrix}v_1(1)\\ v_2(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -11\end{pmatrix},\ c=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ -11\end{pmatrix}=1,\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}16\\ -24\end{pmatrix}.$$

Nakonec po dosazení do vztahu (6.6) dostaneme pro hledané očekávané výnosy

$$v_1(n)\approx n+16,\ v_2(n)\approx n-24.$$

Kontrolní otázky

1. Čím je určen Markovův řetězec s oceněním přechodů?
2. Jak je definován očekávaný výnos Markovova řetězce za n období (n časových jednotek)?
3. Proč nejsou vztahy (6.4) a (6.7) příliš vhodné pro praktické výpočty?
4. Jak se definuje diskontní faktor?

Kontrolní úkoly

1. Provoz výrobní linky se může nacházet ve dvou stavech: v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním provozu uvažované linky byly získány informace o pravděpodobnostech přechodů mezi jednotlivými stavy a výnosech, resp. ztrátách, spojených s těmito přechody. Nechť pro příslušné matice **P** a **R** platí:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Určete očekávaný výnos takového Markovova řetězce za n období pro velké hodnoty n ($n\to\infty$).

2. Použijte data z kontrolního úkolu 1 a položte $\beta = 1/2$. Určete diskontovaný očekávaný výnos za n období pro velké hodnoty n ($n \to \infty$).

Korespondenční úkol č. 6. Pokuste se definovat nějaký ergodický Markovův řetězec se dvěma stavy a oceněním přechodů. Provéďte jeho podrobnější analýzu.

Vaše práce by měla mít následující strukturu:

a) definice Markovova řetězce,

b) podrobnější popis stavů tohoto Markovova řetězce a přechodových pravidel včetně jejich ocenění,

c) sestavení matice pravděpodobností přechodu a matice ocenění přechodů,

d) určení očekávané výnosu Markovova řetězce za n období pro velké hodnoty n,

e) interpretace získaných teoretických výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- ergodický Markovův řetězec,
- ocenění přechodu,
- očekávaný výnos Markovova řetězce za n období,
- diskontní faktor,
- diskontovaný očekávaný výnos Markovova řetězce za n období.

Shrnutí

V této kapitole se uvažují výhradně ergodické Markovovy řetězce a zavádí se pojem ocenění přechodu. tj. kvantitativní ocenění výnosu (zisku, nebo ztráty) spojeného s daným přechodem. Dále se odvozují vztahy pro výpočet očekávaného výnosu a diskontovaného očekávaného výnosu Markovova řetězce za n období včetně aproximací těchto výnosů pro $n \to \infty$. Zmíněné vztahy nacházejí uplatnění především v ekonomické oblasti.

7 KONEČNÉ MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie (Markovův řetězec se spojitým časem, Chapmanova-Kolmogorovova rovnost, pravděpodobnost přechodu, intenzity přechodu, limitní rozdělení),
- naučíte se konstruovat matici intenzit přechodu,
- naučíte se počítat pravděpodobnosti stavů v daném čase a limitní pravděpodobnosti.

Klíčová slova: Markovův řetězec se spojitým časem, množina stavů, počáteční rozdělení pravděpodobností, soustava matic pravděpodobností přechodů, Chapmanova-Kolmogorovova rovnost, konečné Markovovy řetězce se spojitým časem, celková intenzita přechodu, dílčí intenzita přechodu, Kolmogorovovy diferenciální rovnice, limitní pravděpodobnosti.

Úvod této kapitoly je věnován obecně Markovovým řetězcům s diskrétními stavy a spojitým časem. Následuje rozsáhlá část zabývající se speciálně problematikou Markovových řetězců s konečnou množinou stavů. Doporučujeme Vám, abyste učinili vše pro pochopení teoretických základů, bez nichž nedokážete vyřešit předložené konkrétní úkoly, ani korespondenční úkol, který následuje za poslední kapitolou.

7.1 Definice Markovova řetězce se spojitým časem

Markovův řetězec se spojitým časem

Definice 7.1. Soustava celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$, kde parametr t nabývá hodnot z množiny všech nezáporných reálných čísel, se nazývá **Markovův řetězec se spojitým časem**, jestliže platí

$$P\left(X_{t+h} = j \mid X_t = i, X_{t_r} = i_r, \, ..., X_{t_1} = i_1\right) = P\left(X_{t+h} = j \mid X_t = i\right)$$

pro všechna $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ ... \ \leq t_r < t < t+h$ a všechna přirozená čísla $i_1, i_2, \, ..., i_r, i, j$. Podmíněné pravděpodobnosti $P\left(X_{t+h} = j \mid X_t = i\right)$ se nazývají **pravděpodobnosti přechodu** a označují zpravidla $p_{ij}\left(t, t+h\right)$.

Pravděpodobnosti přechodu

Homogenní MŘ

Jestliže pravděpodobnosti přechodu závisejí pouze na h a nikoliv na t, značí se $p_{ij}\left(h\right)$ a příslušný **Markovův řetězec** se nazývá **homogenní**.

Nehomogenní MŘ

Jestliže tyto pravděpodobnosti závisejí na t i h, jedná se o **nehomogenní Markovův řetězec**.

V dalším výkladu se omezíme pouze na homogenní Markovovy řetězce. Časovou proměnnou budeme označovat písmeny t, resp. s, namísto písmena h.

Markovův řetězec se spojitým časem je určen:

Množina stavů

- **množinou stavů** $\{s_1, s_2, \ldots,\}$,

Počáteční rozdělení MŘ

- řádkovým vektorem **počátečního rozdělení pravděpodobností** $\mathbf{p}(0) = \left(p_1(0) \quad p_2(0) \quad \ldots\right)$, $\sum_{\nu} p_\nu(0) = 1$,

Soustava matic pravdě-podobností přechodu

- **soustavou matic pravděpodobností přechodu** $\{\mathbf{P}(t)\}_{t\geq 0}$, přičemž $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jednotková matice).

Pravděpodobnostní rozdělení Markovova řetězce v libovolném čase t se spočte, stejně jako v případě řetězců s diskrétním časem, pomocí vztahu

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t).$$

7.2 Chapmanova-Kolmogorovova rovnost

Stejně jako pro Markovovy řetězce s diskrétním časem platí i v případě Markovových řetězců se spojitým časem následující tvrzení.

Věta 7.1. Pro všechna $s \geq 0$, $t \geq 0$ a libovolná přirozená čísla i, j platí $p_{ij}(s+t) = \sum_{\nu} p_{i\nu}(s) p_{\nu j}(t)$

nebo v maticovém tvaru $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$.

Důkaz. Využijeme věty o úplné pravděpodobnosti. Označme jevy $A = \{X_{t_0+s+t} = j\}$, $B_\nu = \{X_{t_0+s} = \nu\}$, $C = \{X_{t_0} = i\}$. Podle uvedené věty postupně dostaneme

$$P\left(X_{t_0+s+t} = j \mid X_{t_0} = i\right) = \sum_{\nu} P\left(X_{t_0+s} = \nu \mid X_{t_0} = i\right) P\left(X_{t_0+s+t} = j \mid X_{t_0+s} = \nu, X_{t_0} = i\right).$$

Z definice Markovova řetězce však plyne

$$P\left(X_{t_0+s+t} = j \mid X_{t_0+s} = \nu, X_{t_0} = i\right) = P\left(X_{t_0+s+t} = j \mid X_{t_0+s} = \nu\right),$$

a dosazením do předcházejícího vztahu dostaneme dokazované tvrzení. □

Chapmanova-Kolmogorovova rovnost

Právě uvedený vztah se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnost**. Této rovnosti se v praxi využívá k dokazování různých vlastností pravděpodobností přechodu.

Naopak lze dokázat, že ke každému pravděpodobnostnímu vektoru $\mathbf{p}$ a každému systému stochastických matic $\{\mathbf{P}(t)\}_{t\geq 0}$, které splňují Chapmanovu-Kolmogorovovu rovnost, existuje homogenní Markovův řetězec, jehož počáteční rozdělení je dáno vektorem $\mathbf{p}$ a systém matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\mathbf{P}(t)\}_{t\geq 0}$.

7.3 Konečné Markovovy řetězce se spojitým časem

V dalším výkladu budeme předpokládat:

- množina stavů Markovova řetězce je konečná $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$,
- pravděpodobnosti přechodu jsou spojité v bodě (čase) 0 zprava, tj. $\lim\limits_{t\to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ pro všechna i, j. (7.1)

Věta 7.2. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ jsou stejnoměrně spojité v intervalu $0 \leq t < +\infty$.

Důkaz. Podle Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti platí pro každé $h > 0$

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{\nu=1}^{N} p_{i\nu}(t) p_{\nu j}(h), \text{ tj.}$$

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{\nu\neq j} p_{i\nu}(t)\, p_{\nu j}(h) - p_{ij}(t)\big(1 - p_{jj}(h)\big),$$

$$\left|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)\right| \leq \sum_{\nu\neq j} p_{\nu j}(h) + \big(1 - p_{jj}(h)\big).$$

Pravá strana uvedené nerovnosti „jde“ pro $h \to 0+$ podle předpokladu (7.1) k nule a přitom nezávisí na *t*. Podobně lze postupovat i v případě $\left|p_{ij}(t) - p_{ij}(t-h)\right|$. □

Věta 7.3. Pro každé přirozené $1 \leq i \leq N$ a pro všechna reálná $t \geq 0$ platí

$$p_{ii}(t) > 0.$$

Důkaz. Z předpokladu (7.1) plyne, že $p_{ii}(t) > 0$ pro všechna dostatečně malá *t*, např. pro $0 \leq t \leq \delta$. Ze zřejmé nerovnosti

$$p_{ii}(t) \geq p_{ii}(\delta)\, p_{ii}(t-\delta)$$

následně vyplývá, že $p_{ii}(t) > 0$ také pro všechna $\delta \leq t \leq 2\delta$ atd. □

Věta 7.4. Pro každou dvojici přirozených čísel $i \neq j,\ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N,$ platí buď $p_{ij}(t) \equiv 0$ pro všechna reálná $t \geq 0$ anebo $p_{ij}(t) > 0$ pro všechna reálná $t > 0$.

Důkaz naleznete ve skriptech [6]. □

Věty 7.3 a 7.4 nám umožňují zavést klasifikaci stavů i pro Markovovy řetězce se spojitým časem.

7.4 Klasifikace stavů

Uvažujme Markovův řetězec s diskrétním časem $t_0 > 0, 2t_0, 3t_0, \ldots$ a s maticí pravděpodobností přechodu po jednom kroku $\mathbf{P}(t_0)$. Tato matice rozhoduje o nerozložitelnosti nebo rozložitelnosti řetězce, v případě rozložitelného řetězce jednoznačně určuje rozklad množiny všech stavů na disjunktní uzavřené (a nerozložitelné) množiny trvalých stavů a množinu stavů přechodných a také případnou periodicitu stavů. Přitom nezáleží na konkrétních numerických hodnotách prvků této matice, ale pouze na tom, které z nich jsou kladné a které nulové. Uvedená vlastnost se však podle vět 7.2 a 7.3 nemění s hodnotou t_0, tj. klasifikace stavů uvažovaného řetězce je pro všechna $t_0 > 0$ stejná. To je důvod, proč můžeme již zavedenou klasifikaci stavů (viz odstavec 4.5) převzít i pro Markovovy řetězce se spojitým časem.

Pro Markovovy řetězce se spojitým časem platí navíc následující věta.

Věta 7.5. V Markovově řetězci se spojitým časem neexistují stavy periodické.

Důkaz. Pro všechna reálná $t \geq 0$ a pro všechny diagonální prvky matice pravděpodobností přechodu platí $p_{ii}(t) > 0$, takže v Markovově řetězci se spojitým časem nemohou podle kritéria neperiodičnosti (viz odstavec 4.5) existovat periodické stavy. □

7.5 Intenzity přechodu a jejich vlastnosti

V teorii Markovových řetězců se spojitým časem hrají významnou roli intenzity přechodu.

Věta 7.6. Pro každé přirozené $1 \leq i \leq N$ existuje

$$q_i = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} < +\infty.$$

Důkaz je ve skriptech [6]. □

Veličina q_i se nazývá **celková intenzita přechodu ze stavu** s_i.

Celková intenzita přechodu

Věta 7.7. Pro každou dvojici $i \neq j, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N,$ existuje

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t},$$

přičemž platí $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$.

Důkaz je ve skriptech [6]. □

Veličina q_{ij} je **dílčí intenzita přechodu ze stavu** s_i **do stavu** s_j.

Dílčí intenzita přechodu

Poznámka. Pro právě zavedené intenzity přechodu zřejmě platí

$$q_i = -\frac{\mathrm{d}p_{ii}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t \to 0+} \quad \text{pro } 1 \leq i \leq N,$$

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{d}p_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t \to 0+} \quad \text{pro } i \neq j,\ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N.$$

Význam právě zavedených intenzit přechodu je zřejmý z následujících vět, které uvádíme bez důkazu.

Věta 7.8. Je-li $q_i > 0$, pak doba setrvání systému ve stavu s_i (doba od vstupu do stavu s_i do výstupu ze stavu s_i) má exponenciální rozdělení s parametrem q_i a střední hodnotou $1/q_i$.

Věta 7.9. Je-li $q_i > 0$, pak pravděpodobnost toho, že se první přechod z počátečního stavu s_i uskuteční právě do stavu $s_j \neq s_i$, je rovna q_{ij}/q_i.

Zavedeme **matici intenzit přechodu** $\mathbf{Q} = (q_{ij}),\ 1 \leq i, j \leq N,$ v níž q_{ij} pro $i \neq j$ jsou dílčí intenzity přechodu a pro diagonální prvky platí

Matice intenzit přechodu

$$q_{ii} = -q_i = -\sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Tato matice není stochastická, její řádkové součty jsou zřejmě rovny 0.

7.6 Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení

Nejprve odvodíme Kolmogorovovy diferenciální rovnice pro nalezení pravděpodobností $p_{ij}(t)$ pomocí intenzit přechodu q_{ij}. Přitom budeme vycházet ze skutečnosti, že $p_{ij}(t)$ mají spojité derivace (viz např. [6]).

Věta 7.10. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ splňují obě následující soustavy diferenciálních rovnic (zapsané v maticovém tvaru)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Důkaz. Vyjdeme z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti (viz věta 7.1). Jestliže derivujeme tuto rovnost podle proměnné *s* a položíme $s = 0$, dostaneme (s použitím intenzit přechodu)

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{\nu \neq i} q_{i\nu} p_{\nu j}(t) \text{ pro } 1 \leq i, j \leq N.$$

Již dříve jsme ukázali, že platí $q_{ii} = -q_i$, tím je platnost soustavy $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ dokázána. Platnost druhé z uvedených soustav diferenciálních rovnic se dokáže analogicky (derivováním Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti podle proměnné t a položením $t = 0$. □

Kolmogorovovy diferenciální rovnice

Soustavy diferenciálních rovnic (7.2) se nazývají **Kolmogorovovy diferenciální rovnice**. Přitom první soustava se nazývá **retrospektivní** a druhá **prospektivní**.

Věta 7.11. Nechť $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $1 \leq i, j \leq N$, je libovolná matice taková, že

- $q_{ij} > 0$ pro všechna $i \neq j$,
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$.

Pak obě soustavy (7.2) mají jediné řešení vyhovující počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Tato řešení jsou si rovna a reprezentují soustavu matic pravděpodobností přechodu nějakého Markovova řetězce se spojitým časem.

Důkaz naleznete ve skriptech [6]. □

Soustavy (7.2) představují soustavy homogenních lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty. Jejich obecné řešení má zřejmě tvar $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0)\mathrm{e}^{\mathbf{Q}t}$. Proto řešení vyhovující počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ můžeme zapsat ve tvaru $\mathbf{P}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{Q}t}$. Matice $\mathrm{e}^{\mathbf{Q}t}$ se přitom počítá zpravidla pomocí Perronova vzorce (viz vztah (4.2)).

Příklad 7.1. Model práce stroje (viz [19]). Doba bezporuchového provozu stroje je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\alpha$, $\alpha > 0$. Dojde-li k poruše, oprava je zahájena okamžitě, přitom doba opravy je také náhodná veličina s exponenciálním rozdělením a střední hodnotou $1/\beta$, $\beta > 0$. Po dokončení opravy je stroj okamžitě uveden do provozu. Definujme náhodnou veličinu X_t tak, že nabývá hodnotu 0, je-li stroj v čase t v provozu, a hodnotu 1, je-li stroj v tomto čase opravován, pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem a dvěma stavy: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$. Matice intenzit přechodu má zřejmě tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Určíme pravděpodobnosti přechodu pomocí Perronova vzorce.

Řešení. Charakteristická čísla matice $\mathbf{Q}$ jsou: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(\alpha + \beta)$. Snadno spočteme

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \lambda(\lambda + \alpha + \beta),$$
$$\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \lambda + \beta & \alpha \\ \beta & \lambda + \alpha \end{pmatrix}.$$

Dále dostaneme

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q})}{\lambda - \lambda_1} = \lambda + \alpha + \beta,$$
$$\psi_2(\lambda) = \frac{\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q})}{\lambda - \lambda_2} = \lambda.$$

Dosadíme do Perronova vzorce a upravíme

$$\mathbf{P}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{Q}t} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\psi_1(\lambda_1)} \operatorname{adj}(\lambda_1\mathbf{I} - \mathbf{Q}) + \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\psi_2(\lambda_2)} \operatorname{adj}(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{Q}) =$$
$$= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Výpočet pravděpodobností přechodu podle Perronova vzorce je při řešení praktických příkladů velmi náročný. Mnohem snazší je počítat tzv. limitní pravděpodobnosti (viz následující odstavec).

7.7 Limitní pravděpodobnosti

Limitní pravděpodobnosti

Pro nerozložitelné Markovovy řetězce se spojitým časem lze dokázat (viz [Dup2, P+L]), že existují **limitní pravděpodobnosti**

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t), \quad 1 \leq j \leq N,$$

které nezávisejí na výchozím stavu $s_i, 1 \le i \le N,$ jsou vesměs kladné a navíc splňují rovnost $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1.$

Pro výpočet těchto limitních pravděpodobností platí následující věta.

Věta 7.12. Vektor limitních pravděpodobností $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \, ..., \, \pi_N)$ je řešením soustavy algebraických rovnic

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i q_{ij} = 0, \text{ tj. v maticovém tvaru } \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad (7.3)$$

s podmínkou $\pi_j > 0, \; 1 \le j \le N, \; \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1.$

Důkaz. Vektor $\boldsymbol{\pi}$ představuje zřejmě stacionární rozdělení pro Markovův řetězec s diskrétním časem $h, 2h, 3h, \, ...$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(h), h > 0$ (viz odstavec 4.7), což znamená $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}(h), \; h > 0.$ Odtud dostaneme $\boldsymbol{\pi}\left(\dfrac{\mathbf{I} - \mathbf{P}(h)}{h}\right) = \mathbf{0}, \; h > 0.$ Limitním přechodem pro $h > 0$ nakonec získáme vztah (7.3). □

Příklad 7.2. Nechť matice intenzit přechodu nějakého konečného Markovova řetězce se spojitým časem má tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -q & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & q & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -q & q \\ q & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -q \end{pmatrix}.$$

Určíme limitní pravděpodobnosti takového řetězce.

Řešení. Soustava rovnic (7.3) má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} &-\pi_1 q + \pi_N q = 0, \\ &\pi_1 q - \pi_2 q = 0, \\ &\pi_2 q - \pi_3 q = 0, \\ &\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,, \\ &\pi_{N-1} q - \pi_N q = 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy snadno dostaneme $\pi_1 = \pi_2 = \, ... = \pi_N$. Dále použijeme podmínku $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1.$ Z ní ovšem okamžitě plyne výsledek

$$\pi_j = \frac{1}{N} \text{ pro } 1 \le j \le N.$$

7.8 Aplikace konečných řetězců se spojitým časem

Předpokládejme, že umíme určit matici intenzit přechodu $\mathbf{Q}$. Pak se v aplikacích řeší úlohy dvojího typu:

a) nalezení absolutních pravděpodobností $p_j(t)$ jednotlivých stavů v čase t při zadaném počátečním stavu s_i,

b) nalezení limitních pravděpodobností π_j.

V prvním případě řešíme Kolmogorovovy diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $p_i(0)=1,\ p_j(0)=0$ pro $j \neq i$. Hledané pravděpodobnosti $p_j(t)$ představují vlastně i-tý řádek matice $\mathbf{P}(t)$. Ve druhém případě se řeší soustava příslušných lineárních algebraických rovnic (7.3).

Ve skriptech [6,19] jsou popsány aplikace v následujících oblastech:

- hromadná obsluha strojů,
- odběr proudu,
- provoz telefonní ústředny,
- reakční kinetika.

V tomto odstavci rozebereme podrobně příklad reálné situace (hromadná obsluha strojů), který lze jednoduše popsat pomocí konečného Markovova řetězce se spojitým časem.

Příklad 7.3. Předpokládejme, že v nějaké dílně pracuje celkem N strojů stejného typu. V libovolném okamžiku může nastat porucha kteréhokoliv stroje, a tedy potřeba jej opravit. Dále předpokládejme, že se o stroje stará r opravářů, přičemž se na opravě podílí vždy jen jeden opravář. Stroj se v případě poruchy začne okamžitě opravovat, pokud je ovšem některý z opravářů volný. Porouchá-li se stroj v okamžiku, kdy jsou všichni opraváři zaměstnáni, musí se čekat, až se některý z nich uvolní.

Stroj, který pracuje v čase t, se během krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta a $o(h)$ představuje nekonečně malou veličinu řádu vyššího než h, pro níž platí $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Stroj, jenž se v čase t opravuje, bude uveden do provozu během časového intervalu $(t, t+h)$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, kde $\mu > 0$ je konstanta.

Předpokládejme, že v čase t je mimo provoz právě j strojů. Počet strojů mimo provoz je zřejmě náhodná veličina s binomickým rozdělením. Proto platí:

- Pravděpodobnost $p_{j,j+1}(h)$, že se počet strojů, které nepracují, zvětší během intervalu $(t,t+h)$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, jež v čase t pracují, tj.

$$\binom{N-j}{1}\left(\lambda h+o(h)\right)^{1}\left(1-\lambda h+o(h)\right)^{N-j-1}\approx (N-j)\lambda h+o(h),\ 0\le j<N.$$

- Pravděpodobnost $p_{j,j-1}(h)$, že se jejich počet v intervalu $(t,t+h)$ zmenší o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které jsou v čase t opravovány, tj.

$$\binom{j}{1}\left(\mu h+o(h)\right)^{1}\left(1-\mu h+o(h)\right)^{j-1}\approx j\mu h+o(h),\ 1\le j\le r,$$

  resp.

$$\binom{r}{1}\left(\mu h+o(h)\right)^{1}\left(1-\mu h+o(h)\right)^{r-1}\approx r\mu h+o(h),\ r<j\le N.$$

- Pravděpodobnost, že se počet nepracujících strojů změní v intervalu $(t,t+h)$ o více než ± 1, je řádově $o(h)$.

Označme $X(t)$ počet nepracujících strojů v čase t. Pak $\{X_t, t\ge 0\}$ je konečný Markovův řetězec se spojitým časem. Pro příslušné dílčí intenzity přechodu (viz věta 5.6 a následující poznámka) dostaneme

$$\begin{aligned}
&q_{j,j+1}=(N-j)\lambda,\ 0\le j<N,\\
&q_{j,j-1}=j\mu,\ 1\le j\le r,\\
&q_{j,j-1}=r\mu,\ r<j\le N,\\
&q_{jk}=0 \text{ ve všech ostatních případech.}
\end{aligned}$$

Celkové intenzity přechodu určíme analogicky s využitím věty 7.6 a poznámky následující za větou 7.7

$$\begin{aligned}
&q_0=N\lambda,\\
&q_j=(N-j)\lambda+j\mu,\ 1\le j\le r,\\
&q_j=(N-j)\lambda+r\mu,\ r<j<N,\\
&q_N=r\mu.
\end{aligned}$$

Tím je plně určena matice intenzit přechodu $\mathbf{Q}$ pro uvažovaný Markovův řetězec, protože platí $q_{jj}=-q_j$ pro všechna $j=0,1,\ldots,N$. Spočteme příslušné limitní pravděpodobnosti. Soustava lineárních algebraických rovnic (7.3) má tvar

$$
\begin{aligned}
&-N\lambda\pi_0+\mu\pi_1=0,\\
&(N-j+1)\lambda\pi_{j-1}-\big((N-j)\lambda+j\mu\big)\pi_j+(j+1)\mu\pi_{j+1}=0,\ 1\le j<r,\\
&(N-j+1)\lambda\pi_{j-1}-\big((N-j)\lambda+r\mu\big)\pi_j+r\mu\pi_{j+1}=0,\ r\le j<N,\\
&\lambda\pi_{N-1}-r\mu\pi_N=0.
\end{aligned}
$$

Řešením uvedené soustavy dostaneme

$$
\begin{aligned}
\pi_j&=\binom{N}{j}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\pi_0,\ 1\le j<r,\\
\pi_j&=\frac{N(N-1)\ \dots\ (N-j+1)}{r!\ r^{j-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\pi_0,\ r\le j\le N.
\end{aligned}
$$

Doporučujeme Vám, abyste uvedenou soustavu lineárních algebraických rovnic samostatně vyřešili. Není to tak jednoduché, jak to na první pohled vypadá.

Hodnota π_0 se určí z podmínky $\sum_{j=0}^{N}\pi_j=1$.

Kontrolní otázky

1. K čemu slouží Chapmanova-Kolmogorovova rovnost?
2. Jaké jsou základní vlastnosti pravděpodobností přechodu v případě Markovových řetězců se spojitým časem?
3. Co platí o klasifikaci stavů Markovova řetězce se spojitým časem?
4. Jak se určují intenzity přechodu?
5. Jak se postupuje při řešení Kolmogorovových diferenciálních rovnic?
6. Jak se postupuje při určování limitních pravděpodobností?

Kontrolní úkoly

1. Nechť matice intenzit přechodu nějakého konečného Markovova řetězce se spojitým časem má tvar

$$
\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}
-q & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -q & q & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & -q & q & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -q & q\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Určete limitní pravděpodobnosti takového řetězce, pokud existují. V případě, že limitní pravděpodobnosti neexistují, zdůvodněte proč.

2. Provoz telefonní ústředny. Uvažujte telefonní ústřednu s N linkami. Předpokládejte, že v časovém intervalu $(t, t+h)$ přijde na telefonní ústřednu hovor s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta. Hovory přicházejí na ústřednu nezávisle, přitom pravděpodobnost, že během intervalu $(t, t+h)$ přijdou dva nebo více hovorů, je $o(h)$. Pokud je všech N linek obsazeno, další hovor se ztrácí. Za předpokladu, že doba trvání hovoru je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením (s parametrem $\mu > 0$), je pravděpodobnost ukončení hovoru, který trvá v čase t, v průběhu intervalu $(t, t+h)$ rovna $\mu h + o(h)$.

   Nechť X_t je počet obsazených linek v ústředně v čase *t*. Pak $\{X_t\}_{t \geq 0}$ je zřejmě konečný Markovův řetězec se spojitým časem. Určete matici intenzit přechodu a příslušné limitní pravděpodobnosti.

Korespondenční úkol č. 7. Pokuste se definovat nějaký konečný Markovův řetězec s diskrétními stavy a spojitým časem a provést jeho podrobnější analýzu.

a) Vaše práce by měla mít následující strukturu:
b) definice Markovova řetězce,
c) podrobnější popis stavů tohoto Markovova řetězce a přechodových pravidel,
d) vytvoření matice intenzit přechodu,
e) sestavení soustavy diferenciálních rovnic pro výpočet absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů,
f) řešení této soustavy, resp. určení stacionárního rozdělení (pokud existuje),
g) interpretace získaných teoretických výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- Markovův řetězec se spojitým časem (konečný řetězec),
- Markovův řetězec homogenní,
- Markovův řetězec nehomogenní,
- množina stavů řetězce,
- počáteční rozdělení pravděpodobností,

- soustava matic pravděpodobností přechodu,
- Chapmanova-Kolmogorovova rovnost,
- celková intenzita přechodu,
- dílčí intenzita přechodu,
- matice intenzit přechodu,
- Kolmogorovovy diferenciální rovnice (retrospektivní, prospektivní),
- limitní pravděpodobnosti.

Shrnutí

Tato kapitola je věnována problematice Markovových řetězců s diskrétními stavy a spojitým časem, speciálně konečným Markovovým řetězcům se spojitým časem. Zavádíme v ní postupně základní pojmy teorie (např. množina stavů řetězce, pravděpodobnosti přechodů, vektor počátečního rozdělení pravděpodobností), přičemž některé pojmy z předcházející kapitoly lze převzít (např. rozložitelné a nerozložitelné řetězce, schéma klasifikace stavů). Dále odvozujeme Chapmanovu-Kolmogorovovu rovnost (jako nástroj pro dokazování dalších vlastností Markovových řetězců se spojitým časem). Kolmogorovovy diferenciální rovnice (pro výpočet absolutních pravděpodobností stavů řetězce v daném čase) a vztahy pro určení limitních pravděpodobností.

8 SPOČETNÉ MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte některé odlišnosti spočetných řetězců od řetězců konečných (zejména zavedení stavu $s_{+\infty}$),
- naučíte se řešit Kolmogorovovy diferenciální rovnice pro spočetné Markovovy řetězce,
- naučíte se počítat limitní pravděpodobnosti pro spočetné Markovovy řetězce,
- seznámíte se speciálním případem spočetných Markovových řetězců se spojitým časem Poissonovým procesem a jeho aplikacemi.

Klíčová slova: stav $s_{+\infty}$ (stav s hodnotou procesu $+\infty$), Kolmogorovovy diferenciální rovnice, časově závislá vytvořující funkce $\Pi(s,t)$, limitní pravděpodobnosti, Poissonův proces aplikace Poissonova procesu.

Markovovy řetězce se spojitým časem byly obecně definovány již v kapitole 7. Proto nepřekvapuje, že předpoklady tam vyslovené a vztahy tam odvozené zůstávají v platnosti i pro spočetné řetězce. V této kapitole se budeme zabývat především řešením Kolmogorovových diferenciálních rovnic s využitím aparátu vytvořujících funkcí a výpočtem limitních pravděpodobností. Podstatná část této kapitoly bude věnována Poissonovu procesu a jeho aplikaci v praxi.

8.1 Zvláštnosti spočetných Markovových řetězců

V případě spočetných řetězců nevyplývá z předpokladu spojitosti pravděpodobností přechodu zprava v bodě 0 (viz vztah (7.1)) existence konečných intenzit přechodu ani rovnost mezi celkovou intenzitou přechodu a součtem příslušných dílčích intenzit přechodu. Spočetné řetězce, pro něž uvedené vztahy neplatí, nejsou z praktického hlediska důležité, a proto se omezíme jen na takové spočetné řetězce, pro které platí tvrzení 7.6 a 7.7.

Stav $s_{+\infty}$

Množinu stavů spočetného řetězce doplníme o speciální **stav** $s_{+\infty}$**,** do něhož se systém dostane po vykonání nekonečně mnoha přechodů a v němž pak už setrvá. Je třeba si uvědomit, že pro některé spočetné řetězce může platit $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) < 1,$ pak rozdíl $1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t)$ představuje pravděpodobnost přechodu systému v čase t do stavu $s_{+\infty}$.

8.2 Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení

Pro soustavu Kolmogorovových diferenciálních rovnic platí analogické věty jako v případě konečných řetězců se spojitým časem.

Věta 8.1. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t),\ 1 \le i, j < +\infty,$ ve spočetném řetězci se stavem $s_{+\infty}$ splňují retrospektivní i prospektivní soustavu Kolmogorových diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{Q}\ \mathbf{P}(t), \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t)\ \mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Věta 8.2. Nechť $\mathbf{Q}$ je libovolná nekonečná matice taková, že

- $q_{ij} \ge 0$ pro všechna $i \ne j$,
- $q_{ii} = -\sum_{j \ne i} q_{ij}$.

Pak obě soustavy (8.1) mají totéž jediné řešení vyhovující počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Toto řešení reprezentuje soustavu matic pravděpodobností přechodu nějakého spočetného Markovova řetězce se spojitým časem a se stavem $s_{+\infty}$. Pro pravděpodobnosti přechodu do stavu $s_{+\infty}$ platí $p_{i,+\infty} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t)$.

Základní úlohou je určení absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů v čase t při pevně zvoleném počátečním stavu s_i, tj. určení i-tého řádku matice $\mathbf{P}(t)$. Tyto pravděpodobnosti $p_j(t),\ t > 0,$ jsou pro pevně zvolený počáteční stav s_i rovny $p_{ij}(t)$ a vypočtou se řešením prospektivní soustavy Kolmogorovových diferenciálních rovnic, jež má nyní tvar

$$p_j'(t) = -q_j p_j(t) + \sum_{\nu \ne j} p_\nu(t) q_{\nu j},\ 1 \le j < +\infty, \tag{8.2}$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1,\ p_j(0) = 0$ pro $j \ne i$.

Soustavu (8.2) nekonečně (spočetně) mnoha rovnic můžeme obecně řešit tak, že nejprve nalezneme řešení konečného počtu N rovnic o N neznámých a pak provedeme limitní přechod pro $N \to +\infty$.

V praxi se často setkáváme s takovými spočetnými Markovovými řetězci, v nichž jsou možné pouze přechody z daného stavu do stavů sousedních, tj. z daného stavu s_j do stavu s_{j-1} nebo do stavu s_{j+1}. V takových případech se s výhodou používá **vytvořující funkce** ve tvaru

Vytvořující funkce $\Pi(s,t)$

$$\Pi(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) s^j . \tag{8.3}$$

Vytvořující funkce $\Pi(s,t)$ je konstruována podobně jako funkce definovaná v odstavci 2.1. Je to však funkce dvou proměnných: pomocné reálné proměnné s a času *t*.

Jsou-li intenzity přechodu polynomické funkce v proměnné *j*, můžeme použít následujícího postupu.

1. Nejprve vynásobíme *j*-tou rovnici soustavy (8.2) faktorem s^j a takto upravené rovnice sečteme přes všechna *j*. Tímto postupem dostaneme jedinou lineární parciální diferenciální rovnici pro $\Pi(s,t)$ s počáteční podmínkou ve tvaru $\Pi(s,0) = s^i$.
2. Řešení $\Pi(s,t)$ zmíněné parciální diferenciální rovnice rozvineme v mocninnou řadu v proměnné s. Hledané absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou pak koeficienty „stojící" při s^j.

Další podrobnosti o metodě založené na vytvořující funkci (8.3) uvedeme až při řešení konkrétních příkladů.

8.3 Limitní pravděpodobnosti

Při řešení některých úloh vystačíme pouze s určením limitních pravděpodobností. Pro spočetné Markovovy řetězce se spojitým časem platí následující věta.

Věta 8.3. Pro existenci limitních pravděpodobností $\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ nezávislých na počátečním stavu s_i a splňujících podmínky $\pi_j > 0,\ 1 \le j < +\infty,\ \sum_{j-1}^{\infty} \pi_j = 1,$ je nutné a postačující, aby soustava algebraických rovnic

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i q_{ij} = 0 \text{ nebo v maticovém tvaru } \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

měla právě jedno řešení vyhovující uvedeným podmínkám.

Důkaz je naznačen ve skriptech [6]. □

Je zřejmé, že se pro výpočet limitních pravděpodobností užívá formálně stejné soustavy lineárních algebraických rovnic jako v případě konečných Markovových řetězců se spojitým časem. Jediný rozdíl spočívá v tom, že vektor limitních pravděpodobností $\boldsymbol{\pi}$ i matice intenzit přechodu $\mathbf{Q}$ mají nekonečnou (spočetnou) dimenzi.

8.4 Poissonův proces

V praxi často potřebujeme počítat události téhož typu, které nastávají náhodně v čase s podmínkou, že v nějakém krátkém časovém intervalu $(t, t+h)$ uvažovaná událost nastane s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, přitom nezávisle na t a na počtu událostí, jež nastanou v intervalu $(0, t)$. Dále se předpokládá, že pravděpodobnost výskytu více událostí v intervalu $(t, t+h)$ je nekonečně malá veličina řádu vyššího než *h*, tedy $o(h)$.

Uvedeme nejprve příklady uvažovaných událostí: registrace dopadajících částic kosmického záření vhodným čítačem, počet volání přicházejících na nějakou telefonní ústřednu, počet dopravních nehod registrovaných v nějaké oblasti, počet zákazníků přicházejících do nějaké prodejny, počet infekčních onemocnění v nějakém městě apod.

Předpokládejme, že počet registrovaných událostí v časovém intervalu $(0, t)$ je $X_t = j$. Pak pro pravděpodobnosti přechodu $p_{jk}(h)$, $k \neq j$, během intervalu $(t, t+h)$ můžeme psát

$$p_{j,j+1}(h) = \lambda h + o(h),$$
$$p_{jk}(h) = o(h) \text{ v ostatních případech.}$$

Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě spočetný Markovův řetězec se spojitým časem s počátečním rozdělením $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ pro $j \geq 1$ a intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = \lambda \text{ pro } j \geq 0,$$
$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j).$$

Poissonův proces

Definovaný řetězec se nazývá **Poissonův** (**čítací**) **proces**. Matice intenzit přechodu Poissonova procesu má tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Kolmogorovovy diferenciální rovnice (8.2) mají v tomto konkrétním případě tvar

$$p_0'(t)=-\lambda p_o(t),$$
$$p_j'(t)=-\lambda p_j(t)+\lambda p_{j-1}(t)\ \text{pro}\ 1\le j<+\infty.$$

Tyto rovnice můžeme řešit postupně jednu po druhé, výhodnější je však použít vytvořující funkce (8.3). Vynásobením j-té rovnice faktorem s^j a sečtením všech těchto upravených rovnic pro $1\le j<+\infty$ dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j=-\lambda\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t)s^j+\lambda\sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t)s^j.$$

Nyní využijeme definičního vztahu (8.3) pro vytvořující funkci $\Pi(s,t)$.
Zřejmě platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t)s^j=\frac{\partial\Pi(s,t)}{\partial t},\quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t)s^j=s\sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t)s^{j-1}=s\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)s^k,$$

takže předcházející rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\partial\Pi(s,t)}{\partial t}=(-\lambda+\lambda s)\Pi(s,t)$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s,0)=s^0=1.$ Pro pevně zvolené s je to obyčejná homogenní lineární rovnice 1. řádu s obecným řešením

$$\Pi(s,t)=C(s)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda st}.$$

Z počáteční podmínky $\Pi(s,0)=1$ dostaneme $C(s)=1.$ Nalezené řešení rozvineme v nekonečnou řadu v proměnné s

$$\Pi(s,t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda \mathrm{t})^j s^j}{j!},$$

která konverguje pro všechna t. Hledané absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou koeficienty této mocninné řady „stojící" při s^j, takže

$$p_j(t)=\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\ 0\le j<+\infty,\ t>0.$$

Rozdělení pravděpodobností jednotlivých stavů v čase t je tedy Poissonovo rozdělení s parametrem λt. Dále ukážeme, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{\lambda t} = 1,$$

což znamená, že v případě Poissonova procesu není nutno zavádět stav $s_{+\infty}$. Doby setrvání v jednotlivých stavech $s_0, s_1, \ldots$ jsou zřejmě nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením o parametru λ.

Poznámka. Veškeré úvahy v tomto odstavci byly provedeny za předpokladu, že λ nezávisí na čase t. Tento předpoklad však často nebývá splněn. Např. provoz telefonní ústředny v pracovních dnech je v době od 6.00 do 17.00 mnohem silnější než ve večerních hodinách.

Pro úplnost uvedeme základní vlastnosti Poissonova procesu

Střední hodnota Poissonova procesu

1. **Střední hodnota Poissonova** procesu je *t*rovna λt.

Důkaz.

$$\mathbf{E}X_t = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \\ = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda t. \qquad \square$$

Variance Poissonova procesu

2. **Variance Poissonova procesu** je rovna také λt.

Důkaz.

$$\mathrm{E}\left(X_t^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^j}{j!} +$$

$$+ \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} + \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t) \mathrm{e}^{\lambda t} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t)^2 \sum_{l=0}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^l}{l!} + \lambda t = \mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t)^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t.$$

Dále platí

$$\operatorname{var}(X_t) = \mathrm{E}\left(X_t^2\right) - \left[\mathrm{E}X_t\right]^2 = \mathrm{E}\left(X_t^2\right) - (\lambda t)^2 = \\ = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t. \qquad \square$$

Intenzita Poissonova procesu

3. **Intenzita Poissonova procesu** je rovna λ.

   Důkaz. Intenzita Poissonova procesu je definována jako „střední“ počet událostí za jednotku času. Tato veličina má Poissonovo rozdělení s parametrem λ; její střední hodnota je tedy λ. □

4. **Počet událostí Poissonova procesu za jednotku času** má Poissonovo rozdělení s parametrem λ rovným intenzitě procesu. Proto pravděpodobnost, ře během intervalu jednotkové délky dojde přesně ke k událostem je

$$p_k = P\left(X = k\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ \ldots \tag{8.4}$$

Příklad 8.1 (viz [4]). Předpokládejme, že poruchy stroje představují Poissonův proces, přičemž střední doba mezi poruchami je 80 provozních hodin. Uvažujeme 8 hodin provozu denně. Máme k dispozici 3 náhradní díly a další dostaneme až za 5 dnů. Jaká je pravděpodobnost, že zásoba náhradních dílů nebude stačit?

Řešení. Za časovou jednotku zvolíme 5 dnů, intenzita procesu poruch je tedy $^1\!/_2$. Pravděpodobnost, že náhradní díly nebudou stačit, je rovna pravděpodobnosti, že během časové jednotky (5 dnů) dojde ke čtyřem nebo více poruchám. Ze vzorce (8.4) dostaneme

$$p_0 = 0,60653;\ p_1 = 0,30327;\ p_2 = 0,07582;\ p_4 = 0,01264.$$

Pravděpodobnost, že zásoba nebude stačit, je tedy rovna

$$1 - \sum_{j=0}^{3} p_j = 1 - 0,99825.$$

Poznámka: pravděpodobnost vzniku poruchy v době, kdy je stroj mimo provoz, zanedbáváme.

8.5 Aplikace Poissonova procesu

Uvažujme náhodnou veličinu udávající počet výskytů sledovaného jevu v určitém časovém intervalu. Jestliže uvažovaný jev splňuje následující podmínky:

- jev může nastat v libovolném časovém okamžiku,
- počet výskytů jevu během časového intervalu závisí jen na jeho délce a nikoliv na jeho počátku ani na tom, kolikrát jev nastoupil před jeho počátkem,
- pravděpodobnost, že jev nastoupil více než jednou v intervalu délky t, konverguje k nule rychleji než t,

- střední hodnota počtu výskytů jevu za časovou jednotku (intenzita jevu) je rovna λ,

pak příslušná náhodná veličina má Poissonovo rozdělení s parametrem λt a odpovídající proces je Poissonův proces.

Poissonův proces je tady vhodný k popisu počtu dopravních nehod, počtu zákazníků v prodejně, počtu telefonních spojení v ústředně nebo počtu pozorovaných komet během nějakého časového intervalu. Největší praktický význam mají aplikace Poissonova procesu:

- v teorii poruch u takových zařízení, u nichž opotřebení hraje zanedbatelnou roli a poruchy mají jiné příčiny (např. u elektronických zařízení s minimálním počtem pohyblivých součástí),
- v teorii hromadné obsluhy (teorii front), kde se Poissonův proces užívá k modelování vstupního procesu požadavků, resp. zákazníků (podrobnosti v kapitole 11).

Kontrolní otázky

1. Kdy je nutno zavádět speciální stav $s_{+\infty}$? Jaká je pravděpodobnost, že se systém do tohoto stavu dostane?
2. Jak se určují pravděpodobnosti $p_j(t)$, $t > 0$, pro pevně zvolený počáteční stav?
3. Jaké znáte metody pro výpočet pravděpodobností $p_j(t)$, $t > 0$?
4. Ve kterých případech je možno použít metody založené na časově závislé vytvořující funkci $\Pi(s,t)$?
5. K čemu a za jakých podmínek lze v praxi používat Poissonův proces?
6. Jaký je význam parametru λt Poissonova procesu?

Kontrolní úkoly

1. Automatická telefonní ústředna spojuje za hodinu průměrně 540 hovorů. Jaká je pravděpodobnost toho, že během daného časového intervalu délky jedna minuta spojí právě 20 hovorů?
2. Předpokládejte, že poruchy pneumatiky tvoří Poissonův proces vzhledem k ujeté vzdálenosti. (Čas se tedy měří ujetou vzdáleností.) Dále předpokládejte, že jedna porucha pneumatiky nastane průměrně po ujetí 50000 km. Máte-li v autě jediné rezervní kolo, jaké je pravděpodobnost, že pro poruchu pneumatiky nedojedete do cíle vzdáleného 5000 km?

Korespondenční úkol č. 8. Definujte si nějaký Poissonův proces a spočtěte jeho základní charakteristiky: střední hodnotu, varianci, intenzitu a počet událostí za jednotku času.
Doporučená struktura:
a) slovní popis Poissonova procesu,
b) definice Poissonova procesu,
c) numerický výpočet hodnot základních charakteristik.
d) interpretace výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- stav $s_{+\infty}$ (stav s hodnotou procesu $+\infty$),
- vytvořující funkce $\Pi(s,t)$,
- Poissonův proces,
- střední hodnota Poissonova procesu,
- variance Poissonova procesu,
- počet událostí Poissonova procesu za jednotku času.

Shrnutí

V této kapitole se zabýváme problematikou spočetných Markovových procesů se spojitým časem. Většina pojmů a poznatků zavedených v předcházející kapitole zůstává v platnosti, nově zavádíme stav $s_{+\infty}$ (stav s hodnotou procesu $+\infty$) a vysvětlujeme speciální metodu řešení soustavy Kolmogorovových rovnic založenou na využití vytvořující funkce $\Pi(s,t)$.
Podstatná část kapitoly je věnována Poissonovu procesu a jeho aplikacím. V těchto aplikacích se zaměřujeme především na určení absolutních pravděpodobností výskytu jednotlivých stavů procesu v daném čase *t*.

9 PROCESY MNOŽENÍ

Po prostudování této kapitoly:

- poznáte speciální případy spočetných Markovových řetězců se spojitým časem, a to procesy množení,
- naučíte se počítat absolutní pravděpodobnosti velikosti nějaké populace, jejichž jedinci mají schopnost rozmnožování, s využitím vytvořující funkce $\Pi(s,t)$,
- naučíte se počítat limitní pravděpodobnosti takové populace.

Klíčová slova: velikost populace, lineární proces množení (Yuleův proces), obecný proces množení

V této kapitole budeme uvažovat populaci, jejíž jedinci jsou nezávislí a mají schopnost generovat nové jedince téhož typu. Přitom budeme rozlišovat dva případy:

a) intenzita růstu populace je přímo úměrná její okamžité velikosti. (lineární proces množení),
b) intenzita růstu populace je obecnou funkcí její okamžité velikosti (obecný proces množení).

9.1 Lineární proces množení

Předpokládejme, že každý jedinec populace může během krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ generovat nového jedince s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, přičemž pravděpodobnost produkování dvou a více jedinců je zanedbatelně malá - $o(h)$. V populaci o velikosti j jedinců je pravděpodobnost vzniku nového jedince

$$p_{j,j+1}(h) = \binom{j}{1}\left(\lambda h + o(h)\right)^{1}\left(1 - \lambda h + o(h)\right)^{j-1} = j\lambda h + o(h).$$

Velikost populace

Nechť X_t značí počet jedinců uvažované populace (**velikost populace**) v čase t. Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je spočetný Markovův řetězec se spojitým časem s počátečním rozdělením $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$, kde i označuje počáteční velikost populace. Pro intenzity přechodu takového řetězce zřejmě platí

$$q_{j,j+1} = j\lambda,\ \mathrm{j} \ge i,$$
$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \ne j).$$

Lineární proces množení

Právě definovaný řetězec se nazývá **lineární proces množení** (intenzita růstu populace je lineární funkcí času) nebo také **Yuleův proces**. Matice intenzit přechodu tohoto řetězce má tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -3\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -j\lambda & j\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(j+1)\lambda & (j+1)\lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ tohoto řetězce můžeme psát (viz rovnice (8.2))

$$p_i'(t) = -i\lambda p_i(t),$$
$$p_j'(t) = -j\lambda p_j(t) + (j-1)\lambda p_{j-1}(t) \text{ pro } j > i.$$

Stejným postupem jako v případě Poissonova procesu (tj. vynásobením j-té rovnice faktorem s^j a sečtením všech takto upravených rovnic) dostaneme

$$\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = \left(-\lambda s + \lambda s^2\right) \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} \qquad (9.1)$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s,0) = s^i$. Rovnice (6.4) je parciální diferenciální rovnice 1. řádu, přitom lineární a homogenní. K jejímu řešení použijeme následující větu (viz např. [21]).

Věta 9.1. Nechť je dána parciální diferenciální rovnice

$$X_1(x_1,x_2)\frac{\partial \varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2)\frac{\partial \varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

kde $\varphi(x_1,x_2)$ je neznámá funkce a $X_1(x_1,x_2)$, $X_2(x_1,x_2)$ jsou známé funkce. Spolu s touto rovnicí uvažujme pomocnou obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2)}$$

Je-li $\varphi(x_1, x_2) = C$ obecné řešení pomocné rovnice, pak $f\left(\varphi(x_1, x_2)\right)$ je obecné řešení dané parciální diferenciální rovnice, přičemž *f* je libovolná diferencovatelná funkce.

Nyní aplikujeme právě uvedenou větu na rovnici (9.1) upravenou na tvar

$$\lambda s(s-1)\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = 0.$$

Příslušná pomocná rovnice

$$\frac{ds}{\lambda s(s-1)} = -dt$$

má obecné řešení $\ln \frac{s-1}{s} = -\lambda t + \text{ konst.}$, neboli $\frac{s-1}{s}\mathrm{e}^{\lambda t} = C$, kde C je libovolná konstanta. Obecné řešení parciální diferenciální rovnice (9.1) má podle uvedené věty tvar

$$\Pi(s,t) = f\left(\frac{s-1}{s}\mathrm{e}^{\lambda t}\right).$$

Funkci f určíme z počáteční podmínky $\Pi(s,0) = s^i$, tedy $f\left(\frac{s-1}{s}\right) = s^i$.

Zavedeme-li substituci $x = \frac{s-1}{s}$, a tedy $s = \frac{1}{1-x}$, dostaneme $f(x) = \frac{1}{(1-x)^i}$. Proto je obecné řešení rovnice (9.1)

$$\Pi(s,t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s-1}{s}\mathrm{e}^{\lambda t}\right)^i}.$$

Pro absolutní pravděpodobnosti jednotlivých stavů pak dostaneme (rozvinutím $\Pi(s,t)$ v řadu podle mocnin pomocné proměnné s)

$$p_j(t) = \binom{j-1}{j-i}\mathrm{e}^{-i\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{j-i} \text{ pro } j \geq i.$$

Také v tomto případě lze ukázat, že platí $\sum_{j=i}^{\infty} p_j(t) = 1,$ takže není nutné zavádět stav $s_{+\infty}$.

Poznámka. Ve speciálním případě $i = 1$ se vztah pro absolutní pravděpodobnosti zjednoduší na tvar

$$p_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{j-1} \text{ pro } j \geq 1.$$

Nalezené pravděpodobnosti pak zřejmě reprezentují geometrické rozdělení.

9.2 Obecný proces množení

Uvažujeme opět nějakou populaci, jejíž jedinci se chovají nezávisle a mohou se pouze rozmnožovat. Na rozdíl od předcházejícího případu, kdy je intenzita růstu populace přímo úměrná její okamžité velikosti, tj. $j\lambda$, budeme předpokládat, že je tato intenzita složitější funkcí velikosti populace, konkrétně λ_j. Dále je nutno předpokládat $\lambda_j > 0$ pro všechna $j \geq 1$. Kdyby pro některé N platilo $\lambda_N = 0$, pak by byl příslušný Markovův řetězec konečný.

Nechť X_t značí velikost populace v čase *t*, přitom počáteční velikost populace $X_0 = i$. Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě spočetný Markovův řetězec se spojitým časem s počátečním rozdělením $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j > i$ a intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = \lambda_j \text{ pro } j \geq i,$$
$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j).$$

Obecný proces množení

Takto definovaný řetězec se nazývá **obecný proces množení**. Matice intenzit přechodu má tedy tvar (stavy číslovány od $j = i$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_i & \lambda_i & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_{i+1} & \lambda_{i+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_{i+2} & \lambda_{i+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jednotlivých stavů vyhovují Kolmogorovově soustavě diferenciálních rovnic

$$p_i'(t) = -\lambda_i p_i(t),$$
$$p_j'(t) = -\lambda_j p_j(t) + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) \text{ pro } j > i.$$

Postupným řešením těchto rovnic dostaneme

$$p_i(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t},$$
$$p_j(t) = \lambda_{j-1} \mathrm{e}^{-\lambda_j t} \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_j s} p_{j-1}(s)\, ds \text{ pro } j > i.$$

Na otázku, kdy je v obecném procesu množení nutno zavést stav $s_{+\infty}$, odpovídá následující věta.

Věta 9.2. V obecném procesu množení je $\sum_{j=i}^{\infty} p_j(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$ (není nutno zavést stav $s_{+\infty}$) tehdy a jen tehdy, když platí

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty.$$

Důkaz tohoto tvrzení je uveden ve skriptech [6]. □

Poznámka. Oba procesy množení (lineární i obecný) mají v praxi jen malý význam, protože v reálném světě neexistují populace, jejichž jedinci nepodléhají zániku. Nicméně, uvedených procesů je možno použít např. k modelování krátkodobého růstu kolonie bakterií v prostředí s dostatkem živin.

Kontrolní otázky

1. Z jakých předpokladů vycházejí procesy množení?
2. Čím se liší lineární proces množení od obecného procesu množení?
3. K čemu lze v praxi využít procesy množení?

Korespondenční úkol č. 9. Definujte si nějaký proces množení a spočtěte absolutní pravděpodobnosti velikosti populace v závislosti na čase s využitím vytvořující funkce $\Pi(s,t)$, resp. limitní pravděpodobnosti.

Doporučená struktura:

a) slovní popis procesu množení,

b) definice procesu množení (nastavení parametru λ),

c) výpočet příslušných pravděpodobností,

d) interpretace výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- velikost populace,
- lineární proces množení (Yuleův proces),
- obecný proces množení.

.

Shrnutí

Tato kapitola je věnována problematice procesů množení., přičemž uvažujeme dvě varianty takových procesů: lineární proces množení a obecný proces množení. V případě lineárního procesu se zaměřujeme na určení absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů procesu (tj. velikostí populace) v daném čase *t*, v případě obecného procesu na výpočet limitních pravděpodobností.

10 PROCESY MNOŽENÍ A ZÁNIKU

Po prostudování této kapitoly:

- poznáte speciální případy spočetných Markovových řetězců se spojitým časem: lineární a obecný proces množení a zániku,
- naučíte se počítat absolutní pravděpodobnosti velikosti nějaké populace, jejichž jedinci mají schopnosti generovat nové jedince i zanikat, a to s využitím vytvořující funkce $\Pi(s,t)$,
- naučíte se počítat limitní pravděpodobnosti takové populace.

Klíčová slova: lineární proces množení a zániku, extinkce populace, pravděpodobnost extinkce populace, obecný proces množení a zániku.

V této kapitole budeme uvažovat populaci, jejíž jedinci jsou nezávislí a mají schopnosti generovat nové jedince téhož typu a také zanikat. Přitom budeme rozlišovat dva případy:

c) intenzita růstu i poklesu velikosti populace je přímo úměrná její okamžité velikosti. (lineární proces množení a zániku),

d) intenzita růstu i poklesu velikosti populace je obecnou funkcí její okamžité velikosti (obecný proces množení a zániku).

10.1 Lineární proces množení a zániku

Uvažujme nějakou populaci nezávislých jedinců, kteří se mohou nejen rozmnožovat, ale i zanikat. Budeme předpokládat, že každý jedinec může během dostatečně krátkého intervalu $(t,t+h)$ generovat nového jedince s pravděpodobností $\lambda h+o(h)$ a zaniknout s pravděpodobností $\mu h+o(h)$.

Nechť X_t značí počet jedinců v čase t, přitom pro jednoduchost $X_0=1$. Je-li $X_t=j$, pak pro pravděpodobnosti přechodu v intervalu $(t,t+h)$ platí:

$$p_{j,j+1}(h)=j\lambda h+o(h) \text{ pro } j\geq 0,$$
$$p_{j,j-1}(h)=j\mu h+o(h) \text{ pro } j\geq 1,$$
$$p_{jk}(h)=o(h) \text{ v ostatních případech } (k\neq j).$$

Náhodný proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě spočetný Markovův řetězec se spojitým časem, intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = j\lambda \text{ pro } j \geq 0,$$
$$q_{j,j-1} = j\mu \text{ pro } j \geq 1,$$
$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j)$$

Lineární proces množení a zániku

a počáteční podmínkou $p_1(0) = 1,\ p_j(0) = 0$ pro $j > 1$. Tento řetězec se nazývá **lineární proces množení a zániku**, protože intenzity množení i zániku jsou lineárními funkcemi okamžité velikosti populace.

Matice intenzit přechodu má tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & 3\lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & -4(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Z tvaru matice $\mathbf{Q}$ je zřejmé, že stav s nulovou velikostí je stavem absorpčním.

Příslušné absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou řešením Kolmogorovovy soustavy diferenciálních rovnic

$$p_0'(t) = \mu p_1(t),$$
$$p_j'(t) = -j(\lambda+\mu)\,p_j(t) + (j-1)\lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \text{ pro } j \geq 1$$

s počáteční podmínkou $p_1(0) = 1,\ p_j(0) = 0$ pro $j > 1$.

Tuto soustavu můžeme převést (způsobem ukázaným v odstavci 8.2) na parciální diferenciální rovnici

$$\left[\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu\right]\frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s,t)}{\partial t} = 0 \tag{10.1}$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s,0) = s$.

Pomocná obyčejná diferenciální rovnice (podle věty 9.1) má tvar

$$\frac{ds}{\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu} = -dt. \tag{10.2}$$

Při řešení rovnice (10.1) rozlišíme dva případy: $\lambda \neq \mu$ a $\lambda = \mu$.

A. Uvažujme nejprve obecnější případ $\lambda \neq \mu$. Pomocná rovnice (10.2) má obecné řešení

$\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t}=C,$ takže obecné řešení parciální diferenciální rovnice (10.1) hledáme ve tvaru

$$\Pi(s,t)=f\left(\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t}\right),$$

kde funkci *f* určíme z počáteční podmínky

$$\Pi(s,0)=f\left(\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\right)=s.$$

Po zavedení substituce $x=\frac{\mu-\lambda s}{1-s}$ dostaneme $s=f(x)=\frac{\mu-x}{\lambda-x}$. Odtud získáme řešení rovnice (10.1) ve tvaru

$$\Pi(s,t)=\frac{\mu-\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda-\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t}}=\frac{\mu\left(1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\right)-s\left(\lambda-\mu\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\right)}{\left(\mu-\lambda\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\right)-\lambda s\left(1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\right)}.$$

Pro zjednodušení výpočtu zavedeme označení

$$B(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}.$$

Pak můžeme psát

$$\Pi(s,t)=\frac{1}{1-\lambda B(t)s}\left[\mu B(t)-\frac{\lambda-\mu\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}s\right]=\frac{\mu B(t)-\left(\lambda B(t)+\mu B(t)-1\right)s}{1-\lambda B(t)s}=$$

$$=\mu B(t)+\left(1-\lambda B(t)\right)\left(1-\mu B(t)\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\lambda B(t)\right)^{j-1}s^{j}.$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ tedy platí

$$p_0(t)=\mu B(t),$$

$$p_j(t)=\left(1-\lambda B(t)\right)\left(1-\mu B(t)\right)\left(\lambda B(t)\right)^{j-1}\ \text{pro}\ j\geq 1.$$

Extinkce populace

Při řešení praktických úloh je důležité spočítat pravděpodobnost *w* **extinkce** (úplného zániku) uvažované **populace**. Pro tuto pravděpodobnost dostaneme

$$w=\lim_{t\to\infty}p_0(t)=\lim_{t\to\infty}\mu\mathrm{B}(\mathrm{t})=\lim_{t\to\infty}\frac{\mu\left(1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\right)}{\mu-\lambda\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}=\begin{cases}1\ \text{pro}\ \lambda\leq\mu\\ \frac{\mu}{\lambda}\ \text{pro}\ \lambda>\mu\end{cases}.$$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že pro $\lambda\leq\mu$ populace s jistotu zanikne, zatímco v případě $\lambda>\mu$ je pravděpodobnost extinkce populace rovna $\frac{\mu}{\lambda}$.

B. Ve speciálním případě $\lambda = \mu$ má pomocná diferenciální rovnice (10.2) tvar

$$\frac{ds}{(s-1)^2} = -\lambda dt$$

a její obecný integrál je $\lambda t + \frac{1}{1-s} = C.$ Proto obecné řešení parciální diferenciální rovnice (10.1) hledáme ve tvaru

$$\Pi(s,t) = f\left(\lambda t + \frac{1}{1-s}\right).$$

Z počáteční podmínky dostaneme

$\Pi(s,0) = f\left(\frac{1}{1-s}\right) = s.$ Po zavedení substituce $x = \frac{1}{1-s}$ máme $s = \frac{x-1}{x}$,

a tedy $f(x) = \frac{x-1}{x}.$

Hledané řešení parciální diferenciální rovnice (10.1) je

$$\Pi(s,t) = \frac{\lambda t + \frac{1}{1-s} - 1}{\lambda t + \frac{1}{1-s}}.$$

Toto řešení upravíme a rozvedeme v mocninnou řadu v proměnné *s*

$$\Pi(s,t) = \frac{\frac{\lambda t}{\lambda t+1} + \frac{1-\lambda t}{\lambda t+1}s}{1 - \frac{\lambda t}{\lambda t+1}s} = \frac{\lambda t}{\lambda t+1} + \frac{1}{(\lambda t+1)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda t}{\lambda t+1}\right)^{j-1} s^j.$$

Odtud určíme hledané absolutní pravděpodobnosti jednotlivých stavů

$$p_0(t) = \frac{\lambda t}{\lambda t+1},$$

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(\lambda t+1)^{j+1}} \text{ pro } j \geq 1.$$

Pravděpodobnost extinkce populace

Pro **pravděpodobnost extinkce (zániku) populace** dostaneme

$$w = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda t}{\lambda t+1} = 1,$$

což je ve shodě s tím, co jsme zjistili v případě **A**.

V obou řešených případech lineárního procesu množení a zániku lze ukázat, že není nutno zavádět stav $s_{+\infty}$.

10.2 Obecný proces množení a zániku

Na rozdíl od předcházejícího případu, kdy intenzity růstu i úbytku velikosti populace byly lineárními funkcemi okamžité velikosti populace *j*, budeme nyní předpokládat, že tyto závislosti jsou popsány obecně výrazy λ_j, resp. μ_j. Tím dostaneme **obecný proces množení a zániku**, což je spočetný Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ se spojitým časem a intenzitami přechodu

Obecný proces množení a zániku

$$q_{j,j+1} = \lambda_j \text{ pro } j \geq 0,$$
$$q_{j,j-1} = \mu_j \text{ pro } j \geq 1,$$
$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech.}$$

Matice intenzit přechodu má zřejmě tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -(\lambda_4+\mu_4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou řešením Kolmogorovovy soustavy diferenciálních rovnic

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t),$$
$$p_j'(t) = -(\lambda_j + \mu_j)\, p_j(t) + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) \text{ pro } j \geq 1,$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$. Omezíme se jen na dva prakticky důležité případy.

A. Předpokládejme, že všechny intenzity růstu i poklesu velikosti populace jsou kladné, tj. $\lambda_j > 0$ pro $j \geq 0$ $\mu_j > 0$ pro $j \geq 1$. Ukážeme, jak se spočtou limitní pravděpodobnosti $\pi_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$.

Věta 10.1. Nechť $\rho_0 = 1$, $\rho_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_j}$ pro $j \geq 1$. Pak limitní pravděpodobnosti $\pi_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$, nezávislé na počátečním stavu s_i, vesměs kladné a splňující podmínku $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, existují tehdy a jen tehdy, když $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \rho_j < +\infty$. Pro tyto limitní pravděpodobnosti platí

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k} \text{ pro } j \geq 0.$$

Důkaz. Stačí vyšetřit soustavu algebraických rovnic $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, konkrétně soustavu

$$-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0,$$
$$-\left(\lambda_j + \mu_j\right)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0 \text{ pro } j \geq 1.$$

Označíme-li $K_j = \mu_j \pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1}$ pro $j \geq 1$, pak dostaneme $K_1 = 0,\ K_j = K_{j+1}$ pro $j \geq 1$, což znamená $K_1 = K_2 = \ \dots\ = 0.$ Odtud plyne

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{j-1} = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}}{\mu_j \mu_{j-1}}\pi_{j-2} = \ \dots\ = \rho_j \pi_0 \text{ pro } j \geq 1.$$

Z podmínky $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = 1$ vyplývá, že limitní pravděpodobnosti existují tehdy a jen tehdy, když $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j < +\infty$, a $\pi_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j}$. □

B. Nyní budeme předpokládat, že $\lambda_0 = 0$ a všechny ostatní intenzity růstu i poklesu velikosti populace jsou kladné, tj. $\lambda_j > 0$ pro $j > 0$ $\mu_j > 0$ pro $j \geq 1$. V tomto případě je zřejmě stav s nulovou velikostí populace stavem absorpčním. Ukážeme si, jak se spočtou pravděpodobnosti extinkce populace za předpokladu, že její počáteční velikost je $X_0 = i$, tj. pravděpodobnosti $w_i = \lim_{t \to \infty} p_{i0}(t)$, $i \geq 1$.

Věta 10.2. Nechť $\sigma_j = \dfrac{\mu_1 \mu_2\ \dots\ \mu_j}{\lambda_1 \lambda_2\ \dots\ \lambda_j}$, $j \geq 1$. Pak jsou pravděpodobnosti extinkce populace rovny

$$w_i = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } \sum_{j=i}^{\infty} \sigma_j = +\infty, \\ \dfrac{\sum_{j=i}^{\infty} \sigma_j}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j}, \text{ jestliže} \sum_{j=i}^{\infty} \sigma_j < +\infty, \end{cases}$$

a to pro všechna $i \geq 1$.

Důkaz této věty je ve skriptech [6]. □

Pro úplnost uvádíme, že podmínka $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$ je postačující k tomu, abychom nemuseli zavádět stav $s_{+\infty}$.

Poznámka. Procesy množení a zániku mají mnoho praktických aplikací v nejrůznějších oborech, např. v populační dynamice, epidemiologii, reakční kinetice a teorii hromadné obsluhy. Problematice systémů hromadné obsluhy bude věnována následující kapitola.

Kontrolní otázky

1. Z jakých předpokladů se vychází při formulaci procesů množení a zániku?
2. Čím se liší lineární proces množení a zániku od obecného procesu množení a zániku?
3. Jak se v praxi využívají procesy množení a zániku?

Korespondenční úkol č. 10. Definujte si nějaký proces množení a zániku, spočtěte absolutní pravděpodobnosti velikosti populace v závislosti na čase s využitím vytvořující funkce $\Pi(s,t)$, resp. limitní pravděpodobnosti, a určete pravděpodobnost extinkce populace.
Doporučená struktura:
a) slovní popis procesu množení a zániku,
b) definice procesu množení a zániku (nastavení parametrů λ a μ),
c) výpočet příslušných pravděpodobností,
d) interpretace výsledků.

Pojmy k zapamatování:

- lineární proces množení a zániku,
- extinkce (zánik) populace,
- pravděpodobnost extinkce populace,
- obecný proces množení a zániku.

Shrnutí

Tato kapitola je věnována problematice procesů množení a zániku, přičemž uvažujeme obě základní varianty takových procesů: lineární proces množení a zániku i obecný proces množení a zániku. V případě lineárního procesu se zaměřujeme jednak na určení absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů procesu (tj. velikostí populace) v daném čase *t*, jednak na stanovení pravděpodobnosti extinkce populace. U obecného procesu množení a zániku se omezujeme pouze na výpočet limitních pravděpodobností.

11 TEORIE HROMADNÉ OBSLUHY

Po prostudování této kapitoly:

- poznáte strukturu systémů hromadné obsluhy a pochopíte principy jejich činnosti,
- poznáte základní charakteristiky systémů hromadné obsluhy,
- naučíte se analyticky řešit vybrané úlohy s využitím poznatků z teorie Markovových řetězců se spojitým časem.

Klíčová slova: systém hromadné obsluhy (SHO), požadavky, linky obsluhy, SHO s čekací frontou, SHO s odmítáním požadavků, smíšený SHO, Poissonův vstupní tok, Erlangův vstupní tok, regulární vstupní tok, deterministický vstupní tok, doba trvání obsluhy, kapacita obsluhy, dostupnost obsluhy, priorita, režim FIFO, režim LIFO, režim SIRO, systém $(\mathrm{M/M/}\infty)$, systém $(\mathrm{M/M/}n)$, systém $(\mathrm{M/M/1})$, střední hodnota počtu požadavků. variance počtu požadavků, střední hodnota délky fronty.

Úvodní část této kapitoly se zabývá strukturou systému hromadné obsluhy a popisem základních charakteristik jeho prvků (vstupní tok požadavků, mechanismus obsluhy, režim obsluhy, režim fronty). Podrobnější poučení o této problematice naleznete např. v publikaci [Malík]. Ukážeme, že na systémy hromadné obsluhy lze výhodně aplikovat poznatky z teorie Markovových řetězců se spojitým časem. V závěru kapitoly pak ukážeme, jak se analyticky řeší vybrané úlohy z teorie hromadné obsluhy.

11.1 Struktura systémů hromadné obsluhy

Teorie hromadné obsluhy je speciální obor aplikované matematiky, ve kterém se opakovaně vyskytují požadavky na provedení jisté posloupnosti operací, jejichž výskyt i trvání jsou zpravidla náhodné.

Systém hromadné obsluhy

Systém hromadné obsluhy je možno definovat jako systém tvořený jednou nebo více paralelními linkami (kanály) pro obsluhu přicházejících požadavků (zákazníků).

Základními prvky systémů hromadné obsluhy (dále ve zkratce SHO) jsou tedy:

Požadavky
Obsluhovací linky

1) **požadavky** (zákazníci),
2) **obsluhovací linky** (kanály obsluhy).

SHO pracuje tak, že k nějakému zařízení (jedna nebo více paralelních linek obsluhy) přicházejí požadavky (zákazníci) vyžadující obsluhu. Každý SHO má konečný, popř. spočetný, počet obsluhovacích linek; toto číslo určuje maximální počet paralelně (současně) obsluhovaných požadavků – tzv. kapacitu obsluhy.

Je-li volné místo pro obsluhu (volná obsluhovací linka), požadavek se přijme a ihned se zahájí jeho obsluha. V případě, že není volná žádná obsluhovací linka, může se SHO chovat různě.

Systém s čekací frontou

Systém s odmítáním požadavků

Systém smíšený

- Každý další požadavek se staví do fronty a čeká, dokud se některá z obslužných linek neuvolní. Takové SHO se nazývají **systémy s čekací frontou**.
- Každý další požadavek je odmítnut. V tomto případě jde o **systémy s odmítáním požadavků** (**systémy se ztrátami**).
- Kombinováním obou předcházejících typů jsou **systémy smíšené** (např. **systémy s omezenou délkou fronty** nebo **systémy s „netrpělivými“ zákazníky**).

Základní charakteristiky SHO jsou:

- vstupní tok požadavků (frekvence neboli intenzita vstupu),
- mechanismus obsluhy (kapacita obsluhy, délka trvání obsluhy, dostupnost obsluhy),
- režim obsluhy (způsob obsazování linek přicházejícími, popř. čekajícími požadavky, priority v obsluze),
- režim fronty (způsob řazení požadavků do čekací fronty, výběr požadavků z fronty).

11.2 Vstupní tok požadavků

Vstupní tok požadavků je zřejmě náhodný proces, přičemž registrovanou událostí je příchod požadavku na vstup SHO.

V tomto odstavci se budeme věnovat jen základním typům vstupního toku požadavků.

Poissonův vstupní tok

Poissonův vstupní tok (elementární vstupní tok) není zřejmě nic jiného než Poissonův proces, kterému jsme se podrobně věnovali v odstavci 6.4. Nechť X_t je počet požadavků, které vstoupily do SHO do času t za předpokladu, že $X_0 = 0$. Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je Poissonův proces, pro nějž platí

$$P(X_t = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ pro } k = 0,1,\ldots.$$

Intenzita Poissonova vstupního toku je zřejmě rovna střední hodnotě počtu požadavků, jež do systému vstoupily za čas *t*, tedy

$$\mathbf{E}X_t = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = \lambda t.$$

Náhodné veličiny $T_1, T_2, \ldots,$ které udávají délky časových intervalů mezi dvěma po sobě jdoucími vstupy požadavků mají exponenciální rozdělení s parametrem λ, střední hodnotou $1/\lambda$ a rozptylem $1/\lambda^2$. Příklady Poissonova vstupního toku: příchody volání do nějaké telefonní ústředny nebo vstupy zákazníků do nějaké prodejny ve vhodně zvoleném časovém intervalu, kdy λ lze považovat za konstantní.

Erlangův vstupní tok

Erlangův vstupní tok je možno charakterizovat tak, že náhodné veličiny $T_1, T_2, \ldots$ udávající délky časových intervalů mezi vstupy po sobě přicházejících požadavků mají Erlangovo rozdělení řádu *k*, tj. jejich hustota pravděpodobnosti je dána vztahem

$$f_k(t) = \frac{b^k t^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-bt},$$

kde $t \geq 0, k = 1, 2, \ldots, b > 0.$

Regulární vstupní tok

Regulární vstupní tok je charakterizován tím, že požadavky vstupují do SHO po jednom v okamžicích vzdálených od sebe o *d* časových jednotek. Jeho intenzita je rovna $1/d$. Příkladem takového vstupního toku jsou příjezdy vlaků do vybrané stanice Metra.

Deterministický vstupní tok

O **deterministickém vstupním toku** mluvíme v případě, kdy požadavky vstupují do SHO jen v zadaných diskrétních časových okamžicích.

11.3 Mechanismus obsluhy

Mechanismus obsluhy se popisuje pomocí tří základních charakteristik.

Doba trvání obsluhy

Trvání doby obsluhy specifikuje časový interval potřebný k obsluze jednoho požadavku. V idealizovaném případě lze dobu trvání obsluhy považovat za konstantní.

Nejčastěji se předpokládá, že doba obsluhy je náhodná veličina, jež má exponenciální rozdělení s parametrem $\mu > 0$, tj. náhodná veličina s hustotou pravděpodobností

$$f(t) = \mu \mathrm{e}^{-\mu t}, t \geq 0.$$

Typickým příkladem je doba obsluhy zákazníka v nějaké prodejně.

Někdy se také uvažuje Erlangovo rozdělení nebo rozdělení s časově proměnnými parametry (obsluha trpící únavou).

Kapacita obsluhy

Kapacita obsluhy udává maximální počet paralelně obsluhovaných požadavků. Nejčastěji je kapacita obsluhy rovna určitému, předem zadanému přirozenému číslu n.

V některých případech se uvažují i systémy s neomezenou kapacitou (kapacitou rovnou $+\infty$). Tato matematická abstrakce je užitečná u takových SHO, kde počet obsluhovacích linek je tak velký, že požadavky nemusí čekat na obsluhu, tj. nevytváří se žádná fronta.

Existují i takové SHO, kde kapacita není jednoznačně definována. Např. v kadeřnictví může být současně obsluhován (rozpracován) různý počet zákazníků.

Dostupnost obsluhy

Dostupnost obsluhy. U SHO s jedinou obsluhovací linkou se udávají frekvence a délky časových intervalů, kdy obsluha není možná (přestávky v obsluze).

V případě SHO s více linkami je nutno definovat rozdělení kapacity obsluhy v čase.

11.4 Režim obsluhy

Tento režim určuje především způsob obsazování linek a také respektuje priority jednotlivých požadavků. V SHO s jednou linkou se uvolněná linka obsazuje ihned vstupem nového požadavku, přičemž tento požadavek může vstupovat buď z okolí systému nebo z čekací fronty.

U vícelinkového SHO je nejčastější takový případ, kdy každý požadavek může být obsloužen libovolnou linkou, přitom existují tři základní možnosti.

- Vstupující požadavky ihned obsazují volné linky podle nějakého, předem zadaného pravidla.
- Jsou-li všechny linky obsazeny, vytváří se u každé linky vlastní fronta a požadavky se v okamžiku svého vstupu rozhodují, do které fronty se zařadí.
- Vstupující požadavky vytvářejí jednu společnou frontu a vstupují do obsluhy na té lince, která se uvolní.

Priorita

Různé typy požadavků mohou mít v SHO různé **priority**. Předpokládejme, že je právě obsluhován požadavek s danou prioritou a na vstupu se objeví nějaký požadavek s prioritou vyšší. V takovém případě existují dvě možnosti.

- Započatá obsluha je normálně dokončena a teprve pak vstoupí požadavek s vyšší prioritou (tzv. **slabá priorita**). Slabá priorita
- Započatá obsluha je okamžitě přerušena a zahájí se obsluha požadavku s vyšší prioritou (**silná priorita**). Požadavek, jehož obsluha byla přerušena, se buď vrací zpět do čekací fronty anebo odchází ze systému neobsloužen. Silná priorita

11.5 Režim fronty

Režim fronty představuje především soubor pravidel, jež určují, jak se chová požadavek, který nemůže být ihned obsloužen. Navíc se zabývá problematikou výběru požadavků z fronty.

SHO se v podstatě rozdělují do dvou skupin:

- **systémy se ztrátami**, v nichž se fronta nevytváří a požadavek, jenž nemůže být ihned obsloužen, ze systému odchází;
- **systémy s čekací frontou,** ve kterých se fronty vytvářejí.

V systémech s čekací frontou bývá většinou délka fronty nějakým způsobem omezena.

Systém s omezenou délkou fronty je charakterizován tím, že požadavky, které již nelze umístit do fronty, se odmítají. Příkladem může být parkoviště u čerpací stanice.

V **systému s „netrpělivými“ požadavky** je režim takový, že požadavky, které by měly čekat déle, než je stanoveno, systém opouštějí.

V **uzavřeném systému** je obsluhován jen omezený počet požadavků, např. nákladní auta obsluhovaná nějakým nakladačem.

Pro výběr požadavků z fronty se používají následující režimy:

- nejčastěji **režim FIFO** (první na vstupu do fronty, první také na výstupu), Režim FIFO
- ve skladovacích systémech **režim LIFO** (poslední na vstupu, první na výstupu), Režim LIFO
- **režim SIRO** (náhodný výběr z čekajících požadavků). Režim SIRO

11.6 Klasifikace systémů hromadné obsluhy

Pro klasifikaci SHO se užívá podle Kendalla tří hledisek:

- náhodný proces popisující vstupní tok požadavků,
- rozdělení pravděpodobností pro dobu trvání obsluhy,
- počet obsluhovacích linek.

Typ SHO se zapisuje ve tvaru $(\mathrm{X}/\mathrm{Y}/n)$, kde X, Y jsou kódy, jejichž význam je uveden v tab. 11.1, a *n* udává počet obsluhovacích linek.

Tab. 11.1. Tabulka kódů v Kendallově klasifikaci SHO

Kód	*X*	*Y*
M	Poissonův proces vstupu	Exponenciální rozdělení doby obsluhy
E_k	Erlangův vstupní tok řádu *k*	Erlangovo rozdělení řádu *k* doby obsluhy
D	Deterministický vstupní tok	Konstantní doba obsluhy
G	Obecný případ – žádné předpoklady o procesu vstupu požadavků	Obecné rozdělení doby obsluhy

Tato klasifikace není ovšem úplná. V každém případě je nutno dodat informace o režimu obsluhy a režimu fronty.

Z matematického hlediska je nejlépe propracována teorie systémů typu $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/n)$, která vychází z teorie Markovových řetězců se spojitým časem.

11.7 Metody řešení úloh

V zásadě existují dva přístupy k řešení úloh týkajících se SHO:

- analytické metody, jejichž výsledkem jsou absolutní pravděpodobnosti jednotlivých stavů SHO nebo alespoň limitní pravděpodobnosti,
- počítačová simulace, která poskytuje numerické hodnoty platné s jistou pravděpodobností pro zadané hodnoty vstupních parametrů.

Simulační řešení je mnohem pracnější (mnoho experimentů pro různé kombinace hodnot vstupních parametrů), ale nezávislé na komplikovanosti a rozsáhlosti vzájemných vazeb v SHO.

11.8 Systém $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/\infty)$

Předpoklad, že počet obsluhovacích linek $n=\infty$ je skutečně reálný, odpovídá situaci, kdy počet těchto linek je tak velký, že se netvoří žádná fronta. Poissonův vstupní tok s parametrem λ (kód M) znamená, že pravděpodobnost vstupu nového požadavku během dostatečně krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ je $\lambda h + o(h)$. Exponenciální rozdělení doby obsluhy (také kód M) má následující interpretaci: je-li daný požadavek obsluhován v čase *t*, pak pravděpodobnost, že jeho obsluha během intervalu $(t,t+h)$ skončí, je rovna $\mu h+o(h)$.

Označme X_t počet požadavků (počet obsazených obsluhovacích linek) v systému v čase *t*, přičemž $X_0=i$. Je-li tedy $X_t=j$, potom pro pravděpodobnosti přechodu v intervalu $(t,t+h)$ můžeme (za předpokladu linearity) psát

$$p_{j,j+1}(h)=\lambda h+o(h) \text{ pro } j\geq 0,$$
$$p_{j,j-1}(h)=j\mu h+o(h) \text{ pro } j\geq 1.$$

Spočetný Markovův řetězec se spojitým časem $\{X_t, t\geq 0\}$ je zřejmě lineární proces množení a zániku s počáteční podmínkou $p_i(0)=1$ a $p_j(0)=0$ pro $j\neq i$ a intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1}=\lambda \text{ pro } j\geq 0,$$
$$q_{j,j-1}=j\mu \text{ pro } j\geq 1.$$

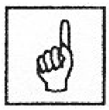
Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ platí soustava diferenciálních rovnic

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t),$$
$$p_j'(t)=-(\lambda+j\mu)p_j(t)+\lambda p_{j-1}(t)+(j+1)\mu p_{j+1}(t),\ j\geq 1.$$

Tuto soustavu převedeme známým způsobem (vynásobením *j*-té rovnice faktorem s^j a sečtením všech takových rovnic) na jedinou parciální diferenciální rovnici pro vytvořující funkci $\Pi(s,t)$, čímž dostaneme

$$\mu(1-s)\frac{\partial\Pi(s,t)}{\partial s}-\frac{\partial\Pi(s,t)}{\partial t}=\lambda(1-s)\Pi(s,t) \tag{11.1}$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s,0)=s^i$. Pro řešení této lineární nehomogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu použijeme následující větu (viz [21]).



Věta 11.1. Nechť je dána parciální diferenciální rovnice

$$X_1(x_1,x_2,z)\frac{\partial z(x_1,x_2)}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,z)\frac{\partial z(x_1,x_2)}{\partial x_2}=Z(x_1,x_2,z),$$

kde $z(x_1,x_2)$ je neznámá funkce, $X_1(x_1,x_2,z), X_2(x_1,x_2,z)$ jsou koeficienty a $Z(x_1,x_2,z)$ pravá strana uvedené rovnice (obojí známé funkce). Uvažujme pomocnou soustavu rovnic

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,z)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,z)}=\frac{dz(x_1,x_2)}{Z(x_1,x_2,z)}.$$

Jsou-li $\varphi_1(x_1, x_2, z) = C_1, \varphi_2(x_1, x_2, z) = C_2$ dvě nezávislá řešení pomocné soustavy, pak obecné řešení výchozí parciální diferenciální rovnice má tvar

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

kde *f* je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných.

Nyní aplikujeme větu 11.1 na řešení rovnice (11.1). Pomocná soustava dvou obyčejných diferenciálních rovnic má tvar

$$\frac{ds}{\mu(1-s)} = -dt = \frac{d\Pi(s,t)}{\lambda(1-s)\Pi(s,t)}$$

a její dvě nezávislá řešení jsou

$$\mathrm{e}^{-\mu t}(s-1) = C_1,\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\mu}s}\Pi(s,t) = C_2.$$

Obecné řešení rovnice (11.1) má tedy tvar

$$f\left(\mathrm{e}^{-\mu t}(s-1), \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\mu}s}\Pi(s,t)\right) = 0.$$

Odtud vyjádříme $\Pi(s,t)$ jako nějakou funkci *F* prvního argumentu

$$\Pi(s,t) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\mu}s} F\left(\mathrm{e}^{-\mu t}(s-1)\right).$$

Tvar funkce *F* určíme z počáteční podmínky $\Pi(s,0) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\mu}s} F(s-1) = s^i$. Zavedeme-li substituci $x = s-1$ (a tedy $s = x+1$), dostaneme

$$F(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\mu}(x+1)}(x+1)^i.$$

Hledané řešení parciální diferenciální rovnice (11.1) je

$$\Pi(s,t) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\mu}s}\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\mu}\left(\mathrm{e}^{-\mu t}(s-1)+1\right)}\left(\mathrm{e}^{-\mu t}(s-1)+1\right)^i.$$

Odtud můžeme rozložením v řadu podle mocnin proměnné *s* a poměrně složitými úpravami získat vztahy pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$. V tomto případě se spokojíme pouze s tím, že nalezneme limitní pravděpodobnosti π_j, $j \geq 0$ podle věty 10.1.

V našem případě je $\rho_0 = 1$, $\rho_j = \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_j} = \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j$ pro $j \geq 1$.

Snadno zjistíme, že platí $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\mu}} < +\infty$, proto pro hledané limitní pravděpodobnosti dostaneme

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} = \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} .$$

Nalezené rozdělení je zřejmě Poissonovo rozdělení s parametrem λ/μ.

11.9 Systém $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/n)$

Je-li v čase t přítomno v systému $j \le n$ požadavků, pak jsou všechny obsluhovány a jejich počet se během časového intervalu $(t, t+h)$ o 1 zvětší s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a o 1 zmenší s pravděpodobností $j\mu h + o(h)$. V případě $j > n$ je obsluhováno pouze n požadavků a zbývajících $j - n$ požadavků musí čekat ve frontě. V tomto případě se počet požadavků v intervalu $(t, t+h)$ o 1 zvětší s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a 1 zmenší s pravděpodobností $n\mu h + o(h)$.

Nechť celkový počet požadavků v systému (obsluhovaných i čekajících ve frontě) je X_t. Pak $\{X_t, t \ge 0\}$ je zřejmě proces množení a zániku s intenzitami přechodu (za předpokladu linearity)

$$q_{j,j+1} = \lambda \text{ pro } j \ge 0,$$
$$q_{j,j-1} = j\mu \text{ pro } 1 \le j \le n,$$
$$q_{j,j-1} = n\mu \text{ pro n} < \text{j} < +\infty.$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jednotlivých stavů platí soustava diferenciálních rovnic

$$p_o'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$
$$p_j'(t) = -(\lambda + j\mu)\, p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t) \text{ pro } 1 \le j < n,$$
$$p_j'(t) = -(\lambda + n\mu)\, p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + n\mu p_{j+1}(t) \text{ pro } n \le j < +\infty.$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \ne i$. Stejně jako v odstavci ¨11.8 se spokojíme s určením limitních pravděpodobností podle věty 10.1. V uvažovaném případě dostaneme

$$\rho_0 = 1,$$
$$\rho_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \text{ pro } 1 \le j \le n,$$
$$\rho_j = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j \text{ pro } n < j < +\infty.$$

Je zřejmé, že řada $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j = \sum_{j=0}^{n}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j$ konverguje právě tehdy, když $\frac{\lambda}{\mu} < n$. Její součet označíme R. Rozlišíme dva případy.

Je-li $\frac{\lambda}{\mu} < n$, pak limitní rozdělení existuje a platí

$$\pi_j = \frac{1}{j!R}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \text{ pro } 0 \le j \le n,$$

$$\pi_j = \frac{n^n}{n!R}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j \text{ pro } n < j < +\infty.$$

Je-li $\frac{\lambda}{\mu} \ge n,$ pak limitní rozdělení neexistuje. Tuto situaci můžeme interpretovat tak, že fronta se prodlužuje „do nekonečna“.

11.10 Systém $(\mathrm{M/M/1})$

Tento systém je speciálním případem systému $(\mathrm{M/M/1})$, vztahy odvozené v předcházejícím odstavci mají jednodušší tvar. Pro součet řady $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j$ zřejmě platí

$$R = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \text{ pro } \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

$$R = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = +\infty \text{ pro } \frac{\lambda}{\mu} \ge 1.$$

Limitní rozdělení existuje pouze v případě $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, platí

$$\pi_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \text{ pro } j \ge 0.$$

Limitní pravděpodobnosti mají tedy geometrické rozdělení s parametrem λ/μ. Limitní rozdělení můžeme interpretovat jako rozdělení počtu požadavků v nějakém ustáleném provozu systému.

Na závěr tohoto odstavce ukážeme, jak se pomocí známého limitního rozdělení počítají základní provozní charakteristiky systému $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/1)$.

Střední hodnota počtu požadavků

Střední hodnota počtu požadavků v systému je rovna

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Variance počtu požadavků

Pro **varianci počtu požadavků** v systému dostaneme

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2\pi_j - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}.$$

Poznámka. Při výpočtu $\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j$ a $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\pi_j$ se využívá věty o derivaci konvergentní řady. Věta se aplikuje na řadu $\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j$.

Střední hodnota délky fronty

Střední hodnota délky fronty se počítá ze vztahu

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_{j+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Spočteme rozdíl mezi středními hodnotami počtu požadavků a délkou fronty, dostaneme $\dfrac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} - \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \dfrac{\lambda}{\mu}.$

Výsledek je na první pohled paradoxní. Očekávali bychom, že tento rozdíl bude roven 1.

Kontrolní otázky:

1. Jaká je struktura systému hromadné obsluhy (SHO)?
2. Popište stručně činnost SHO.
3. Jaké jsou základní charakteristiky SHO?
4. Charakterizujte Poissonův vstupní tok požadavků.
5. Čím je charakterizován mechanismus obsluhy?
6. Co se rozumí pod pojmem „režim obsluhy“?

7. Jak se klasifikují SHO podle chování požadavků, které nemohou být okamžitě obslouženy?
8. Popište klasifikaci SHO podle Kendalla?
9. Jaké jsou základní metody řešení úloh v oblasti SHO?
10. Kdy je výhodné pracovat se systémem $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/\infty)$?
11. Jak se počítají základní provozní charakteristiky SHO?

Korespondenční úkol č. 11. Uvažujte SHO se dvěma obsluhujícími linkami (např. dvojitá telefonní budka). Pravděpodobnost příchodu zákazníka během časového intervalu $(t, t+h)$ je $\lambda h + o(h)$. Pravděpodobnost, že zákazník, který je v čase t ještě obsluhován, bude v průběhu intervalu $(t, t+h)$ obsloužen, je $\mu h + o(h)$. Zákazníci, jež nemohou být ihned obslouženi, se řadí do jediné fronty.

a) Sestavte diferenciální rovnice pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$, že v čase t bude v systému celkem (v obsluze i ve frontě) právě j zákazníků.
b) Zjistěte, zda existují v tomto případě limitní pravděpodobnosti a pokud ano, spočtěte je.
c) Určete střední hodnotu počtu zákazníků v systému za ustáleného provozu.

Pojmy k zapamatování:

- systém hromadné obsluhy (SHO),
- požadavky (zákazníci),
- obsluhovací linka (kanál obsluhy),
- systém s čekací frontou,
- systém s odmítáním požadavků (systém se ztrátami),
- smíšený systém,
- Poissonův vstupní tok,
- Erlangův vstupní tok,
- regulární vstupní tok,
- deterministický vstupní tok,
- doba trvání obsluhy,
- kapacita obsluhy,
- dostupnost obsluhy,
- priorita v obsluze (slabá priorita, silná priorita),
- režimy fronty (FIFO, LIFO, SIRO),
- střední hodnota počtu požadavků v systému,

- rozptyl počtu požadavků v systému,
- střední hodnota délky fronty.

Shrnutí

Tato kapitola je věnována speciálně problematice systémů hromadné obsluhy. Obsahuje jednak popis struktury systému hromadné obsluhy a základních charakteristik jeho prvků, jednak analytická řešení vybraných systémů, jmenovitě systémů $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/\infty)$ a $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Pro uvedené systémy jsou spočteny limitní pravděpodobnosti jednotlivých stavů vztahující se k ustálenému provozu. V závěrečném odstavci, věnovaném systému $(\mathrm{M}/\mathrm{M}/1)$, je vysvětleno, jak se z hodnot limitních pravděpodobností počítají některé provozní charakteristiky (střední hodnota a rozptyl počtu požadavků v systému, střední hodnota délky fronty).

LITERATURA

[1] ALLEN, L. J. S., ALLEN, E. J. A comparison of three stochastic population models with regard to persistence time. *Theoretical Population Biology*, 2003, vol. 64, p. 439-449.

[2] BAILEY, N. T. *The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences*. New York: Wiley 1963.

[3] BENEŠ, V. *Náhodné procesy*. In: Pravděpodobnost a statistika na střední škole. Praha: matfyzpress 2005, s. 73-83.

[4] DEMEL, J. *Operační výzkum* [online]. Studijní materiál Fakulty stavební ČVUT [cite 7. 3. 2011]. Dostupné na http://kix.fsv.cvut.cz/~demel/ped/ov/ov.pdf.

[5] DUPAČ, V., DUPAČOVÁ, J. *Markovovy procesy I*. Praha: SPN 1975.

[6] DUPAČ, V., DUPAČOVÁ, J. *Markovovy procesy II*. Praha: SPN 1980.

[7] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Application*. Vol. 1. New York: Wiley 1957.

[8] FRAUENTHAL, J. C. *Mathematical Modelling in Epidemiology*. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[9] GANTMACHER, F. R. The Theory of Matrices, Vol. I. American Mathematical Soc., 1959; p5eklad *Teorija matric*. Moskva: Nauka 1966.

[10] HAVRDA, J. *Stochastické procesy a teorie informace*. Praha: ČVUT Praha 1982.

[11] JABLONSKÝ, J. Operační výzkum. Kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3. vydání. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

[12] KARLIN, S. A. *First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press 1968.

[13] KARLIN, S., TAYLOR, H. M. *A Second Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press 1981.

[14] KOŘENÁŘ, V. *Stochastické procesy*. Praha: VŠE Praha 1998.

[15] KŘIVÝ, I. *Náhodné procesy*. Ostrava: PřF OU, 2005.

[16] MALÍK, M. *Počítačová simulace*. Praha: UK Praha 1989.

[17] NORRIS, J. R. *Markov Chains.* Cambridge University Press 1997.

[18] POSPÍŠIL, Z. *Effect of Residence in Various Drinking Environments*. In 5th International Conference APLIMAT 2006. Bratislava: FX s.r.o., 2006. ISBN 80-967305-4-1.

[19] PRÁŠKOVÁ, Z., LACHOUT, P. *Základy náhodných procesů I*. Praha: Karolinum 1998.

[20] PRÁŠKOVÁ, Z., LACHOUT, P. *Základy náhodných procesů II*. Praha: Karolinum 2005.

[21] STĚPANOV, V. V. *Kurs diferenciálních rovnic*. Praha: 1952.

[22] ŠTĚPÁN, J. *Teorie pravděpodobnosti*. Praha: Academia 1987.