

Modelování



Základy metody konečných prvků

Tomáš Hruš

Modelování

Základy metody konečných prvků

Tomáš Hruš

Úvod

Skripta *Modelování - základy metody konečných prvků* mohou, jak doufám, posloužit nejen studentům bakalářského programu na Strojní fakultě TUL. Pokusil jsem se zde vyložit hlavní myšlenky, na kterých je metoda konečných prvků postavena. A pokusil jsem se to udělat způsobem, který by byl co nejlépe přístupný studentům strojařiny. Je pravděpodobné, že některým čtenářům se budou některá odvození zdát zbytečně rozvláčná. Pro ně bude jistě hračkou přeskočit kroky, které jsou jim zřejmé. Věřím však, že pro studenty, kteří se teprve nedávno seznámili s maticovým počtem, může rozvedení některých kroků být víc než užitečné.

V první kapitole skript jsou zopakovány některé pojmy ze základní pružnosti a pevnosti a jsou převedeny do maticového zápisu, ve kterém figurují v následujících kapitolách.

Druhá kapitola podává výklad rovinné úlohy MKP počínaje vlastnostmi sítě, přes odvození tuhostní matice prvku a jejích vlastností až po sestavení celkové tuhostní matice a jejích vlastností, matice pravé strany a jejich modifikace.

Ve třetí kapitole je naznačeno, jakým způsobem se dají zobecnit úvahy z kapitoly druhé. Čtvrtá kapitola se stručně věnuje rotačně symetrickým úlohám.

Rozsáhlá pátá kapitola ukazuje odvození tuhostní matice prutu pro prostorovou prutovou soustavu s tuhými styčníky. Takovou soustavu lze zjednodušit na soustavu s kloubovými styčníky.

Text jsem doplnil několika příklady. Jsou od ostatního textu odlišené nepatrně menším písmem a hustším řádkováním. Každý z příkladů je uvozen symbolem kličky \curvearrowright a ukončen symbolem \checkmark . Pomocí symbolu \curvearrowright jsou příklady také vyznačeny v obsahu.

Matice jsou ve skriptech označeny tučným podtrženým symbolem. Například tuhostní matice $\underline{\mathbf{K}}$, matice elastických koeficientů $\underline{\mathbf{E}}$ a podobně. Vektory jsou označeny obvyklým způsobem, například vektor posunutí \vec{u} .

Abych zdůraznil to, že matice je sloupcová, použil jsem neobvyklé značení, využívající fakt, že o sloupcové matici se někdy mluví jako o vektoru (např. vektor pravé strany). Není to ovšem vektor ve fyzikálním třírozměrném prostoru, v němž řešíme naši úlohu, ale vektor v nějakém matematickém vícerozměrném prostoru. Sloupcové matice jsou proto v textu označeny tučným symbolem se šipkou dole. Uvedme například matici poměrných deformací $\underline{\underline{\epsilon}}$ nebo matici zobecněných sil $\underline{\underline{F}}$.

T. Hruš, květen 2019

Obsah

1	Zakladní pojmy z mechaniky	5
1.1	Posunutí	5
1.2	Poměrná deformace	5
1.2.1	Normálová poměrná deformace	6
1.2.2	Zkos	7
1.3	Matice diferenciálních operátorů	9
1.3.1	Matice diferenciálních operátorů v rovině	10
1.4	Hookův zákon	11
1.4.1	Rovinná napjatost	12
1.4.2	Rovinná deformace	13
	⇨ Příklad – rovinné pole posuvů	15
1.5	Castiglianova věta	18
1.5.1	Castiglianova věta pro momenty a natočení	19
1.5.2	Lineární materiál	19
2	Rovinná úloha metody konečných prvků	20
2.1	Analytické a numerické řešení	20
2.2	Síť	21
	⇨ Příklad – síť	22
2.3	Bázové funkce	23
2.3.1	inverze matice \underline{S}	26
	⇨ Příklad – matice \underline{S}	28
2.4	Deformační energie prvku	29
2.5	Tuhostní matice prvku	30
2.5.1	Rozměry a symetrie tuhostní matice prvku	30
	⇨ Příklad – tuhostní matice prvku	31
2.6	Rozbor tuhostní matice prvku	32
2.6.1	Bloková struktura tuhostní matice prvku	36
2.7	Celková tuhostní matice soustavy	37
	⇨ Příklad – struktura celkové tuhostní matice	40
2.7.1	Symetrie celkové tuhostní matice	41
2.7.2	Singularita celkové tuhostní matice	41
2.7.3	Diagonální členy celkové tuhostní matice	41

2.7.4	Mimodiagonální členy celkové tuhostní matice	41
2.7.5	Pásovost a řídkost celkové tuhostní matice	42
2.7.6	Úsporné uložení celkové tuhostní matice v paměti počítače	43
2.8	Silové okrajové podmínky	43
2.8.1	Objemové síly	44
2.8.2	Povrchové síly	44
2.8.3	Ekvivalentní uzlové síly	45
2.8.4	Osamělé síly	45
	⇨ Příklad – tíha a spojitě zatížení	46
2.8.5	Sestavení pravé strany	48
2.9	Soustava rovnic	48
2.10	Deformační okrajové podmínky – modifikace soustavy rovnic	48
2.10.1	Odebrání jednoho stupně volnosti v uzlu	48
2.10.2	Logická eliminace neznámé	49
2.10.3	Vynucený posuv uzlu	49
	⇨ Příklad – vazby	50
2.11	Řešení soustavy rovnic	50
2.12	Deformace tělesa	50
	⇨ Příklad – zobrazení deformací	50
2.13	Poměrné deformace a napětí	51
2.14	Výsledek v prvcích a v uzlech	51
3	Další typy prvků	52
3.1	Trojúhelníkový prvek se šesti uzly	52
3.2	Čtyřstěn s deseti uzly	54
3.3	Šestistěn	56
3.4	Shrnutí	56
4	Rotačně symetrické úlohy	57
5	Prutové soustavy s tuhými styčníky	60
5.1	Zatížení na konci prutu	60
5.2	Spojitě zatížení prutu	61
5.3	Změna teploty	62
5.4	Výsledné zobecněné posuvy způsobené zatížením	63
5.5	Stanovení matice \underline{B}	63
5.5.1	Lokální soustava souřadnic $\{\xi, \eta, \zeta\}$	64
5.5.2	První sloupec matice \underline{B}	65
5.5.3	Působení sil F_y a F_z	67
5.5.4	Působení momentů M_x , M_y a M_z	67
5.5.5	Výsledný tvar matice \underline{B}	71
5.5.6	Vliv posouvajících sil	71
5.6	Stanovení matice \underline{C}	72

5.7	Zobecněné posuvy způsobené druhým uzlem	72
5.7.1	Transformační matice posuvů $\underline{\mathbf{T}}^{(u)}$	73
5.8	Zobecněné posuvy uzlu \mathbf{m}	76
5.9	Rovnice rovnováhy uzlu \mathbf{m}	76
	↔ Příklad – prutová soustava se čtyřmi pruty (bez použití tuhostních matic) .	77
5.10	Tuhostní matice prutu	81
5.10.1	Transformační matice sil $\underline{\mathbf{T}}^{(F)}$	81
5.10.2	Sestavení tuhostní matice prutu	84
5.10.3	Symetrie tuhostní matice prutu	85
	↔ Příklad – prutová soustava se čtyřmi pruty (s použitím tuhostních matic) .	86
5.11	Vazby	87
5.11.1	Pružina ze styčnicku k rámu	87
5.11.2	Pružina mezi styčníky	88
5.11.3	Prut s kloubovými styčníky	88
5.11.4	Styčník spojený prutem s rámem	89
5.12	Prutová soustava s kloubovými styčníky	89
5.13	Shrnutí	89

Kapitola 1

Zakladní pojmy z mechaniky

Pojmy z této kapitoly jsou studentům známé už ze základních kurzů mechaniky. Zde je pouze zopakujeme, zobecníme a přepíšeme s použitím maticové symboliky.

1.1 Posunutí

Když se těleso deformuje, jednotlivé jeho body mění svou polohu. Například bod A se posune do bodu A' , bod B do bodu B' a podobně. Vektor $\overrightarrow{AA'}$ nazveme *vektorem posunutí bodu A* . Každý bod tělesa má své souřadnice x, y, z a svůj vektor posunutí \vec{u} , který mu můžeme přiřadit. Vektor \vec{u} je tedy funkcí souřadnic. To zapíšeme obvyklým způsobem

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z). \quad (1.1)$$

Vztah (1.1) popisuje *pole posuvů* tělesa.

Vektor \vec{u} má tři složky $\vec{u} = [u, v, w]$ a každá složka je funkcí souřadnic. Předcházející vztah můžeme proto také rozepsat do tří vztahů

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2 Poměrná deformace

Mění-li body tělesa svou polohu, nemusí to ještě znamenat, že se těleso zdeformuje. Když například šroubujeme šroub do otvoru se závitem, všechny body šroubu mění svou polohu, k deformacím však nedochází. Musíme proto najít způsob, jak z posuvů vypočítat poměrné deformace.

Stejně jako každému bodu tělesa přísluší vektor posuvu, bude mít každý bod tělesa nějaké (třeba i nulové) poměrné deformace. Mluvíme o *poli poměrných deformací*.

1.2.1 Normálová poměrná deformace

Podívejme se na obrázek 1.1. Jde o jednoosou deformaci. Bod A se z původní souřadnice x posune do polohy $x + u(A)$. Bod B se z původní souřadnice $x + dx$ posune do polohy $x + dx + u(B)$. Posuv $u(A)$ je posuv bodu na souřadnici x , posuv $u(B)$ znamená posuv bodu, který má souřadnici $x + dx$. Platí tedy

$$\begin{aligned} u(A) &= u(x), \\ u(B) &= u(x + dx). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Posuv $u(B)$ vyjádříme pomocí Taylorova rozvoje

$$u(B) = u(x + dx) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{2! \partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^3 u}{3! \partial x^3} dx^3 + \dots, \quad (1.4)$$

z něhož použijeme pouze první dva členy

$$u(B) = u(x + dx) = u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (1.5)$$

Z obrázku 1.1 přímo vidíme shodnou délku úseček

$$dx + u(B) = u(A) + dx', \quad (1.6)$$

čili

$$dx' = dx + u(B) - u(A). \quad (1.7)$$

Poměrná deformace ε úsečky AB je

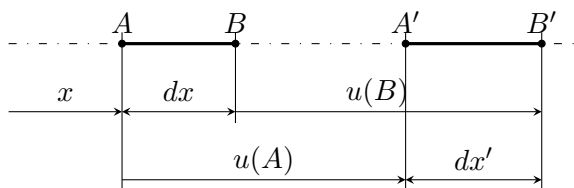
$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx + u(B) - u(A) - dx}{dx}. \quad (1.8)$$

Dosadíme z (1.3) a (1.5) a dostaneme první *Cauchyho vztah*

$$\varepsilon = \frac{dx + u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u(x) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Výše uvedené úvahy se týkaly první osy souřadnicové soustavy. Stejně bychom mohli postupovat i u druhé a třetí osy a dostali bychom podobné vztahy. Výsledkem jsou první tři *Cauchyho vztahy*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.10)$$



Obr. 1.1: Sousední body A a B se při jednoosé deformaci posunou do bodů A' a B' . Poměrná deformace úsečky AB je $\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx}$.

1.2.2 Zkos

Přímky AB a AC svírají před deformací pravý úhel, zatímco po deformaci úhel ostrý – viz obr. 1.2. Body A, B a C mají souřadnice

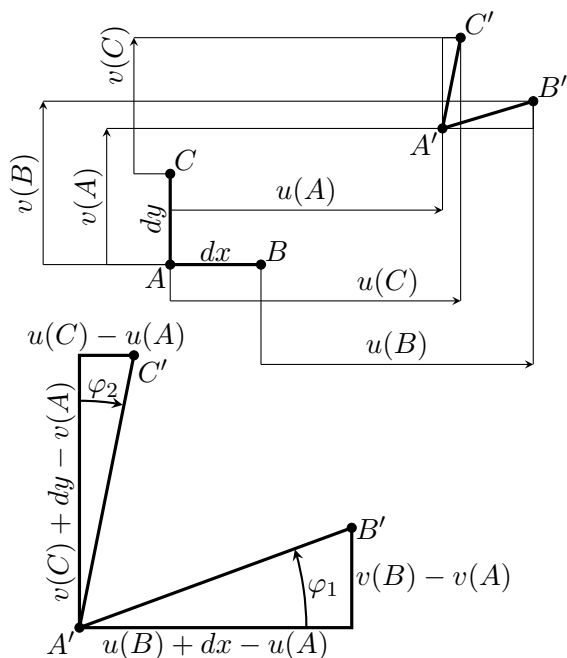
$$\begin{aligned} A &= [x, y], \\ B &= [x + dx, y], \\ C &= [x, y + dy]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Složky posuvů bodů B a C vyjádříme pomocí prvních dvou členů příslušných Taylorových řad:

$$\begin{aligned} u(B) &= u(x + dx, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ v(B) &= v(x + dx, y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \\ u(C) &= u(x, y + dy) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ v(C) &= v(x, y + dy) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Na obrázku 1.2 vidíme, že platí

$$\tan(\varphi_1) = \frac{v(B) - v(A)}{u(B) + dx - u(A)}. \tag{1.13}$$



Obr. 1.2: Úsečky AB a AC byly před deformací navzájem kolmé, ve zdeformovaném stavu už kolmé nejsou. Úsečka AB se pootočí o úhel φ_1 , úsečka AC o úhel φ_2 . Změna původně pravého úhlu CAB je rovna $\varphi_1 + \varphi_2$.
Dole: trojúhelníky, ze kterých určíme velikosti úhlů φ_1 a φ_2 .

Budeme předpokládat, že úhel φ_1 je malý a že tedy

$$\tan(\varphi_1) \doteq \varphi_1. \quad (1.14)$$

Dosažením z 1.12 dostaneme po úpravě

$$\varphi_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}. \quad (1.15)$$

Předpokládejme, že velikost ε_1 je velmi malá a proto bude jmenovatel v posledním vztahu velmi blízký jedničce. Dostáváme

$$\varphi_1 = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Analogickým postupem je možné určit velikost úhlu φ_2 :

$$\varphi_2 = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.17)$$

Součet $\varphi_1 + \varphi_2$ je vlastně změna původně pravého úhlu mezi úsečkami AB a AC . Nazveme ho *zkos* a označíme γ_{12} :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Stejným způsobem je možné určit zbývající dvě složky zkosu. Výsledkem je druhá trojice *Cauchyho vztahů* ve tvaru

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Všechny Cauchyho vztahy mají tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.3 Matice diferenciálních operátorů

Tvary na pravé straně ve vztazích (1.20) nejsou zlomky, ale vyjádření derivace. Můžeme např. říct, že tvar $\partial f / \partial x$ vyjadřuje předpis aplikuj operátor derivování podle x na funkci f . Z toho důvodu bývá zápis někdy upravován do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} f,$$

který názorněji odděluje operátor (zde derivování podle x) od operandu (funkce f). Přepišme Cauchyho vztahy tímto způsobem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} u, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} v, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} w, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} v, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial y} w, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x} w + \frac{\partial}{\partial z} u. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Pokud operátory uspořádáme vhodně do matice, můžeme vztahy (1.21) zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{1.22}$$

Matici

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

nazveme *maticí diferenciálních operátorů*. Vztah (1.22) můžeme pak přepsat do podoby

$$\underline{\varepsilon}_{\vec{r}} = \underline{D} \cdot \vec{u}, \quad (1.24)$$

kde $\underline{\varepsilon}_{\vec{r}}$ je *sloupcová matice poměrných deformací*.

1.3.1 Matice diferenciálních operátorů v rovině

Pro rovinnou deformaci bude mít vektor \vec{u} pouze dvě složky a z matice poměrných deformací zmizí všechny složky, které mají v indexu písmeno z . Cauchyho vztahy v maticové podobě nabývají tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

a pro matici diferenciálních operátorů \underline{D} platí

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

1.4 Hookův zákon

Pro jednoosou deformaci (např. při tahové zkoušce) má Hookův zákon známý tvar

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.27)$$

resp.

$$\varepsilon = E^{-1}\sigma. \quad (1.28)$$

Ve třech osách můžeme napsat

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Vezmeme-li v úvahu, že platí vztah

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu), \quad (1.30)$$

dostaneme maticový tvar vztahů (1.29) v této podobě:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Vzhledem k analogii se vztahem (1.28) označujeme matici z předcházejícího vztahu jako $\underline{\mathbf{E}}^{-1}$, tedy

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{E}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (1.32)$$

kde

$$\underline{\mathbf{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Matici elastických koeficientů $\underline{\mathbf{E}}$ dostaneme inverzí matice $\underline{\mathbf{E}}^{-1}$ a má tvar

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{E}{1+\mu} \begin{bmatrix} \frac{1+\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1+\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1+\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Hookův zákon pak zapíšeme takto

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.35)$$

1.4.1 Rovinná napjatost

Při rovinné napjatosti platí

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0, \\ \tau_{yz} &= 0, \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Dosadíme do vztahu (1.31)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

a dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_x, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Třetí složka normálové poměrné deformace ε_z vychází nenulová. To znamená, že *rovinné napjatosti odpovídá prostorová (třiosá) deformace!*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

1.4.2 Rovinná deformace

Při rovinné deformaci platí

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dosazením do Hookova zákona

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \begin{bmatrix} \frac{1+\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1+\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1+\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{1+\mu}{1-2\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_y \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_x + \frac{1+\mu}{1-2\mu} \varepsilon_y \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_y \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Třetí složka napětí σ_z vychází nenulová. To znamená, že rovinné deformaci odpovídá prostorová (třiosá) napjatost!

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \begin{bmatrix} \frac{1+\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1+\mu}{1-2\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

⇨ Příklad – rovinné pole posuvů

Deformace tělesa je možné měřit například optickými metodami. Řekněme, že budeme určovat napětí na povrchu ocelové desky, přičemž známe modul pružnosti a Poissonovo číslo materiálu. Na desku jsou natištěné body, které jsou snímány kamerami. Výsledkem měření je tabulka, která pro každý bod obsahuje jeho souřadnice $[x, y]$ a složky jeho vektoru posuvu $[u, v]$.

Podívejme se na část takové tabulky, která obsahuje šestici bodů ležících v těsné blízkosti. Souřadnice bodů a jejich posuvy shrnuje následující tabulka

č.	x [m]	y [m]	u [m]	v [m]
1	11.3502	-6.2011	0.0196922	-0.00372062
2	11.3703	-6.0596	0.0196944	-0.00372568
3	11.3781	-5.9511	0.0197015	-0.00373158
4	11.2985	-5.9808	0.0197015	-0.00373719
5	11.2001	-6.0015	0.0197098	-0.00373861
6	11.2832	-6.1143	0.0197029	-0.00373217

Protože jsme si zvolili šest bodů, můžeme interpolovat funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ jako polynomy druhého stupně, tj. hledat celkem dvě šestice koeficientů pro dva interpolační polynomy. Tyto polynomy mají tvar

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3y + a_4y^2 + a_5xy, \\ v &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3y + b_4y^2 + b_5xy. \end{aligned}$$

Hodnoty koeficientů a_0 až b_5 musejí být takové, aby hodnoty funkcí u a v v bodech 1 až 6 odpovídaly hodnotám v tabulce. Dostaneme

$$\begin{aligned} u &= 0.00861179 - 0.00151627x + 0.000249752x^2 - 0.00668489y + 0.0000990934y^2 + 0.000698295xy, \\ v &= 0.0614503 - 0.0105835x + 0.000418328x^2 + 0.00197173y - 0.0000193251y^2 - 0.00019936xy. \end{aligned}$$

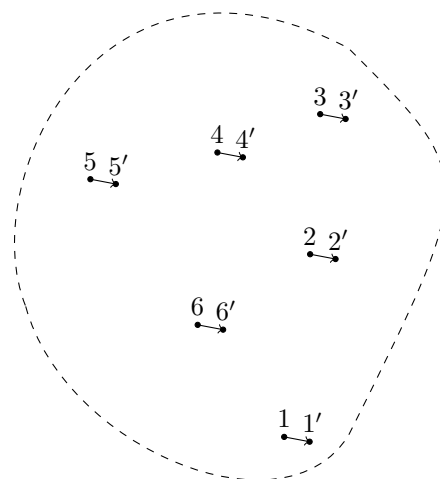
Tyto vztahy jsou tedy polynomiální interpolací posuvů u a v v dané oblasti. Graf interpolační funkce u je na obrázku 1.4.

Ve skutečnosti bude na desce velké množství bodů. V takovém případě nebude možné si volit různé šestice a hledat lokální interpolace. Pro takový případ budeme místo interpolace používat regresi.

Použitím Cauchyho vztahů (1.21) určíme rovinné složky poměrné deformace ve tvaru

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -0.00151627 + 0.000499504x + 0.000698295y, \\ \varepsilon_y &= 0.00197173 - 0.00019936x - 0.0000386502y, \\ \gamma_{xy} &= -0.0172684 + 0.00153495x - 1.17345 \cdot 10^{-6}y. \end{aligned}$$

Pro určení napětí použijeme Hookův zákon. Protože je povrch desky volný (jinak bychom ho nemohli opticky měřit), můžeme předpokládat, že z -ová složka napětí bude nulová a jedná se proto o rovinnou



Obr. 1.3: Malá oblast desky se znázorněnými polohami několika bodů před a po deformaci. Přestože se posuvy na první pohled zdají stejné, tabulka s číselnými hodnotami dokládá, že tomu tak není. Rozdílné posuvy jednotlivých bodů představují deformaci desky. S deformací souvisí i odpovídající napětí.

napjatost. Použijeme vztah (1.43), v matici ale třetí řádek nahradíme nulami. Tím získáme vztah $\sigma_z = 0$.

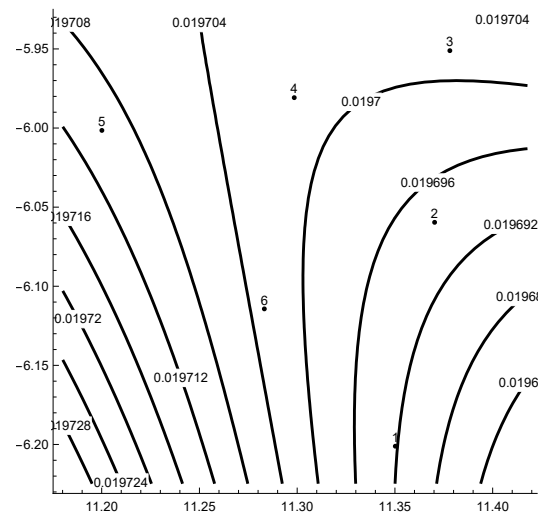
Dosadíme-li $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa a $\mu = 0.3$, dostaneme vztahy pro napětí ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -5.57161 \cdot 10^8 + 2.38086 \cdot 10^8 x + 3.61922 \cdot 10^8 y, \\ \sigma_y &= 8.51456 \cdot 10^8 - 4.41473 \cdot 10^7 x + 6.43098 \cdot 10^7 y, \\ \sigma_z &= 0, \\ \tau_{xy} &= -1.39475 \cdot 10^9 + 1.23977 \cdot 10^8 x - 94778.4 y.\end{aligned}$$

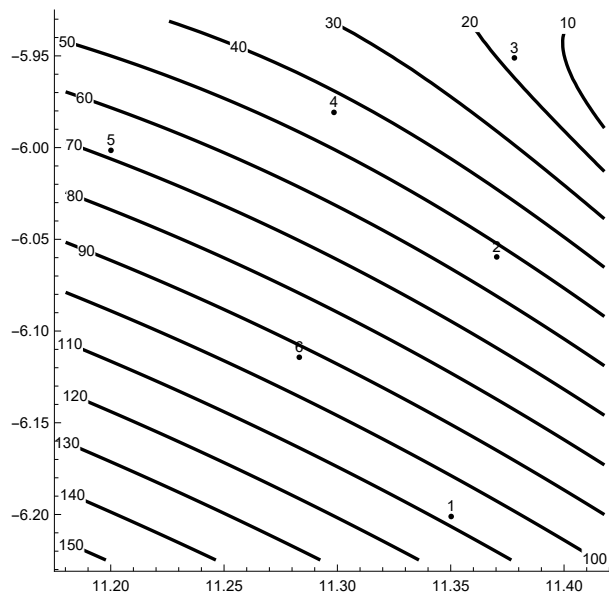
Protože jsme předpokládali rovinnou napjatost, můžeme nyní z napětí určit z -ovou složku poměrné deformace pomocí třetího vztahu z (1.29)

$$\varepsilon_z = -0.000420422 - 0.000277056x - 0.000608903y.$$

Výsledné vztahy můžeme znázornit graficky (posuvy jsou kvadratické funkce souřadnic, napětí a poměrné deformace jsou funkce lineární), nebo tabulovat. Hodnoty poměrných deformací a napětí v šesti zvolených bodech uvádějí tabulky na následující straně.



Obr. 1.4: Graf získané interpolační funkce $u(x, y)$ v okolí tabelovaných bodů.



Obr. 1.5: Graf ekvivalentního napětí v MPa (podle hypotézy HMM) u v okolí bodů z tabulky.

č.	ε_x [-]	ε_y [-]	ε_z [-]	γ_{xy} [-]
1	$-1.76995 \cdot 10^{-10}$	$-5.13762 \cdot 10^{-11}$	$2.10804 \cdot 10^{-10}$	$1.60908 \cdot 10^{-10}$
2	$-6.81465 \cdot 10^{-11}$	$-6.08523 \cdot 10^{-11}$	$1.19076 \cdot 10^{-10}$	$1.91594 \cdot 10^{-10}$
3	$1.15146 \cdot 10^{-11}$	$-6.66009 \cdot 10^{-11}$	$5.08489 \cdot 10^{-11}$	$2.03439 \cdot 10^{-10}$
4	$-4.89853 \cdot 10^{-11}$	$-4.95839 \cdot 10^{-11}$	$9.09869 \cdot 10^{-11}$	$8.12922 \cdot 10^{-11}$
5	$-1.12591 \cdot 10^{-10}$	$-2.91668 \cdot 10^{-11}$	$1.30854 \cdot 10^{-10}$	$-6.97226 \cdot 10^{-11}$
6	$-1.4985 \cdot 10^{-10}$	$-4.13739 \cdot 10^{-11}$	$1.76514 \cdot 10^{-10}$	$5.79641 \cdot 10^{-11}$

č.	σ_x [MPa]	σ_y [MPa]	τ_{xy} [MPa]
1	-99.1469	-48.4162	12.9964
2	-43.1494	-40.2037	15.4749
3	-2.02377	-33.5704	16.4316
4	-31.7245	-31.9663	6.5659
5	-62.644	-28.9534	-5.63144
6	-83.6839	-39.8762	4.68171

✓

1.5 Castiglianova věta

Představme si těleso, na které působí síly. Velikost všech sil postupně vzrůstá z nuly do maxima. Je-li těleso lineární (platí-li Hookův zákon), jsou posuvy působíšť sil přímo úměrné velikosti sil. Práce všech sil má velikost

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i u_i, \quad (1.44)$$

kde u_i je posuv působíště síly do směru síly.

Práce sil zůstane akumulována v tělese jako jeho deformační energie U . Deformační energie je tedy závislá na velikostech působících sil F_i . Protože velikosti sil a posuvů spolu vzájemně jednoznačně souvisejí, můžeme také prohlásit, že deformační energie U je funkcí posuvů u_i

$$U = U(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (1.45)$$

Nekonečně malá změna posuvů (variace) δu_i způsobí, že síly vykonají práci

$$\delta W = F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + \dots + F_n \delta u_n, \quad (1.46)$$

čili

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i. \quad (1.47)$$

Variaci deformační energie vyjádříme ve tvaru

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial U}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial u_n} \delta u_n, \quad (1.48)$$

neboli

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i. \quad (1.49)$$

Samozřejmě i práce vykonaná silami při variaci posuvů se změní na deformační energii:

$$\delta W = \delta U, \quad (1.50)$$

neboli

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i. \quad (1.51)$$

Variace δu_i mohou být libovolné (při respektování vazeb). Zvolíme si proto zvláštní případ, kdy pouze jedna položka z $[\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n]$ bude různá od nuly. Předpokládejme například

$$\begin{aligned} \delta u_k &\neq 0, \\ \delta u_i &= 0 \text{ pro } i \neq k. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dosadíme-li z posledního vztahu do (1.51), dostáváme

$$F_k \delta u_k = \frac{\partial U}{\partial u_k} \delta u_k, \quad (1.53)$$

neboli

$$F_k = \frac{\partial U}{\partial u_k}. \quad (1.54)$$

Poslední vztah nazýváme *Castiglianovou větou*.

1.5.1 Castiglianova věta pro momenty a natočení

Zcela analogicky jako pro síly a posuvy je možné odvodit Castiglianovu větu i pro momenty a natočení. V takovém případě dostaneme tvar

$$M_k = \frac{\partial U}{\partial \varphi_k}. \quad (1.55)$$

1.5.2 Lineární materiál

U těles z materiálu s Hookovým zákonem víme, že vztah mezi působící silou a posuvem je lineární. Z toho plyne, že výsledek derivace $\partial U / \partial u_k$ v (1.54) musí být lineárně závislý na u_k . Proto musí u lineárních materiálů U na u_k záviset kvadraticky.

Kapitola 2

Rovinná úloha metody konečných prvků

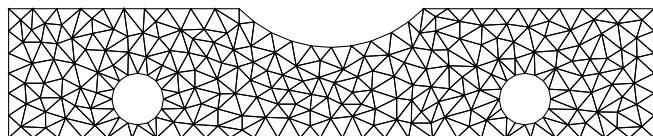
Rovinnou úlohou rozumíme buď rovinnou napjatost, nebo rovinnou deformaci – viz kapitoly 1.4.1 a 1.4.2.

2.1 Analytické a numerické řešení

V pružnosti a pevnosti je materiál považován za kontinuum a jeho chování popisováno diferenciálními rovnicemi. Pro některé jednoduché případy je snadné tyto rovnice přesně vyřešit. Výsledkem je analytické řešení v podobě funkce. Příkladem může být průhyb nosníku jako funkce souřadnice x . Funkce udává funkční hodnotu pro *každou* hodnotu souřadnic.

Většina reálných případů však analyticky vyřešit nejde. V takovém případě nastupuje numerické řešení, nejčastěji metodou konečných prvků. Pomocí metody konečných prvků určíme *konečný* (ačkoli třeba hodně vysoký) počet hodnot hledané funkce v předem daných bodech, nazvaných uzly. Mezi uzly budeme funkční hodnoty interpolovat.

Zvyšováním počtu uzlů můžeme (za cenu zvyšování výpočetních nároků) výsledek zpřesňovat.



Obr. 2.1: Příklad rovinného tělesa pokrytého sítí trojúhelníkových prvků.

2.2 Síť

Prvním krokem metody konečných prvků je rozdělení tělesa na malé jednoduché části – prvky. V rovině se jedná nejčastěji o trojúhelníky a čtyřúhelníky, v prostoru o čtyřstěny a šestistěny. Tvar jednotlivých prvků je určen polohou jejich vrcholů – uzlů.

Síť musí splňovat základní (a dosti evidentní) podmínky:

- prvky pokrývají těleso beze zbytku;
- žádné dva prvky se nesmějí protínat;
- žádný prvek ani jeho část neleží mimo těleso.

Jak ale pokrýt beze zbytku trojúhelníkovými prvky těleso, jehož hranici tvoří křivka? To není možné udělat zcela přesně, můžeme to ale udělat s *libovolnou, předem zvolenou* přesností. Pokud nejsme spokojeni s tím, jak prvky kopírují hranu, můžeme prvky zmenšit. Hrana bude prvky kopírována přesněji.

⇨ **Příklad – síť**

Jednoduchá síť je znázorněna na obrázku 2.2. Každý uzel má dvě souřadnice. Každý prvek je určen třemi uzly. Abychom měli celou síť definovanou, je třeba znát:

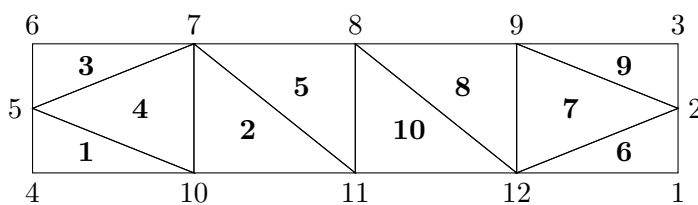
- souřadnice uzlů;
- čísla uzlů, které tvoří vrcholy prvků.

Síť je popsána dvěma tabulkami.

Uzly		
č.	x	y
1	5.0	0.0
2	5.0	0.5
3	5.0	1.0
4	0.0	0.0
5	0.0	0.5
6	0.0	1.0
7	1.25	1.0
8	2.5	1.0
9	3.75	1.0
10	1.25	0.0
11	2.5	0.0
12	3.75	0.0

Prvky			
č.	i	j	k
1	4	10	5
2	10	11	7
3	5	7	6
4	7	5	10
5	11	8	7
6	12	1	2
7	12	2	9
8	9	8	12
9	3	9	2
10	12	8	11

✓



Obr. 2.2: Jednoduchá síť tvořená dvanácti uzly a deseti trojúhelníkovými prvky. Prvky jsou očíslovány tučně.

2.3 Bázové funkce

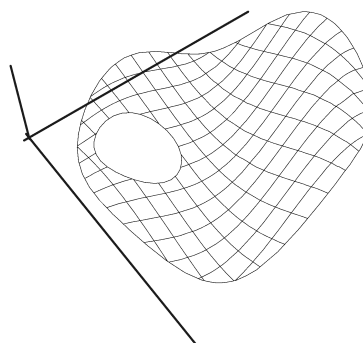
Předpokládejme, že na oblasti Ω hledáme hodnoty funkce $f = f(x, y)$. Jejím grafem je plocha, například jako na obrázku 2.3.

V metodě konečných prvků budeme hledat posuvy. Neznámými tedy budou složky vektoru \vec{u} v uzlech. Vektor posuvů má v rovině dvě složky

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

počet neznámých bude proto roven dvojnásobku počtu uzlů.

Oblast Ω rozdělíme na trojúhelníkové prvky. Skutečný (avšak neznámý a analyticky neřešitelný) průběh funkce \vec{u} uvnitř prvku přibližně nahradíme (aproximujeme) lineární funkcí. Protože vektor \vec{u} má dvě složky, provedeme aproximaci pro každou z nich.



Obr. 2.3: Funkce dvou proměnných na oblasti kruhového tvaru s kruhovým otvorem.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Místo hledání funkcí u a v se od tohoto okamžiku omezíme na hledání šesti koeficientů

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

pro každý prvek. Zapišme vztahy (2.2) maticově

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

neboli

$$\vec{u}(x, y) = \underline{\mathbf{A}}(x, y) \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (2.5)$$

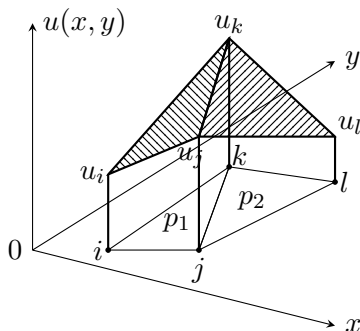
Matici $\underline{\mathbf{A}}$ nazýváme *maticí bázových funkcí*.

Vztah (2.5) vyjadřuje skutečnost, že kdybychom znali hodnoty koeficientů $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$, mohli bychom pro kterýkoli bod prvku (bod se souřadnicemi x, y) získat hodnoty posuvů u a v tak, že souřadnice x a y dosadíme do matice $\underline{\mathbf{A}}$ a vyčíslíme vztah (2.4) resp. (2.5).

Nedochází-li k porušení tělesa, musejí být posuvy spojité. To znamená, že aproximační funkce musejí být zkonstruované tak, aby na sebe na hranicích prvků navazovaly – viz obr. 2.4. Mezi koeficienty α sousedních prvků musí tedy být nějaký vztah. Místo abychom se pokoušeli tento vztah najít, využijeme raději toho, že aproximace nad jednotlivými prvky jsou roviny, procházející body u_i, u_j, u_k a tyto hodnoty můžeme také k vyjádření rovnic rovin použít. Protože hodnoty u jsou pro sousední prvky společné (viz obr. 2.4), budou aproximace na společné hranici navzájem navazovat. Aproximace bude spojitá.

Protože vztah (2.5) platí v každém bodě prvku, platí samozřejmě i v uzlech. Zapišme tedy

$$\begin{aligned} \vec{u}(x_i, y_i) &= \underline{\mathbf{A}}(x_i, y_i) \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \vec{u}(x_j, y_j) &= \underline{\mathbf{A}}(x_j, y_j) \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \vec{u}(x_k, y_k) &= \underline{\mathbf{A}}(x_k, y_k) \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$



Obr. 2.4: Lineární aproximace funkce $u = u(x, y)$ v oblasti sousedících prvků p_1 a p_2 . Skutečný průběh funkce u se s aproximací shoduje pouze v bodech u_i, u_j, u_k a u_l .

Aby průběh funkce u byl spojitý, musí existovat nějaký vztah mezi koeficienty α prvku p_1 a prvku p_2 . Dosáhneme toho tím, že rovnice lineárních funkcí (rovin nad prvky) vyjádříme pomocí funkčních hodnot v uzlech (u_i, u_j, u_k, u_l).

Funkční hodnoty u_j a u_k jsou společné pro oba prvky. Proto bude společná i hrana mezi oběma aproximačními funkcemi a aproximace bude spojitá.

Tyto vztahy můžeme maticově vyjádřit jediným tvarem

$$\begin{bmatrix} \vec{u}(x_i, y_i) \\ \vec{u}(x_j, y_j) \\ \vec{u}(x_k, y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}(x_i, y_i) \\ \underline{\mathbf{A}}(x_j, y_j) \\ \underline{\mathbf{A}}(x_k, y_k) \end{bmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.7)$$

nebo zkráceně

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_i \\ \vec{u}_j \\ \vec{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_i \\ \underline{\mathbf{A}}_j \\ \underline{\mathbf{A}}_k \end{bmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (2.8)$$

Rozepíšeme všechny matice z posledního vztahu a dostaneme

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

neboli

$$\underline{\boldsymbol{\Delta}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.10)$$

kde

$$\underline{\boldsymbol{\Delta}} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

a

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Z (2.10) vyjádříme $\underline{\alpha}$

$$\underline{\alpha} = \underline{\mathbf{S}}^{-1} \cdot \underline{\Delta} \quad (2.13)$$

a dosadíme do (2.5) – dostaneme

$$\vec{u}(x, y) = \underline{\mathbf{A}}(x, y) \cdot \underline{\mathbf{S}}^{-1} \cdot \underline{\Delta}. \quad (2.14)$$

2.3.1 inverze matice $\underline{\mathbf{S}}$

Nabízí se otázka, zda inverzi matice $\underline{\mathbf{S}}$, kterou potřebujeme ve vztahu (2.14), lze vždy provést.

Obecný tvar matice $\underline{\mathbf{S}}$ je

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

a matice \underline{S}^{-1} vychází takto

$$\underline{S}^{-1} = \frac{1}{2s} \cdot \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i & 0 \\ y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i \\ 0 & y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \end{bmatrix},$$

kde s je plocha prvku

$$s = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

Je jasné, že matice \underline{S} nepůjde invertovat pouze v případě, když prvek má nulovou plochu. Při numerickém výpočtu i nenulová ale velmi malá plocha prvku způsobí velkou numerickou chybu při výpočtu hodnoty $1/2s$. To může nastat například pro velmi „štíhlé“ trojúhelníky (tj, takové, jejichž jeden vrcholový úhel se blíží 180° , zatímco zbývající dva úhly jsou velmi malé). Takové prvky jsou proto pro výpočet nepříznivé a pokud se v síti vyskytnou, je vhodné pokusit se síť v dané oblasti upravit.

Nevhodné trojúhelníky odhalíme například pomocí velikosti bezrozměrného poměru plochy trojúhelníka a druhé mocniny jeho obvodu

$$k = \frac{s}{o^2}. \quad (2.17)$$

Ten je maximální pro rovnostranný trojúhelník (cca. 0.048) a s rostoucí štíhlostí trojúhelníka klesá.

⇨ **Příklad – matice \underline{S}**

U sítě z kapitoly 2.2 sestavíme matici \underline{S} pro prvek číslo 5. Z tabulek s definicemi prvků a se souřadnicemi uzlů vyčteme příslušné souřadnice

Prvek č. 5			
Číslo uzlů	$i = 11$	$j = 8$	$k = 7$
Souřadnice uzlů	$x_i = 2.5$	$x_j = 2.5$	$x_k = 1.25$
	$y_i = 0.0$	$y_j = 1.0$	$y_k = 1.5$

a uspořádáme je do matice \underline{S}_5 :

$$\underline{S}_5 = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.5 & 0.0 \\ 1.0 & 2.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.5 & 1.0 \\ 1.0 & 1.25 & 1.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.25 & 1.5 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Inverzní matice \underline{S}_5^{-1} vyjde

$$\underline{S}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & -3.0 & 0.0 & 2.0 & 0.0 \\ -0.4 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & -0.8 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 & -3.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & -0.4 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & -0.8 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

✓

2.4 Deformační energie prvku

Hustota deformační energie Λ má tvar

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}). \quad (2.20)$$

Pro rovinný případ (ať už se jedná o rovinnou napjatost nebo rovinnou deformaci) se tvar zjednoduší na

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}). \quad (2.21)$$

To zapíšeme pomocí matic napětí a poměrných deformací

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (2.22)$$

Za napětí dosadíme z Hookova zákona (1.35)

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}})^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (2.23)$$

Matice $\underline{\underline{E}}$ je symetrická a platí tudíž $\underline{\underline{E}}^T = \underline{\underline{E}}$. Za poměrnou deformaci dosadíme z Cauchyho vztahů (1.24)

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{u}})^T \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{u}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{u}}^T \cdot \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{u}}. \quad (2.24)$$

Nakonec místo skutečných (neznámých) posuvů $\underline{\underline{u}}$ dosadíme jejich aproximaci (2.14)

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}})^T \cdot \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot (\underline{\underline{S}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Podívejme se nyní na součin $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} 1 + 0 \cdot 0 & \frac{\partial}{\partial x} x + 0 \cdot 0 & \frac{\partial}{\partial x} y + 0 \cdot 0 & \frac{\partial}{\partial x} 0 + 0 \cdot 1 & \frac{\partial}{\partial x} 0 + 0 \cdot x & \frac{\partial}{\partial x} 0 + 0 \cdot y \\ 0 \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y} 0 & 0 \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} 0 & 0 \cdot y + \frac{\partial}{\partial y} 0 & 0 \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial y} 1 & 0 \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y} x & 0 \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y} y \\ \frac{\partial}{\partial y} 1 + \frac{\partial}{\partial x} 0 & \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial x} 0 & \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial x} 0 & \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial x} 1 & \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial x} x & \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial x} y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matice \underline{B} vyšla konstantní, čili není funkcí souřadnic. Je to způsobeno tím, že matice bázových funkcí \underline{A} obsahuje pouze lineární a konstantní členy a součin $\underline{D} \cdot \underline{A}$ představuje vlastně jakési zobecněné derivování matice \underline{A} . Při jiné volbě bázových funkcí (bude diskutována později) může matice \underline{B} vyjít závislá na souřadnicích.

Po dosazení $\underline{B} = \underline{D} \cdot \underline{A}$ do (2.25) dostaneme pro hustotu deformační energie vztah

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot (\underline{\underline{S}}^{-1})^T \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}}. \quad (2.26)$$

2.5 Tuhostní matice prvku

Deformační energii prvku dostaneme jako integrál hustoty deformační energie přes celý objem prvku

$$U = \int_{(V)} \left[\frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot (\underline{\underline{S}}^{-1})^T \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}} \right] dV \quad (2.27)$$

Všechny matice v integrandu jsou konstantní. Platí tedy

$$U = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot (\underline{\underline{S}}^{-1})^T \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}} \cdot V, \quad (2.28)$$

kde V je objem prvku. Poslední vztah přepíšeme do podoby

$$U = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Delta}}, \quad (2.29)$$

kde matici

$$\underline{\underline{K}} = (\underline{\underline{S}}^{-1})^T \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot V, \quad (2.30)$$

nazveme *tuhostní maticí prvku*.

2.5.1 Rozměry a symetrie tuhostní matice prvku

Rozměry tuhostní matice prvku můžeme získat analýzou vztahu (2.30). Jednodušší bude ale podívat se na vztah (2.29). Deformační energie je skalární veličina (můžeme ji chápat jako matici 1×1) a dostaneme ji jako součin řádkové matice $\underline{\underline{\Delta}}^T$, matice $\underline{\underline{K}}$ a sloupcové matice $\underline{\underline{\Delta}}$

$$\square = \square \cdot \square \cdot \square$$

Je tedy jasné, že počet řádků a sloupců matice $\underline{\underline{K}}$ musí být roven velikosti matice $\underline{\underline{\Delta}}$. Matice $\underline{\underline{K}}$ má rozměry 6×6 .

Násobíme-li symetrickou matici zleva maticí a zprava transpozicí této matice, dostaneme jako výsledek symetrickou matici. Vztah (2.30) má podobu symetrické matice $\underline{\underline{E}}$, násobené zprava maticí $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1}$ a zleva transpozicí této matice. Z toho plyne, že *tuhostní matice prvku je symetrická*.

⇨ **Příklad – tuhostní matice prvku**

Určíme tuhostní matici prvku číslo 8 z příkladu v kapitole 2.2.

Prvek č. 8			
Čísla uzlů	$i = 9$	$j = 8$	$k = 12$
Souřadnice uzlů	$x_i = 3.75$	$x_j = 2.5$	$x_k = 3.75$
	$y_i = 1.0$	$y_j = 1.0$	$y_k = 0.0$

a uspořádáme je do matice \underline{S}_8 :

$$\underline{S}_8 = \begin{bmatrix} 1.0 & 3.75 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.75 & 1.0 \\ 1.0 & 2.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.5 & 1.0 \\ 1.0 & 3.75 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.75 & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Matice \underline{S}_8^{-1} má tvar

$$\underline{S}_8^{-1} = \begin{bmatrix} -3.0 & 0.0 & 3.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & -0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 3.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 & -0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Předpokládejme, že materiál má modul pružnosti $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa a Poissonovo číslo $\mu = 0.3$. Protože ve vztahu pro hustotu deformační energie pro rovinný problém nefiguruje součin $\sigma_z \varepsilon_z$, musíme matici elastických koeficientů pro rovinný případ (viz vztah (1.43)) upravit tak, že z ní vypustíme třetí řádek. Ze vztahu $\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon}$ tak dostaneme jen tři složky napětí – σ_x , σ_y a τ_{xy} . Matice elastických koeficientů tedy bude mít tvar

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{11} & 1.15385 \cdot 10^{11} & 0 \\ 1.15385 \cdot 10^{11} & 5.0 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 7.69231 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Předpokládejme, že deska má tloušťku $t = 35$ mm. Objem prvku V dostaneme ze známého vztahu

$$V = \frac{1}{2}t \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = \frac{0.035}{2} \begin{vmatrix} 3.75 & 1. & 1 \\ 2.5 & 1. & 1 \\ 3.75 & 0. & 1 \end{vmatrix} = 0.021875 \text{ m}^3. \quad (2.34)$$

Dosadíme do definice tuhostní matice prvku (2.30) a dostaneme

$$\underline{\mathbf{K}}_8 = \begin{bmatrix} 8.682 \cdot 10^9 & 3.365 \cdot 10^9 & -7.0 \cdot 10^9 & -1.346 \cdot 10^9 & -1.682 \cdot 10^9 & -2.019 \cdot 10^9 \\ 3.365 \cdot 10^9 & 1.201 \cdot 10^{10} & -2.019 \cdot 10^9 & -1.076 \cdot 10^9 & -1.346 \cdot 10^9 & -1.093 \cdot 10^{10} \\ -7.0 \cdot 10^9 & -2.019 \cdot 10^9 & 7.0 \cdot 10^9 & 0.0 & 0.0 & 2.019 \cdot 10^9 \\ -1.346 \cdot 10^9 & -1.076 \cdot 10^9 & 0.0 & 1.076 \cdot 10^9 & 1.346 \cdot 10^9 & 0.0 \\ -1.682 \cdot 10^9 & -1.346 \cdot 10^9 & 0.0 & 1.346 \cdot 10^9 & 1.682 \cdot 10^9 & 0.0 \\ -2.019 \cdot 10^9 & -1.093 \cdot 10^{10} & 2.019 \cdot 10^9 & 0.0 & 0.0 & 1.093 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}.$$

✓

2.6 Rozbor tuhostní matice prvku

Tuhostní matice umožní určit deformační energii akumulovanou v prvku za předpokladu, že známe posuvy jeho uzlů $\underline{\Delta}$. Podle Castiglianovy věty (1.54) platí, že derivací deformační energie podle posuvu uzlu j do směru y (tedy podle v_j) je síla na uzel j do směru y

$$\frac{\partial U}{\partial v_j} = R_{jy}. \quad (2.35)$$

Nejprve si zavedeme označení součinu $\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\Delta}$

$$\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\Delta} = \underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Vzhledem k symetrii matice $\underline{\mathbf{K}}$ platí

$$\underline{\mathbf{R}}^T = \left(\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\Delta} \right)^T = \underline{\Delta}^T \cdot \underline{\mathbf{K}}^T = \underline{\Delta}^T \cdot \underline{\mathbf{K}}. \quad (2.37)$$

Dosadíme nyní do vztahu (2.35) z (2.29):

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial v_j} &= \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{1}{2} \cdot \underline{\Delta}^T \underline{K} \cdot \underline{\Delta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{\Delta}^T}{\partial v_j} \underline{K} \cdot \underline{\Delta} + \underline{\Delta}^T \frac{\partial \underline{K}}{\partial v_j} \cdot \underline{\Delta} + \underline{\Delta}^T \underline{K} \cdot \frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial v_j} \right)\end{aligned}$$

Druhý člen v závorce obsahuje derivaci matice \underline{K} podle posuvu v_j . Matice \underline{K} však na posuvech uzlů nezávisí, jak se můžeme přesvědčit pohledem na její definici (2.30). Prostřední člen v závorce je proto nulový a platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial v_j} &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\partial u_i}{\partial v_j}, \frac{\partial v_i}{\partial v_j}, \frac{\partial u_j}{\partial v_j}, \frac{\partial v_j}{\partial v_j}, \frac{\partial u_k}{\partial v_j}, \frac{\partial v_k}{\partial v_j} \right] \underbrace{\underline{K} \cdot \underline{\Delta}}_{\underline{R}} + \underbrace{\underline{\Delta}^T \cdot \underline{K}}_{\underline{R}^T} \cdot \begin{array}{c} \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u_j}{\partial v_j} \\ \frac{\partial v_j}{\partial v_j} \\ \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial v_j} \\ \frac{\partial v_j}{\partial v_j} \end{array} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \left[0, 0, 0, 1, 0, 0 \right] \cdot \underline{R} + \underline{R}^T \cdot \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \left[0, 0, 0, 1, 0, 0 \right] \cdot \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{array} + [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6] \cdot \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right) \\ &= r_4.\end{aligned}$$

Porovnáním posledního vztahu s (2.35) zjistíme, že platí

$$r_4 = R_{jy} \quad (2.38)$$

a tedy

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ R_{jy} \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Podobným postupem získáme i další členy sloupcové matice $\underline{\underline{R}}$:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{kx} \\ R_{ky} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Vztah

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Delta}} \quad (2.41)$$

vyjadřuje fakt, že když danému prvku předepíšeme nějaké posuvy uzlů (tj. hodnoty složek matice $\underline{\underline{\Delta}}$), můžeme určit síly na jednotlivé uzly (složky matice $\underline{\underline{R}}$), kterými tyto posuvy vynutíme.

Dodejme, že naopak to nejde. Vztah $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{\underline{R}}$ by totiž k silám působícím na uzly přiřazoval posuvy. I kdybychom na uzly působili takovými silami, že by prvek byl v rovnováze, může se v této rovnováze nacházet kdekoli v prostoru. To znamená, že existuje nekonečně mnoho různých posuvů, které by takovým silám odpovídaly. Pokud bychom na uzly aplikovali síly, které nezajistí rovnováhu prvku, tak nebudou existovat žádné posuvy, které by takovým silám odpovídaly. To znamená, že matici $\underline{\underline{K}}$ není možné invertovat. *Tuhostní matice prvku je singulární.*

Zapišme vztah $\underline{R} = \underline{K} \cdot \underline{\Delta}$ ve složkách

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{kx} \\ R_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Např. druhá rovnice soustavy má tvar

$$R_{iy} = k_{21}u_i + k_{22}v_i + k_{23}u_j + k_{24}v_j + k_{25}u_k + k_{26}v_k. \quad (2.43)$$

Můžeme tedy říct, že

- k_{21} je síla na uzel i ve směru y , způsobená jednotkovým posuvem uzlu i do směru x ;
- k_{22} je síla na uzel i ve směru y , způsobená jednotkovým posuvem uzlu i do směru y ;
- k_{23} je síla na uzel i ve směru y , způsobená jednotkovým posuvem uzlu j do směru x ;
- k_{24} je síla na uzel i ve směru y , způsobená jednotkovým posuvem uzlu j do směru y ;
- k_{25} je síla na uzel i ve směru y , způsobená jednotkovým posuvem uzlu k do směru x ;
- k_{26} je síla na uzel i ve směru y , způsobená jednotkovým posuvem uzlu k do směru y .

Podobným způsobem je možné identifikovat fyzikální význam dalších členů tuhostní matice prvku. Řádek vždy představuje některou ze složek síly, zatímco sloupec příslušnou složku posuvu.

Snadno pak určíme, že např. člen k_{42} představuje sílu na uzel j ve směru y , způsobenou jednotkovým posuvem uzlu i do směru y , nebo že k_{65} představuje sílu na uzel k ve směru y , způsobenou jednotkovým posuvem uzlu k do směru x a podobně.

Pokud symbolicky zapišeme sílu na uzel k do směru x , způsobenou jednotkovým posuvem uzlu i do směru y takto – „ $R_{kx} // v_i$ “, můžeme tuhostní matici zapsat takto

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \text{„}R_{ix} // u_i\text{“} & \text{„}R_{ix} // v_i\text{“} & \text{„}R_{ix} // u_j\text{“} & \text{„}R_{ix} // v_j\text{“} & \text{„}R_{ix} // u_k\text{“} & \text{„}R_{ix} // v_k\text{“} \\ \text{„}R_{iy} // u_i\text{“} & \text{„}R_{iy} // v_i\text{“} & \text{„}R_{iy} // u_j\text{“} & \text{„}R_{iy} // v_j\text{“} & \text{„}R_{iy} // u_k\text{“} & \text{„}R_{iy} // v_k\text{“} \\ \text{„}R_{jx} // u_i\text{“} & \text{„}R_{jx} // v_i\text{“} & \text{„}R_{jx} // u_j\text{“} & \text{„}R_{jx} // v_j\text{“} & \text{„}R_{jx} // u_k\text{“} & \text{„}R_{jx} // v_k\text{“} \\ \text{„}R_{jy} // u_i\text{“} & \text{„}R_{jy} // v_i\text{“} & \text{„}R_{jy} // u_j\text{“} & \text{„}R_{jy} // v_j\text{“} & \text{„}R_{jy} // u_k\text{“} & \text{„}R_{jy} // v_k\text{“} \\ \text{„}R_{kx} // u_i\text{“} & \text{„}R_{kx} // v_i\text{“} & \text{„}R_{kx} // u_j\text{“} & \text{„}R_{kx} // v_j\text{“} & \text{„}R_{kx} // u_k\text{“} & \text{„}R_{kx} // v_k\text{“} \\ \text{„}R_{ky} // u_i\text{“} & \text{„}R_{ky} // v_i\text{“} & \text{„}R_{ky} // u_j\text{“} & \text{„}R_{ky} // v_j\text{“} & \text{„}R_{ky} // u_k\text{“} & \text{„}R_{ky} // v_k\text{“} \end{bmatrix} \cdot \quad (2.44)$$

2.6.1 Bloková struktura tuhostní matice prvku

Ve schématickém znázornění tuhostní matice si můžeme všimnout, že první dva řádky představují dvě složky síly na uzel i , druhá dvojice řádků složky síly na uzel j a třetí dvojice složky síly na uzel k .

Podobně první dva sloupce představují síly, způsobené jednotkovými posuvy uzlu i do směrů x a y , druhá dvojice sloupců síly, způsobené posuvy uzlu j a třetí dvojice síly, způsobené posuvy uzlu k .

Pokud tuhostní matici rozdělíme na bloky 2×2 platí, že např. druhý blok v prvním blokovém řádku představuje dvě složky (vektor) síly na uzel i , způsobený dvěma složkami (vektorem) posuvu uzlu j .

Označíme-li symbolicky vektor síly na uzel k , způsobený jednotkovými posuvy uzlu j jako „ $\vec{R}_k // \vec{u}_j$ “, můžeme tuhostní matici zapsat pomocí bloků takto

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \text{„}\vec{R}_i // \vec{u}_i\text{“} & \text{„}\vec{R}_i // \vec{u}_j\text{“} & \text{„}\vec{R}_i // \vec{u}_k\text{“} \\ \text{„}\vec{R}_j // \vec{u}_i\text{“} & \text{„}\vec{R}_j // \vec{u}_j\text{“} & \text{„}\vec{R}_j // \vec{u}_k\text{“} \\ \text{„}\vec{R}_k // \vec{u}_i\text{“} & \text{„}\vec{R}_k // \vec{u}_j\text{“} & \text{„}\vec{R}_k // \vec{u}_k\text{“} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

neboli

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{k}}_{ii} & \underline{\mathbf{k}}_{ij} & \underline{\mathbf{k}}_{ik} \\ \underline{\mathbf{k}}_{ji} & \underline{\mathbf{k}}_{jj} & \underline{\mathbf{k}}_{jk} \\ \underline{\mathbf{k}}_{ki} & \underline{\mathbf{k}}_{kj} & \underline{\mathbf{k}}_{kk} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Tři blokové řádky tedy představují postupně síly na uzly i , j a k . Tři blokové sloupce představují síly způsobené posuvy uzlů i , j a k .

2.7 Celková tuhostní matice soustavy

V metodě konečných prvků figurují jako neznámé posuvy uzlů. Uspořádáme všechny neznámé do sloupcové matice $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$ (počet uzlů označíme N_u)

$$\underline{\Delta}_{\rightarrow c} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_{N_u} \\ v_{N_u} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Vnější síly působící na jednotlivé uzly uspořádáme do matice $\underline{F}_{\rightarrow c}$

$$\underline{F}_{\rightarrow c} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ \vdots \\ F_{N_u x} \\ F_{N_u y} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Jedná-li se o lineární úlohu, bude závislost mezi posuvy $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$ a silami $\underline{F}_{\rightarrow c}$ lineární

$$\underline{K}_c \cdot \underline{\Delta}_{\rightarrow c} = \underline{F}_{\rightarrow c}, \quad (2.49)$$

kde matici \underline{K}_c nazveme *celkovou tuhostní maticí soustavy*.

Uspořádáme nejprve matice $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$ a $\underline{F}_{\rightarrow c}$ blokově, když si uvědomíme, že dvojice řádků matice $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$ představuje vždy vektor posuvu příslušného uzlu a dvojice řádků matice $\underline{F}_{\rightarrow c}$ vždy vektor vnější síly na daný uzel. Dostaneme tak

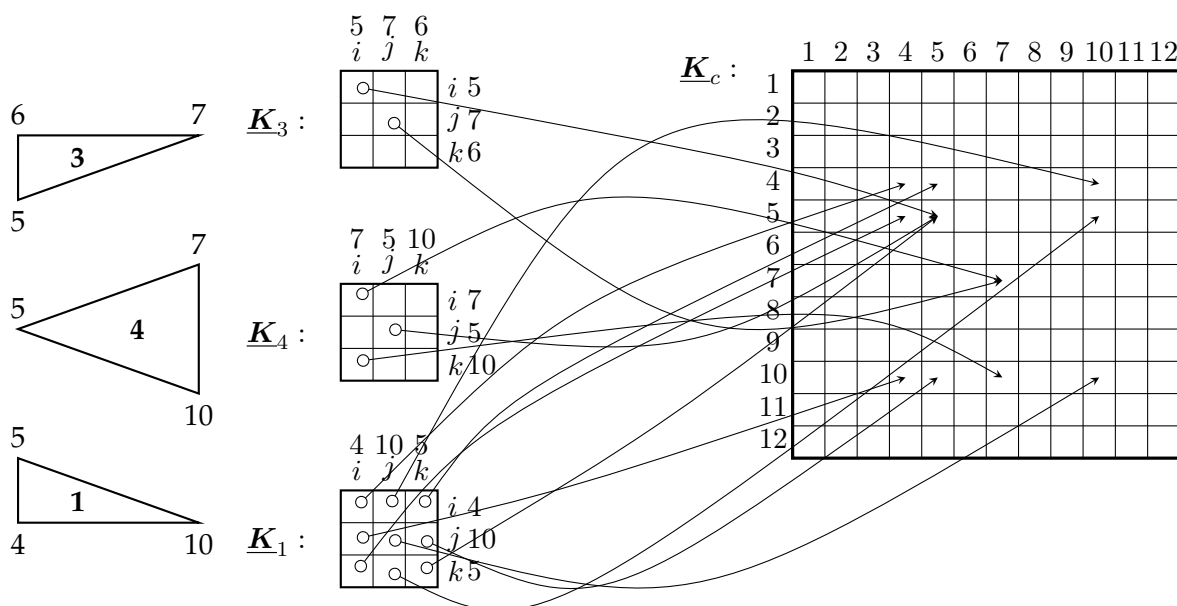
$$\underline{\Delta}_{\rightarrow c} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_{N_u} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

a

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow c} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vdots \\ \vec{F}_{N_u} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Matice $\underline{\mathbf{K}}_c$ z rovnice (2.49) má tedy N_u blokových řádků a sloupců. Označme blok matice $\underline{\mathbf{K}}_c$ v blokovém řádku číslo m a blokovém sloupci číslo n symbolem $\underline{\mathbf{k}}_{c_{m,n}}$. Rovnici (2.49) pak můžeme zapsat

$$\vec{F}_m = \underline{\mathbf{k}}_{c_{m,1}} \cdot \vec{u}_1 + \underline{\mathbf{k}}_{c_{m,2}} \cdot \vec{u}_2 + \dots + \underline{\mathbf{k}}_{c_{m,N_u}} \cdot \vec{u}_{N_u}. \quad (2.52)$$



Obr. 2.5: Schéma sestavování celkové tuhostní matice soustavy.

Tuhostní matice tří prvků (jde o tři prvky sítě z kapitoly 2.2) mají označené bloky pomocí symbolů i, j a k a současně uvedeny hodnoty těchto symbolů z tabulky na straně 22.

Blok $\underline{\mathbf{k}}_{c_{m,n}}$ představuje sílu na uzel m od posuvů uzlu n . Sílu na uzel 4 od posuvů uzlu 4 máme vyjádřenou v tuhostní matici prvku číslo 1 – v bloku $\underline{\mathbf{k}}_{1_{i,i}}$, protože pro tento prvek je $i = 4$. To znamená, tento blok tuhostní matice prvku umístíme do celkové tuhostní matice do (blokového) řádku č. 4 a sloupce č. 4.

Podobně blok $\underline{\mathbf{k}}_{1_{i,j}}$ ($i = 4, j = 10$) umístíme do čtvrtého řádku a desátého sloupce matice $\underline{\mathbf{K}}_c$.

Blok $\underline{\mathbf{k}}_{2_{k,i}}$ ($i = 7, k = 10$) představuje sílu na uzel č. 10 od posuvů uzlu č. 7 a umístíme ho proto na pozici $\underline{\mathbf{k}}_{c_{10,7}}$.

Umísťování jednotlivých bloků je tu (kvůli přehlednosti) znázorněno pouze pro některé bloky některých prvků, postup se ve skutečnosti samozřejmě opakuje pro všechny bloky všech tuhostních matic prvků.

Síla na uzel m se tedy skládá z příspěvků způsobených posuvy jednotlivých uzlů. Blok $\underline{k}_{c_{m,n}}$ představuje sílu na uzel m způsobenou jednotkovým posuvem¹ uzlu n . To je analogické významu bloku tuhostní matice prvku – i ten představuje sílu na uzel způsobenou jednotkovým posuvem jiného uzlu.

Tyto úvahy nás přivádějí k postupu pro sestavení celkové tuhostní matice \underline{K}_c pomocí tuhostních matic jednotlivých prvků. Základní schéma postupu je znázorněno na obrázku 2.5 a vysvětleno v jeho legendě.

Na obrázku vidíme, že v některých blocích celkové tuhostní matice se bude nacházet více bloků různých tuhostních matic prvků. Příkladem může být blok $\underline{k}_{c_{5,5}}$, kde se sejdou tři bloky tuhostních matic prvků. Příslušné bloky budeme sčítat.

Celkovou tuhostní matici soustavy sestavíme tedy ve dvou krocích. V prvním kroku sestavíme matici tvořenou nulovými bloky. Ve druhém kroku ji postupně zaplníme hodnotami. Budeme procházet všechny prvky (cyklus přes p), v každém prvku všechny řádky (cyklus přes r) a v každém řádku všechny sloupce (cyklus přes s):

- vytvoříme matici \underline{K}_c s blokovými rozměry $N_u \times N_u$, vyplněnou nulami
- pro každý prvek $p = 1, 2, \dots, N_p$
 - pro každý řádek $r = i, j, k$
 - * pro každý sloupec $s = i, j, k$
 - hodnotám symbolů r a s přiřadíme odpovídající čísla uzlů r_u a s_u
 - blok $\underline{k}_{p_{r,s}}$ přičteme k bloku $\underline{k}_{c_{r_u, s_u}}$

¹Jednotkovým posuvem se obvykle myslí vektor posuvu o jednotkové velikosti. V našem případě však jde o vektor posuvu s jednotkovými složkami.

⇨ **Příklad – struktura celkové tuhostní matice**

Na příkladu sítě z kapitoly 2.2 si ukážeme strukturu celkové tuhostní matice. Označíme si v ní ty bloky, které budou různé od nuly. To jsou právě ty bloky, do kterých se umístí některý z bloků tuhostních matic prvků.

Prvek č. 1 má uzly očíslované $i = 4, j = 10, k = 5$ (viz tabulka na straně 22). Jednotlivé bloky jeho tuhostní matice se tedy budou umísťovat takto:

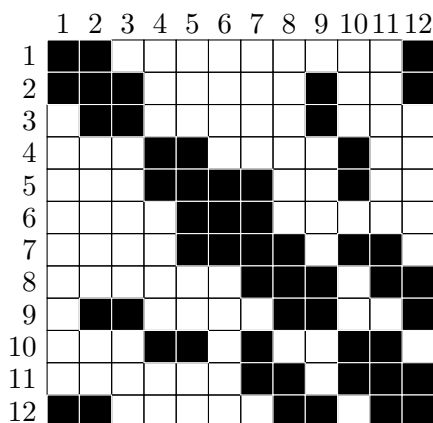
$$\begin{array}{lll} \underline{k}_{1_{i,i}} \rightarrow \underline{k}_{c_{4,4}} & \underline{k}_{1_{i,j}} \rightarrow \underline{k}_{c_{4,10}} & \underline{k}_{1_{i,k}} \rightarrow \underline{k}_{c_{4,5}} \\ \underline{k}_{1_{j,i}} \rightarrow \underline{k}_{c_{10,4}} & \underline{k}_{1_{j,j}} \rightarrow \underline{k}_{c_{10,10}} & \underline{k}_{1_{j,k}} \rightarrow \underline{k}_{c_{10,5}} \\ \underline{k}_{1_{k,i}} \rightarrow \underline{k}_{c_{5,4}} & \underline{k}_{1_{k,j}} \rightarrow \underline{k}_{c_{5,10}} & \underline{k}_{1_{k,k}} \rightarrow \underline{k}_{c_{5,5}} \end{array}$$

V celkové tuhostní matici jsme obsadili devět bloků, jejichž čísla řádků a sloupců odpovídají dvouprvkovým kombinacím čísel i, j a k .

Stejným způsobem umístíme bloky tuhostní matice prvku č. 2. Protože pro druhý prvek platí $i = 10, j = 11, k = 7$, budeme bloky matice \underline{K}_2 umísťovat do celkové tuhostní matice do řádků č. 10, 11 a 7 a v každém z nich do sloupců 10, 11 a 7.

Opakujeme tentýž postup pro všechny prvky. Vybarvíme-li si v celkové tuhostní matici obsazené (nenulové) bloky, získáme obrázek 2.6.

✓



Obř. 2.6: Blokóvá struktura celkové tuhostní matice z příkladu na straně 22. Černě jsou označeny nenulové bloky, bíle nulové bloky.

Blok $\underline{k}_{c_{7,3}}$ je nulový. To znamená, že neexistuje tuhostní matice prvku, která by obsahovala blok označený čísly 7 a 3. Neexistuje tedy prvek, který obsahuje uzly 7 a 3.

Můžeme také uvažovat opačným směrem a prohlásit, že protože uzly 7 a 3 nepatří do jednoho prvku, bude blok $\underline{k}_{c_{7,3}}$ nulový.

Naopak nenulový blok $\underline{k}_{c_{7,10}}$ poukazuje na to, že existuje nejméně jeden prvek, který obsahuje uzly č. 7 a 10. Pohled na obrázek sítě ukazuje, že takové prvky jsou právě dva – č. 2 a 4.

2.7.1 Symetrie celkové tuhostní matice

Diagonální bloky tuhostní matice prvku mají indexy $[i, i]$, $[j, j]$ nebo $[k, k]$. Odpovídající čísla uzlů jsou si proto rovna a tyto bloky budeme do celkové tuhostní matice umisťovat opět na diagonálu.

Mimodiagonální symetricky umístěné bloky (např ty s indexy $[j, k]$ a $[k, j]$) budou mít čísla uzlů pouze vzájemně přehozená a proto se budou do celkové tuhostní matice také umisťovat na symetrické pozice.

Z toho vyplývá, že celková tuhostní matice $\underline{\mathbf{K}}_c$ je symetrická!

2.7.2 Singularita celkové tuhostní matice

Rovnice

$$\underline{\mathbf{K}}_c \cdot \underline{\Delta}_c = \underline{\mathbf{F}}_c, \quad (2.53)$$

popisuje skutečnost, že pro předepsané posuvy (matici $\underline{\Delta}_c$) můžeme určit síly, kterými jsou tyto posuvy vynucené - matici $\underline{\mathbf{F}}_c$. Úprava rovnice (2.53) na tvar

$$\underline{\Delta}_c = \underline{\mathbf{K}}_c^{-1} \cdot \underline{\mathbf{F}}_c, \quad (2.54)$$

(který by pro zadané vnější síly umožňoval určit posuvy) *není možná!* I kdybychom totiž uzly zatížili takovou soustavou sil, že by těleso bylo v rovnováze, mohlo by se v této rovnováze nacházet kdekoliv v prostoru, tj. velikost posuvů by nebyla jednoznačně určena, resp. soustava by měla nekonečně mnoho řešení. Kdybychom uzly zatížili silami, které by statickou rovnováhu tělesa nezajišťovaly, pro posuvy by dokonce neexistovalo žádné řešení. To je způsobeno tím, že na síť nejsou zatím aplikovány žádné vazby.

Tyto úvahy nás vedou k závěru, že matice $\underline{\mathbf{K}}_c$ je singulární!

2.7.3 Diagonální členy celkové tuhostní matice

Každý uzel patří alespoň do jednoho prvku. To znamená, že každý diagonální blok $\underline{\mathbf{k}}_{c_{m,m}}$ celkové tuhostní matice bude obsazen minimálně jedním, častěji však několika bloky různých tuhostních matic. *Diagonála matice $\underline{\mathbf{K}}_c$ bude tedy nenulová*, což je velmi důležité pro pozdější řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou.

Například uzel č. 8 z příkladu na straně 22 patří do tří prvků (č. 5, 8 a 10). V každé z tuhostních matic těchto tří prvků tedy existuje blok, který budeme umisťovat do celkové tuhostní matice na pozici $\underline{\mathbf{k}}_{c_{8,8}}$. U složitějších sítí není problém si představit uzel, který patří velkému počtu prvků. Na příslušné diagonální pozici celkové tuhostní matice se tak může počítat shora neomezené množství bloků tuhostních matic prvků

2.7.4 Mimodiagonální členy celkové tuhostní matice

Uzly 8 a 12 z příkladu na straně 22 patří do dvou prvků – do prvku č. 8 a prvku č. 10. To znamená, že do bloků $\underline{\mathbf{k}}_{c_{8,12}}$ a $\underline{\mathbf{k}}_{c_{12,8}}$ se budou umisťovat dva bloky z tuhostních matic $\underline{\mathbf{K}}_8$ a

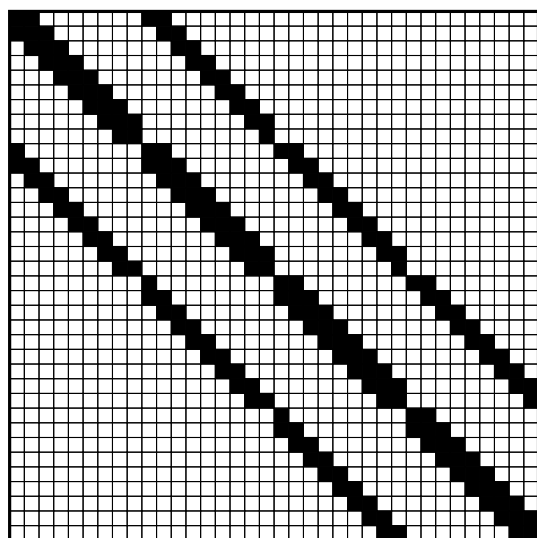
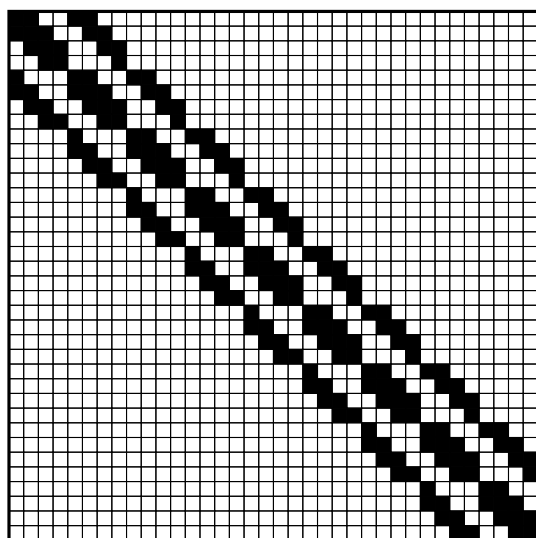
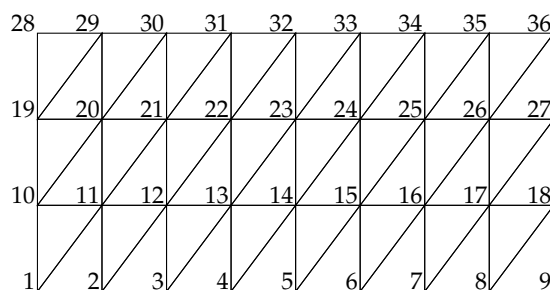
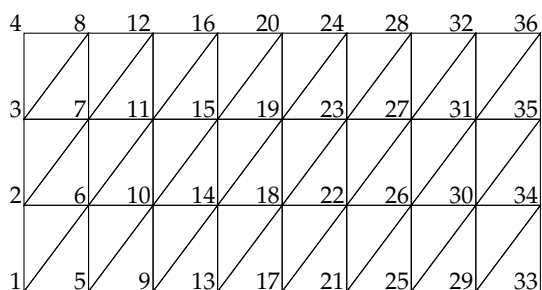
\underline{K}_{10} .

Oproti tomu uzly č. 2 a 3 patří pouze do jediného prvku (č. 9), takže do bloků $\underline{k}_{c_{2,3}}$ a $\underline{k}_{c_{3,2}}$ umístíme po jediném bloku z tuhostní matice \underline{K}_9 .

Je zřejmé, že mimo diagonálu celkové tuhostní matice se budou sčítat maximálně dva bloky dvou různých tuhostních matic (v třírozměrném prostoru je ovšem situace jiná).

2.7.5 Pásovost a řídkost celkové tuhostní matice

Mějme jednoduché těleso pokryté pravidelnou trojúhelníkovou sítí, jako na obrázku 2.7. Označíme-li si v celkové tuhostní matici nenulové bloky, jasně vystoupí pásová struktura matice. *Celková tuhostní matice je pásová.* Pouhé přečíslování uzlů způsobí, že nenulové bloky budou uspořádané jinak a pás bude jinak široký.



Obr. 2.7: Dvě stejné sítě se liší pouze očíslováním uzlů. Důsledkem je odlišná struktura celkové tuhostní matice \underline{K}_c . V obou případech je matice pásová. Nevhodným očíslováním uzlů můžeme docílit velmi širokého pásu.

Protože síť je v obou případech geometricky stejná, musí být stejný i výsledek výpočtu pomocí metody konečných prvků. To znamená, že v obou tuhostních maticích je uložena stejná informace. V případě užšího pásu je tato informace soustředěna do menší oblasti, je tedy možné říct, že je uložena efektivněji.

Zvolme si náhodně dva libovolné uzly, např. m a n . Pravděpodobnost, že tyto dva uzly patří do jediného prvku je malá. To znamená, že blok $\underline{k}_{cm,n}$ bude s velkou pravděpodobností nulový. Matice \underline{K}_c proto bude obsahovat především nulové bloky - bude řídká.

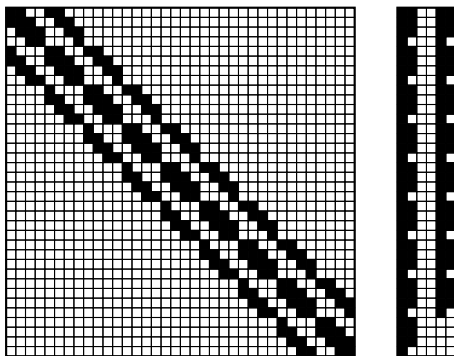
2.7.6 Úsporné uložení celkové tuhostní matice v paměti počítače

Symetrie a pásovosti celkové tuhostní matice je možné využít pro její úsporné uložení v paměti počítače. Výhodou je úspora nároků na paměť během výpočtu, nevýhodou pak větší režie při provádění výpočtů. Způsob uložení ukazuje obrázek 2.8.

Když si uvědomíme, že úloha metody konečných prvků může mít síť tvořenou třeba milionem uzlů, představuje to ve 3D tři milióny neznámých. Celková tuhostní matice tak bude mít rozměry $3000\ 000 \times 3000\ 000$, tj. 9×10^{12} prvků. Reálné číslo obvykle v počítači zabírá 8 bajtů. Kdybychom chtěli v paměti počítače udržet celou takovou matici, potřebovali bychom 72×10^{12} bajtů, tedy 72 Gigabajtů. To je i v dnešní době hodně. A s rostoucími kapacitami paměti budou samozřejmě růst i požadavky výpočtářů na velikosti matic. Proto je a nadále bude úsporné ukládání dat v paměti počítače nutností.

2.8 Silové okrajové podmínky

Vztah (2.49) představuje soustavu rovnic rovnováhy všech uzlů. Na pravé straně figurují vnější síly na uzly. Skutečná zatížení tělesa se však neomezují na osamělé síly v uzlech. Těleso může být zatíženo spojitě rozloženými silami – a to buď na hranici (povrchové síly), nebo v objemu (objemové síly). Naším dalším cílem bude nahradit tyto spojitě rozložené síly *staticky ekvivalentními silami* působícími v uzlech.



Obr. 2.8: Symetrii a pásovost celkové tuhostní matice je možné využít pro její úsporné uložení v paměti počítače. Místo celé matice stačí ukládat diagonální členy a obsah pásu vpravo od diagonály. Výsledkem je úzká matice, v jejímž levém sloupci jsou diagonální členy matice \underline{K}_c .

V tomto případě namísto matice o blokových rozměrech 36×36 postačí matice s rozměry 36×6 , uspořili jsme tedy celých 5/6 (tj. 83%) paměťových nároků.

Nevhodné očíslování uzlů zvětšuje šířku pásu a snižuje úspornost uložení matice v paměti.

2.8.1 Objemové síly

Předpokládejme, že na těleso působí objemová síla. Vektor její intenzity (v rovině) má tvar

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Je-li prvek malý, dá se předpokládat, že se v něm velikost \vec{f} nebude významně měnit. Celková síla na prvek způsobená objemovými silami bude pak

$$\vec{F}_V = V \cdot \vec{f}. \quad (2.56)$$

Tuto sílu rovným dílem rozdělíme mezi všechny tři uzly prvku a dostaneme tak *matici ekvivalentních uzlových sil*

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\vec{F}_V \\ \frac{1}{3}\vec{F}_V \\ \frac{1}{3}\vec{F}_V \end{bmatrix} = \frac{V}{3} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

2.8.2 Povrchové síly

Předpokládejme, že na hranu ik prvku působí povrchová síla s intenzitou

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Je-li hrana krátká, je intenzita podél hrany prakticky konstantní a výsledná síla na hranu je

$$\vec{F}_p = l_{ik} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

kde l_{ik} je délka hrany ik . Tuto sílu rovným dílem rozdělíme mezi příslušné uzly – tj. v tomto případě mezi uzly i a k . Na uzel j nic působit nebude. Výsledné ekvivalentní uzlové síly od

povrchové síly mají v tomto případě tvar

$$\underline{\mathbf{F}}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \vec{F}_p \\ \vec{0} \\ \frac{1}{2} \vec{F}_p \end{bmatrix} = \frac{l_{ik}}{2} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

2.8.3 Ekvivalentní uzlové síly

Sečtením ekvivalentních uzlových sil od objemového zatížení a ekvivalentních uzlových sil od povrchového zatížení dostaneme pro každý prvek matici celkových ekvivalentních uzlových sil

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow ekv} = \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow V} + \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow p}. \quad (2.61)$$

2.8.4 Osamělé síly

Místo určování ekvivalentních uzlových sil upravíme síť tak, aby osamělé síly působily právě do uzlů.

⇨ Příklad – tíha a spojité zatížení

Předpokládejme, že obdélník z příkladu na straně 22 je ocelová deska o tloušťce $t = 35$ mm. Na jeho horní hranu působí šikmé spojité zatížení s intenzitou $\vec{p} = [100, -80]^T$ N/m a na celý objem pak vlastní tíha desky.

Stanovíme ekvivalentní síly pro prvek číslo 3.

Snadno určíme vektor tíhové síly na prvek (S_3 je plocha prvku, $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m³ hustota oceli, $\vec{g} = [0, -9.81]^T$ m/s² gravitační zrychlení).

$$\vec{F}_{g3} = S_3 t \rho \vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -836.92 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Matice ekvivalentních uzlových sil od tíhy má tvar

$$\underline{\mathbf{F}}_{\vec{g}3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -278.97 \\ 0 \\ -278.97 \\ 0 \\ -278.97 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Spojité zatížení na horní hraně má intenzitu

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 100 \\ -800 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

V prvku číslo 3 tvoří horní hranu spojnice uzlů $j = 7$ a $k = 6$. Její délka je $l_{jk} = 1.25$ m a výsledná síla na hranu tedy bude

$$\vec{F}_{pjk} = l_{jk} \cdot \vec{p} = \begin{bmatrix} 125 \\ -1000 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

a matice ekvivalentních uzlových sil je

$$\underline{\mathbf{F}}_{\vec{p}3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 62.5 \\ -500 \\ 62.5 \\ -500 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Ekvivalentní uzlové síly na prvek číslo 3 jsou

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow 3 ekv} = \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow g3} + \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow p3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -278.97 \\ 62.5 \\ -778.97 \\ 62.5 \\ -778.97 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

✓

2.8.5 Sestavení pravé strany

Na pravé straně soustavy rovnic (2.49) figurují síly na uzly. Na uzly působí jednak osamělé síly, jednak ekvivalentní uzlové síly. Matici $\underline{F}_{\rightarrow c}$ musíme tedy vytvořit právě z nich.

Postup je následující:

- vytvoříme $\underline{F}_{\rightarrow c}$ s N_u blokovými řádky, obsahující samé nuly
- pro každý prvek $p = 1, 2, \dots, N_p$
 - pro všechny uzly prvku p $u = i, j, k$
 - * hodnotě u přiřadíme skutečné číslo uzlu u_g
 - * blok $\underline{F}_{\rightarrow ekv, u}$ přičteme k bloku $\underline{F}_{\rightarrow c, u_g}$
- pro každý uzel $u = 1, 2, \dots, N_u$
 - k bloku $\underline{F}_{\rightarrow c, u}$ přičteme vektor osamělé síly působící na uzel u

2.9 Soustava rovnic

V soustavě rovnic

$$\underline{K}_c \cdot \underline{\Delta}_{\rightarrow c} = \underline{F}_{\rightarrow c} \quad (2.68)$$

známe nyní jak matici \underline{K}_c , tak pravou stranu $\underline{F}_{\rightarrow c}$. Přesto soustavu zatím nelze řešit. Je to způsobeno tím, že jsme dosud nepřipojili žádné informace o vazbách. Těleso není jednoznačně uloženo a důsledkem je buď to, že soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení nebo (častěji) to, že soustava rovnic nemá žádné řešení.

2.10 Deformační okrajové podmínky – modifikace soustavy rovnic

Vazby (též deformační okrajové podmínky) omezují pohyblivost uzlů. To prakticky znamená, že některé z posuvů (v metodě konečných prvků neznámých veličin) ve skutečnosti nebudou neznámé, ale budou mít nějakou předepsanou hodnotu (nejčastěji nulu).

Informaci o vazbách zaneseme do soustavy rovnic takzvanou *modifikací*.

2.10.1 Odebrání jednoho stupně volnosti v uzlu

Na obrázku 2.9 je znázorněn uzel m , který se může volně pohybovat ve směru osy x , zatímco jeho posuv ve směru osy y není možný

Platí tedy

$$v_m = 0. \quad (2.69)$$

Zatížení F_{m_y} působí v takovém případě přímo do rámu a *vůbec nepůsobí na těleso*. Řešení soustavy rovnic tedy nesmí na velikosti síly F_{m_y} záviset! Jinak řečeno rovnice rovnováhy

uzlu m do směru y ztrácí na důležitosti a můžeme ji ze soustavy rovnic vypustit. Stejně tak je možné ze soustavy vypustit neznámou v_m , protože její hodnota je známa.

Neznámá v_m se nachází (u rovinné úlohy) v matici neznámých $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$ v řádku číslo $2m$, rovnice rovnováhy je reprezentována členy matice \underline{K}_c (a pravé strany $\underline{F}_{\rightarrow c}$) uloženými taktéž v řádku $2m$.

Vypuštění neznámé tedy znamená jednak její odstranění z matice $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$, jednak ale také vypuštění všech členů matice \underline{K}_c , kterými tato neznámá byla násobena – to jsou členy *sloupce* číslo $2m$.

Vypuštění rovnice rovnováhy pak odpovídá vypuštění řádku číslo $2m$ z matice \underline{K}_c i z matice $\underline{F}_{\rightarrow c}$.

Výsledkem takových úprav je modifikovaná soustava, která má o jednu neznámou a o jednu rovnici méně než před modifikací.

Tato úprava zachová všechny důležité vlastnosti soustavy rovnic. Matice soustavy je nadále symetrická, pásová (šířka pásu se nezvětší) a řádká.

2.10.2 Logická eliminace neznámé

Vypouštění rovnic a neznámých představuje operaci náročnou na počítačový čas. Vynechání řádku znamená změnit indexy všech členů následujících řádků, totéž je třeba udělat se sloupci. Používá se tedy místo toho *logická eliminace neznámé*, která nemění rozměry matic. Soustava se nezmenšuje a řeší se vlastně i neznámé, jejichž hodnota je známa předem. Přesto je výsledkem časový zisk.

Logickou eliminaci neznámé v_m provedeme tak, že vyplníme nulami odpovídající řádek a sloupec celkové tuhostní matice \underline{K}_c a odpovídající řádek pravé strany $\underline{F}_{\rightarrow c}$. Na diagonálu pak zapíšeme jedničku.

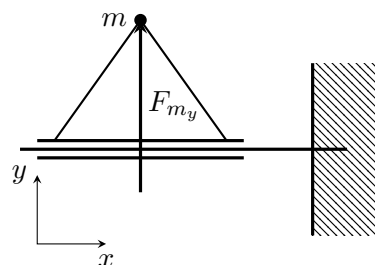
Nulováním sloupce celkové tuhostní matice vypouštíme neznámou ze všech rovnic (bude v nich násobena nulou). Nulováním řádku vypouštíme rovnici rovnováhy uzlu m do směru y . Zápisem jedničky na diagonálu a nuly do pravé strany nahrazujeme vypuštěnou rovnici rovnováhy rovnicí

$$v_m = 0. \quad (2.70)$$

Modifikovaná soustava rovnic má stejné rozměry jako nemodifikovaná.

2.10.3 Vynucený posuv uzlu

Pokud platí, že posuv uzlu m má předepsanou hodnotu (např. δ), postupujeme obdobně jako v předcházejících odstavcích. Vynulujeme odpovídající řádek a sloupec matice \underline{K}_c a na diagonálu zapíšeme jedničku. Na pravou stranu pak zapíšeme do příslušného řádku veli-



Obr. 2.9: Uzel m má zakázaný posuv ve směru osy y . Síla na uzel m ve směru y (F_{m_y}) působí přímo do rámu a vůbec neovlivní deformace a namáhání tělesa.

kost předepsaného posuvu. Tím jsme vynechali neznámou ze všech rovnic, vynechali jsme také odpovídající rovnici rovnováhy a nahradili ji rovnicí

$$v_m = \delta. \quad (2.71)$$

⇨ Příklad – vazby

U síť ze strany 22 předpokládejme, že celá levá hrana obdélníka je vetknutá. To znamená, že obě složky posuvů budou nulové pro uzly s čísly 1, 5 a 6. Těmto složkám posuvů odpovídají řádky a sloupce s čísly 1, 2, 9, 10, 11 a 12. Provedeme modifikaci celkové tuhostní matice a pravé strany tak, že v uvedených řádcích a sloupcích \underline{K}_c a v řádcích $\underline{F}_{\rightarrow c}$ přepíšeme původní hodnoty nulami. Na diagonálu \underline{K}_c v těchto řádcích zapíšeme jedničky.

✓

2.11 Řešení soustavy rovnic

Odebereme-li modifikací dostatečný počet stupňů volnosti, stane se úloha řešitelnou. Jinak řečeno, modifikací změníme singulární matici \underline{K}_c na regulární matici $\underline{K}_{c \text{ mod}}$. Matici pravé strany $\underline{F}_{\rightarrow c}$ se modifikací změní na $\underline{F}_{\rightarrow c \text{ mod}}$

Soustavu

$$\underline{K}_{c \text{ mod}} \cdot \underline{\Delta}_{\rightarrow c} = \underline{F}_{\rightarrow c \text{ mod}} \quad (2.72)$$

je možné vyřešit např. Gaussovou eliminační metodou. Výsledkem je matice $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$, která obsahuje posuvy všech uzlů. Obsahuje i posuvy uzlů, které měly pomocí modifikace předepsané hodnoty posuvů. Právě tyto hodnoty při řešení musejí samozřejmě vyjít.

2.12 Deformace tělesa

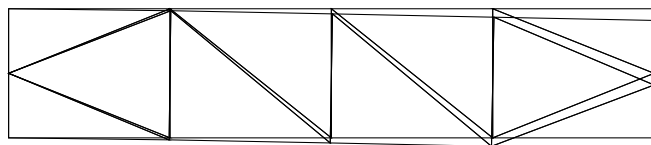
Nové souřadnice uzlů dostaneme jednoduše tak, že velikosti posuvů (které jsou pro všechny uzly uspořádané v matici $\underline{\Delta}_{\rightarrow c}$) přičteme k souřadnicím odpovídajících uzlů. To nám umožní vykreslení zdeformované sítě.

⇨ Příklad – zobrazení deformací

Budeme-li řešit příklad ze strany 22, vyjdou posuvy uzlů velmi malé ve srovnání s rozměry tělesa. Největší složka posuvu je pouhých devět setin milimetru! Chceme-li posuvy zobrazit, musíme jejich velikost významně zvětšit.

Výsledek s tisícnásobným zvětšením posuvů je na obrázku 2.10.

✓



Obr. 2.10: Nezdeformovaná a zdeformovaná síť. Skutečné posuvy jsou zvětšené tisícnásobně.

2.13 Poměrné deformace a napětí

Pro každý prvek můžeme nyní sestavit matici posuvů jeho uzlů. Stačí se podívat na čísla uzlů, kterými je prvek tvořen a příslušné blokové řádky matice $\underline{\underline{\Delta}}_c$ uspořádat do matice $\underline{\underline{\Delta}}$ daného prvku.

Rovnici (2.14) pak dosadíme do vztahu (1.24) a dostaneme vyjádření poměrných deformací

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}}. \quad (2.73)$$

Matice $\underline{\underline{B}}$ je konstantní, matice $\underline{\underline{S}}^{-1}$ také. To znamená, že poměrné deformace budou v celém prvku konstantní. Důvodem je volba lineární aproximace posuvů, kterou jsme udělali na začátku. Derivováním posuvů (výpočtem poměrných deformací pomocí Cauchyho vztahů) musíme pak dostat konstanty.

Napětí získáme z poměrných deformací pomocí Hookova zákona. Platí

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}}. \quad (2.74)$$

2.14 Výsledek v prvcích a v uzlech

Metoda konečných prvků předepisuje pouze spojitost posuvů. Poměrné deformace i napětí vycházejí na hranicích prvků nespojitě.

Vyhodnocujeme-li výsledky získané pomocí MKP tak, jak nám vyšly aproximace v jednotlivých prvcích, pracujeme s takzvaným *element solution* (český ekvivalent tohoto zavedeného názvu se nepoužívá). Vykreslíme-li si například *element solution* napětí σ_x , získáme průběh se skoky na hranicích prvků.

Jeden uzel patří zpravidla do několika prvků. Pro takový uzel dostáváme několik různých hodnot napětí. Nabízí se proto prohlásit za výsledek průměr těchto hodnot. Výsledky využívající průměrné hodnoty v uzlech mají zavedený název *nodal solution*.

Protože *element solution* není spojitě, zatímco *nodal solution* ano, tyto dva výsledky se navzájem liší. Velikost rozdílu mezi nimi je možné použít pro odhad chyby výpočtu.

Kapitola 3

Další typy prvků

3.1 Trojúhelníkový prvek se šesti uzly

Podívejme se na trojúhelníkový prvek se šesti uzly (viz obr. 3.1). Můžeme tu rozlišit dva typy uzlů. Tři ze šesti uzlů určují tvar prvku, zbývající tři jsou umístěny do středů hran. Uzly mají celkem dvanáct stupňů volnosti. Protože aproximaci posuvů uvnitř prvku chceme vyjádřit pomocí hodnot v uzlech, znamená to, že pro aproximaci musíme použít stejný počet konstant, jako je počet stupňů volnosti. Protože aproximujeme dvě složky posuvu, máme pro každou z nich k dispozici šest konstant a dostáváme

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 + \alpha_6xy, \\v &= \alpha_7 + \alpha_8x + \alpha_9y + \alpha_{10}x^2 + \alpha_{11}y^2 + \alpha_{12}xy,\end{aligned}$$

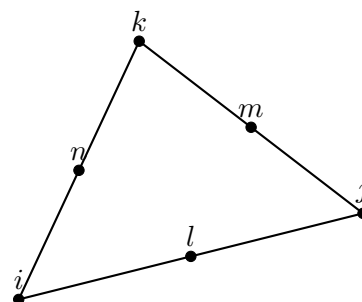
neboli

$$\vec{u}(x, y) = \underline{\mathbf{A}}(x, y) \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (3.1)$$

kde matice bázových funkcí $\underline{\mathbf{A}}$ o rozměrech $[2 \times 12]$ má tvar

$$\underline{\mathbf{A}}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy \end{bmatrix}.$$

Protože aproximace platí v celém prvku, platí i v jeho uzlech, tedy



Obr. 3.1: Trojúhelníkový prvek se šesti uzly. Uzly ve vrcholech určují tvar prvku. Uzly ve středech hran slouží ke zvýšení řádu aproximační funkce.

$$\underline{\underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} \vec{u}_i \\ \vec{u}_j \\ \vec{u}_k \\ \vec{u}_l \\ \vec{u}_m \\ \vec{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_i \\ \underline{\underline{A}}_j \\ \underline{\underline{A}}_k \\ \underline{\underline{A}}_l \\ \underline{\underline{A}}_m \\ \underline{\underline{A}}_n \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\alpha}}. \quad (3.2)$$

Matice $\underline{\underline{S}}$ má tvar

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & y_i^2 & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i^2 & y_i^2 & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & y_j^2 & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j^2 & y_j^2 & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & y_k^2 & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k^2 & y_k^2 & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l^2 & y_l^2 & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l & x_l^2 & y_l^2 & x_l y_l \\ 1 & x_m & y_m & x_m^2 & y_m^2 & x_m y_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m & x_m^2 & y_m^2 & x_m y_m \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Z rovnice (3.2) vyjádříme $\underline{\underline{\alpha}}$ a dosadíme do (3.1). Získáme aproximaci vyjádřenou pomocí posuvů v uzlech ve tvaru

$$\vec{u}(x, y) = \underline{\underline{A}}(x, y) \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}}. \quad (3.4)$$

Tento tvar je shodný s rovnicí (2.14). Rozdíl je pouze v rozměrech a obsahu matic, které ve vztahu figurují. Nadále ale platí, že matice $\underline{\underline{A}}$ obsahuje zvolené aproximační (bázové) funkce a matice $\underline{\underline{S}}$ se skládá z matic $\underline{\underline{A}}$, do nichž jsou dosazeny souřadnice jednotlivých uzlů.

Budeme-li pokračovat v úvahách stejně jako na straně 29, dostaneme vztah pro hustotu deformační energie

$$\Lambda(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot (\underline{\underline{S}}^{-1})^T \underline{\underline{A}}(x, y)^T \cdot \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}}(x, y) \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Delta}}, \quad (3.5)$$

kde \underline{D} je matice diferenciálních operátorů v rovině (viz (1.26))

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Matice $\underline{B} = \underline{D} \cdot \underline{A}$ tentokrát nebude konstantní. To je způsobeno tím, že matice \underline{A} obsahuje kvadratické členy. Matice \underline{B} má tvar

$$\underline{B}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Integrací hustoty deformační energie dostaneme deformační energii prvku ve tvaru

$$U = \int_{(V)} \left[\frac{1}{2} \cdot \underline{\Delta}^T \cdot (\underline{S}^{-1})^T \underline{B}(x, y)^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{B}(x, y) \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Delta} \right] dV. \quad (3.8)$$

Zohledníme-li konstantní a nekonstantní matice, získáme definici tuhostní matice prvku v této podobě

$$\underline{K} = (\underline{S}^{-1})^T \int_{(V)} [\underline{B}(x, y)^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{B}(x, y)] dV \cdot \underline{S}^{-1}. \quad (3.9)$$

Integrál matice je matice integrálů. Integrují se jednoduché polynomy a výsledek je možné obecně odvodit jako funkci souřadnic uzlů i, j a k .

Protože pro deformační energii U platí vztah

$$U = \frac{1}{2} \cdot \underline{\Delta}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\Delta}, \quad (3.10)$$

můžeme dovodit, že rozměry matice \underline{K} jsou [12x12]. Blokové rozměry jsou [6x6], což odpovídá počtu uzlů prvku. Protože jde o rovinný prvek, má každý blok velikost [2x2].

3.2 Čtyřstěn s deseti uzly

U prostorového prvku musíme ve třech rozměrech aproximovat tři složky posuvu. Protože prvek z obrázku 3.2 má deset uzlů (každý se třemi složkami posuvů), musíme aproximaci vytvořit tak, aby procházela deseti body. To odpovídá aproximaci s deseti koeficienty pro každou složku posuvu

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx, \\ v &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y + \alpha_{14} z + \alpha_{15} x^2 + \alpha_{16} y^2 + \alpha_{17} z^2 + \alpha_{18} xy + \alpha_{19} yz + \alpha_{20} zx, \\ w &= \alpha_{21} + \alpha_{22} x + \alpha_{23} y + \alpha_{24} z + \alpha_{25} x^2 + \alpha_{26} y^2 + \alpha_{27} z^2 + \alpha_{28} xy + \alpha_{29} yz + \alpha_{30} zx, \end{aligned}$$

Kapitola 4

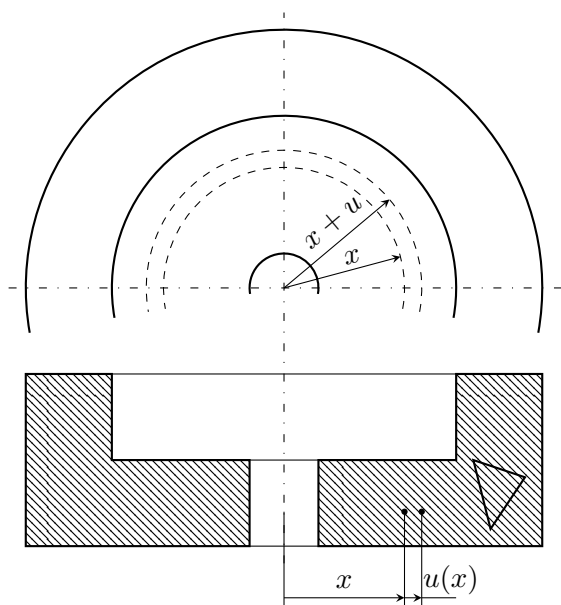
Rotačně symetrické úlohy

Je-li úloha rotačně symetrická, je výhodné této symetrie využít. Přinese to velkou úsporu výpočetního času bez ztráty přesnosti výsledků.

Na obrázku 4.1 je příklad rotačně symetrické úlohy. Body tělesa vykazují posuvy pouze v radiálním (osa x) a axiálním (osa y) směru. Osový posuv v způsobí osovou poměrnou deformaci stejným způsobem, jaký jsme popisovali v kapitole 1.2.1. Platí tedy

$$\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} v. \quad (4.1)$$

Podobně pro radiální poměrnou deformaci a pro zkos platí vztahy



Obr. 4.1: Příklad rotačně symetrické úlohy. Při radiálním posuvu u vznikne nejen radiální poměrná deformace ε_x , ale změní se také obvod čárkovaně znázorněné kružnice. Vznikne tak tečná poměrná deformace ε_t . Dvě složky posuvu u a v způsobí vznik čtyř složek poměrné deformace – ε_x , ε_y , ε_t a γ_{xy} . Matice diferenciálních operátorů proto bude mít dva sloupce a čtyři řádky. Znázorněný prvek není rovinný, ale jedná se o torus vytvořený rotací trojúhelníku.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x}u, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}v.\end{aligned}$$

Radiální posuv u způsobí také změnu délky příslušného kruhového vlákna – viz obr. 4.1. To odpovídá tečné poměrné deformaci a pro ni platí

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta o}{o} = \frac{2\pi(x+u) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{u}{x}. \quad (4.2)$$

Uvedené čtyři vztahy přepíšeme do maticové formy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

U rotačně symetrické úlohy má proto matice diferenciálních operátorů tvar

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Čtyřem složkám poměrné deformace odpovídají čtyři složky napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_t, \tau_{xy}$. Hookův zákon v maticové podobě je

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.5)$$

Matici elastických koeficientů uvedeme bez odvození, její tvar je

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{\mu} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Tuhostní matice prvku vznikne integrací hustoty deformační energie přes celý objem prvku. Rovinný prvek na obrázku 4.1 představuje toroid, což musíme při integrování zohlednit.

$$\underline{\mathbf{K}} = 2\pi \int_{(S)} [(\underline{\mathbf{S}}^{-1})^T \cdot \underline{\mathbf{B}}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{-1} \cdot x] dx dy. \quad (4.7)$$

Matice $\underline{\mathbf{B}}$ pro trojúhelníkový prvek se třemi uzly má tvar

$$\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{A}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kapitola 5

Prutové soustavy s tuhými styčníky

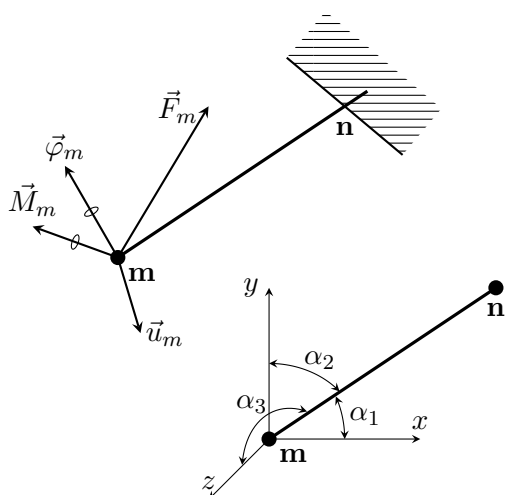
Začneme s představou prutu, který je v jednom uzlu vetknutý. Prut je zatížen:

- silou \vec{F} a momentem \vec{M} na volném konci;
- spojitě rozloženou (konstantní) silou \vec{q} a spojitě rozloženým (konstantním) momentem \vec{m} po celé délce;
- změnou teploty ΔT .

Prut se zdeformuje a volný uzel se *posune* o \vec{u} a natočí o $\vec{\varphi}$.

5.1 Zatížení na konci prutu

Mějme prut na jednom konci vetknutý - viz obrázek 5.1. Uzel \mathbf{m} zatížíme silou a momentem. Prut se bude deformovat a výsledkem bude posuv \vec{u}_m a natočení $\vec{\varphi}_m$ bodu \mathbf{m} .



Obr. 5.1: *Nahoře:* Prut s jedním volným (\mathbf{m}) a jedním vetknutým (\mathbf{n}) uzlem. Z uzlu \mathbf{m} působí na prut síla \vec{F}_m a moment \vec{M}_m . Prut se zdeformuje, což se v uzlu \mathbf{m} projeví posuvem \vec{u}_m a natočením $\vec{\varphi}_m$.

Dole: Směrové úhly prutu.

Zavedme matici zobecněných sil z uzlu \mathbf{m} na prut \mathbf{mn}

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m} = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_m \quad (5.1)$$

a matici zobecněných posuvů uzlu \mathbf{m}

$$\underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\varphi} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}_m \quad (5.2)$$

Předpokládejme, že zobecněné posuvy jsou malé. Platí-li Hookův zákon, bude deformace přímo úměrná zatížení. To vyjádříme vztahem

$$\underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m} = \underline{\mathbf{B}}_{mn} \cdot \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m}, \quad (5.3)$$

kde matice $\underline{\mathbf{B}}$ vyjadřuje poddajnost prutu. Odvození matice $\underline{\mathbf{B}}$ ukážeme v části 5.5 na straně 63.

5.2 Spojité zatížení prutu

Předpokládejme, že prut je po celé své délce zatížen konstantním spojitým zatížením \vec{q} a konstantním spojitým momentem \vec{m} . Uspořádáme je do matice zobecněných spojitých

zatížení

$$\underline{\underline{q}}_{mn} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{m} \end{bmatrix}_{mn} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_{mn} . \quad (5.4)$$

Podobně jako v minulé části – i zde za předpokladu malých deformací a platnosti Hookova zákona bude vztah mezi zatížením a deformací lineární. Zobecněné deformace vyjádříme zápisem.

$$\underline{\underline{u}}_m = \underline{\underline{C}}_{mn} \cdot \underline{\underline{q}}_{mn} . \quad (5.5)$$

5.3 Změna teploty

Nyní ovlivníme prut ještě změnou teploty ΔT_{mn} . Prut změní svou délku o

$$\Delta l_{mn} = \alpha l_{mn} \Delta T_{mn} . \quad (5.6)$$

Uzel m se posune *proti směru* vektoru $\vec{m}\vec{n}$ o Δl . Vektor posuvu uzlu m proto dostaneme jako součin jednotkového vektoru $-\vec{m}\vec{n}_0$ a hodnoty Δl_{mn} :

$$\vec{u}_m = - \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}_{mn} \cdot \alpha l_{mn} \Delta T_{mn} . \quad (5.7)$$

Složky natočení jsou nulové, takže pro zobecněné posuvy dostaneme

$$\underline{\underline{u}}_m = - \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{mn} \cdot \alpha l_{mn} \Delta T_{mn} = \underline{\underline{\alpha}}_{mn} \cdot \Delta T_{mn} , \quad (5.8)$$

kde

$$\underline{\alpha}_{mn} = -\alpha l_{mn} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{mn} \quad (5.9)$$

5.4 Výsledné zobecněné posuvy způsobené zatížením

Na reálný prut mohou působit všechna zatížení z předchozích odstavců současně. Celkové zobecněné deformace jsou pak součtem zobecněných deformací od osamělého zatížení, spojitého zatížení a změny teploty:

$$\underline{u}_{\gamma m} = \underline{B}_{mn} \cdot \underline{F}_{\gamma m} + \underline{C}_{mn} \cdot \underline{q}_{\gamma mn} + \underline{\alpha}_{\gamma mn} \cdot \Delta T_{mn} \quad (5.10)$$

5.5 Stanovení matice \underline{B}

Matice \underline{B} přiřazuje k působícím zobecněným silám odpovídající posuvy podle vztahu

$$\underline{u}_{\gamma m} = \underline{B}_{mn} \cdot \underline{F}_{\gamma m} \quad (5.11)$$

Ve složkové podobě má vztah tvar¹

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Zvětšování hodnot v matici \underline{B} vede k růstu složek \underline{u}_{γ} , takže se jedná o *matici poddajnosti*.

¹Pro jednoduchost budeme ve zbytku této kapitoly vynechávat indexy m a mn .

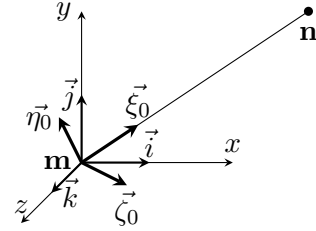
Ze složkového zápisu je zřejmé, že např. člen b_{32} představuje příspěvek síly F_y k velikosti posuvu w , člen b_{25} představuje příspěvek momentu M_y k velikosti posuvu v , člen b_{64} představuje příspěvek momentu M_x k velikosti natočení φ_z a podobně.

5.5.1 Lokální soustava souřadnic $\{\xi, \eta, \zeta\}$

Výpočty provedeme v lokální soustavě souřadnic s bází $\{\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0\}$. Osa ξ míří ve směru prutu \overline{mn} , jedná se tak vlastně o jednotkový vektor $\overline{m\vec{n}}_0$. Osu η sestrojíme jako kolmici k ose ξ a ose x . Osa ζ bude kolmá k ξ a η .

Platí tedy

$$\vec{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$



Obr. 5.2: Báze $\{\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0\}$ lokální soustavy souřadnic $\{\xi, \eta, \zeta\}$.

Vektor $\vec{\eta}_0$ je kolmý k vektorům $\vec{\xi}_0$ a \vec{i} . Protože ale \vec{i} a $\vec{\xi}_0$ obecně na sebe nejsou kolmé, získáme vektor $\vec{\eta}_0$ normalizací součinu $\vec{i} \times \vec{\xi}_0$:

$$\vec{\eta}_0 = \frac{\vec{i} \times \vec{\xi}_0}{|\vec{i} \times \vec{\xi}_0|}. \quad (5.14)$$

Vektorový součin $\vec{i} \times \vec{\xi}_0$ má tvar

$$\vec{i} \times \vec{\xi}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_2) \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Protože α_1 je směrový úhel a platí $\alpha_1 \in \langle 0, \pi \rangle$, platí také $\sin(\alpha_1) \geq 0$. Proto $|\sin(\alpha_1)| = \sin(\alpha_1)$ a dostaneme

$$|\vec{i} \times \vec{\xi}_0| = \sqrt{\cos^2(\alpha_3) + \cos^2(\alpha_2)} = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha_1)} = \sqrt{\sin^2(\alpha_1)} = |\sin(\alpha_1)| = \sin(\alpha). \quad (5.16)$$

Vektor $\vec{\eta}_0$ má tedy tvar

$$\vec{\eta}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

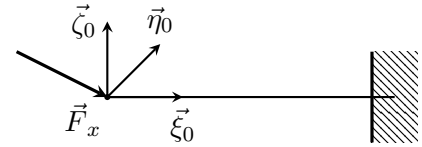
Nakonec určíme vektor ζ_0 :

$$\begin{aligned}\vec{\zeta}_0 = \vec{\xi}_0 \times \vec{\eta}_0 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ 0 & -\frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} & \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} \\ -\frac{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \\ -\frac{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos^2(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} \\ -\cotg(\alpha_1)\cos(\alpha_2) \\ -\cotg(\alpha_1)\cos(\alpha_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin^2(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} \\ -\cotg(\alpha_1)\cos(\alpha_2) \\ -\cotg(\alpha_1)\cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) \\ -\cotg(\alpha_1)\cos(\alpha_2) \\ -\cotg(\alpha_1)\cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \cdot\end{aligned}$$

5.5.2 První sloupec matice \underline{B}

První sloupeček matice \underline{B} představuje tři složky posuvů a tři složky natočení způsobené silou F_x .

Nechme na prut v uzlu m působit sílu $\vec{F}_x = [F_x, 0, 0]^T$ – viz obrázek 5.3. Tato síla bude mít do os $\{\xi, \eta, \zeta\}$ složky



$$\begin{aligned}F_{x_\xi} &= \vec{F}_x \cdot \vec{\xi}_0 = F_x \cos(\alpha_1), \\ F_{x_\eta} &= \vec{F}_x \cdot \vec{\eta}_0 = 0, \\ F_{x_\zeta} &= \vec{F}_x \cdot \vec{\zeta}_0 = F_x \sin(\alpha_1).\end{aligned}$$

Obr. 5.3: Síla \vec{F}_x má do os lokální soustavy souřadnic složky $[F_{x_\xi}, F_{x_\eta}, F_{x_\zeta}]$.

Pohled na obrázek 5.3 říká, že síla F_{x_ξ} působí na prut tlakem. Způsobí tedy změnu délky prutu o $\frac{F_{x_\xi} l}{ES}$. Konec prutu se posune ve směru osy ξ a vektor posunutí tedy bude

$$\vec{u}_{F_{x_\xi}} = \frac{F_{x_\xi} l}{ES} \cdot \vec{\xi}_0 = \frac{F_x \cos(\alpha_1) l}{ES} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Natočení způsobená silou F_{x_ξ} budou nulová, takže

$$\vec{\varphi}_{F_{x_\xi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Složka F_{x_η} způsobí v uzlu posuv do směru η a pootočení kolem osy ζ . Protože však $F_{x_\eta} = 0$, budou i posuv i natočení rovné nule a nulové budou i odpovídající vektory:

$$\vec{u}_{F_{x_\eta}} = 0 \cdot \vec{\eta}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_{F_{x_\eta}} = 0 \cdot \vec{\zeta}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Složka F_{x_ζ} způsobí v uzlu posuv do směru ζ a pootočení kolem osy η . Posuv je roven průhybu nosníku se silou na konci (jednoduchým výpočtem zjistíme, že se to rovná $\frac{Fl^3}{3EJ_o}$), zatímco natočení odpovídá sklonu nosníku se silou na konci (tedy $\frac{Fl^2}{2EJ_o}$). Dostaneme tak

$$\vec{u}_{F_{x_\zeta}} = \frac{F_{x_\zeta} l^3}{3EJ_o} \cdot \vec{\zeta}_0 = \frac{F_x \sin(\alpha_1) l^3}{3EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) \\ -\cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ -\cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} = \frac{F_x l^3}{3EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2(\alpha_1) \\ -\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ -\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_{F_{x_\zeta}} = \frac{F_{x_\zeta} l^2}{2EJ_o} \cdot \vec{\eta}_0 = \frac{F_x \sin(\alpha_1) l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \end{bmatrix} = \frac{F_x l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Sečteme nyní vektory posuvů způsobené silami F_{x_ξ} , F_{x_η} a F_{x_ζ} :

$$\vec{u}_{F_x} = \vec{u}_{F_{x_\xi}} + \vec{u}_{F_{x_\eta}} + \vec{u}_{F_{x_\zeta}} = \frac{F_x l}{E} \left(\frac{\cos(\alpha_1)}{S} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} + \frac{l^2}{3J_o} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2(\alpha_1) \\ -\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ -\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \right). \quad (5.20)$$

Součet vektorů natočení bude

$$\vec{\varphi}_{F_x} = \vec{\varphi}_{F_{x_\xi}} + \vec{\varphi}_{F_{x_\eta}} + \vec{\varphi}_{F_{x_\zeta}} = \frac{F_x l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_2) \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Protože první sloupec matice \underline{B} představují posuvy a natočení způsobené jednotkou silou F_x , dostaneme

$$\underline{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ b_{51} \\ b_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l \cos^2(\alpha_1)}{ES} + \frac{l^3 \sin^2(\alpha_1)}{3EJ_o} \\ \frac{l \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2)}{ES} - \frac{l^3 \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2)}{3EJ_o} \\ \frac{l \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_3)}{ES} - \frac{l^3 \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_3)}{3EJ_o} \\ 0 \\ \frac{l^2 \cos(\alpha_3)}{2EJ_o} \\ \frac{l^2 \cos(\alpha_2)}{2EJ_o} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

5.5.3 Působení sil F_y a F_z

Analogickým způsobem postupujeme u sil F_y a F_z . Nejprve určíme jejich složky do os lokální soustavy souřadnic a pak použijeme vztahy známé ze základních kurzů Pružnosti a pevnosti. Získáme tak druhý a třetí sloupec matice \underline{B} .

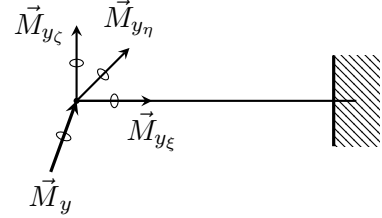
5.5.4 Působení momentů M_x , M_y a M_z

Vypočteme například pátý sloupec matice \underline{B} , který představuje zobecněné posuvy způsobené momentem \vec{M}_y . Nejprve určíme složky vektoru $\vec{M}_y = [0, M_y, 0]^T$ do os lokální soustavy souřadnic:

$$\begin{aligned} M_{y_\xi} &= \vec{M}_y \cdot \vec{\xi}_0 = M_y \cos(\alpha_2), \\ M_{y_\eta} &= \vec{M}_y \cdot \vec{\eta}_0 = -M_y \frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)}, \\ M_{y_\zeta} &= \vec{M}_y \cdot \vec{\zeta}_0 = -M_y \cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Jak vidíme z obrázku 5.4, moment M_{y_ξ} způsobí zkroucení prutu a tedy pootočení jeho konce kolem osy ξ o $\frac{Ml}{GJ_p}$, zatímco jím způsobené posuvy budou nulové:

$$\vec{u}_{M_{y_\xi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$



$$\vec{\varphi}_{M_{y_\xi}} = \frac{M_{y_\xi} l}{GJ_p} \cdot \vec{\xi}_0 = \frac{M_y \cos(\alpha_2) l}{GJ_p} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Obr. 5.4: Moment \vec{M}_y a jeho složky $[M_{y_\xi}, M_{y_\eta}, M_{y_\zeta}]$

Moment M_{y_η} způsobí natočení kolem osy η a posuv ve směru osy ζ . Velikost natočení odpovídá sklonu konce vetknutého nosníku s osamělým ohybovým momentem na konci a má velikost $\frac{Ml}{EJ_o}$. Posuv je roven průhybu konce vetknutého nosníku s osamělým momentem na konci. Jeho velikost je $\frac{Ml^2}{2EJ_o}$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \vec{u}_{M_{y_\eta}} &= \frac{M_{y_\eta} l^2}{2EJ_o} \vec{\zeta}_0 = \frac{-M_y \frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) \\ -\cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ -\cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{M_y l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1) \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos^2(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.26)$$

a

$$\begin{aligned}
 \vec{\varphi}_{M_{y\eta}} &= \frac{M_{y\eta} l}{EJ_o} \vec{\eta}_0 = \frac{-M_y \frac{\cos(\alpha_3) l}{\sin(\alpha_1)}}{EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{M_y l}{EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos^2(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \\ -\frac{\cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \end{bmatrix}. \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

Moment $M_{y\zeta}$ způsobí natočení kolem osy ζ a posuv ve směru osy η . Velikost natočení je $\frac{Ml}{EJ_o}$, posuv má velikost $\frac{Ml^2}{2EJ_o}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_{M_{y\zeta}} &= \frac{M_{y\zeta} l^2}{2EJ_o} \cdot \vec{\eta}_0 = \frac{-M_y \cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_2) l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{M_y l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \\ -\frac{\cos(\alpha_1) \cos^2(\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1)} \end{bmatrix}, \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\varphi}_{M_{y\zeta}} &= \frac{M_{y\zeta} l}{EJ_o} \cdot \vec{\zeta}_0 = \frac{-M_y \cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_2) l}{EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) \\ -\cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ -\cotg(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{M_y l}{EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ \cotg^2(\alpha_1) \cos^2(\alpha_2) \\ \cotg^2(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}. \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

Sečteme jednotlivé vektory posunutí a dostaneme posunutí způsobený momentem \vec{M}_y :

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_{M_y} &= \vec{u}_{M_{y\xi}} + \vec{u}_{M_{y\eta}} + \vec{u}_{M_{y\zeta}} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{M_y l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1) \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos^2(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \end{bmatrix} + \frac{M_y l^2}{2EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \\ -\frac{\cos(\alpha_1) \cos^2(\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1)} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{M_y l^2}{EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha_1)}{2} \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \\ \frac{\cos(\alpha_1) \cos^2(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Podobně naložíme s vektory natočení:

$$\begin{aligned}
 \vec{\varphi}_{M_y} &= \vec{\varphi}_{M_{y\xi}} + \vec{\varphi}_{M_{y\eta}} + \vec{\varphi}_{M_{y\zeta}} \\
 &= \frac{M_y l}{GJ_p} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ \cos^2(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} + \frac{M_y l}{EJ_o} \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ \frac{\cos^2(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} + \cotg^2(\alpha_1) \cos^2(\alpha_2) \\ -\frac{\cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} + \cotg^2(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pátý sloupec matice $\underline{\mathbf{B}}$ má tvar

$$\underline{\mathbf{B}}^{(5)} = \begin{bmatrix} b_{15} \\ b_{25} \\ b_{35} \\ b_{45} \\ b_{55} \\ b_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l^2 \cos(\alpha_1)}{EJ_o} \frac{1}{2} \\ \frac{l^2 \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{EJ_o \sin^2(\alpha_1)} \\ \frac{l^2 \cos(\alpha_1) \cos^2(\alpha_3)}{EJ_o \sin^2(\alpha_1)} \\ \frac{l}{GJ_p} \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \frac{l}{EJ_o} \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\ \frac{l}{GJ_p} \cos^2(\alpha_2) + \frac{l}{EJ_o} \left(\frac{\cos^2(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} + \cotg^2(\alpha_1) \cos^2(\alpha_2) \right) \\ \frac{l}{GJ_p} \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) + \frac{l}{EJ_o} \left(\cotg^2(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) - \frac{\cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3)}{\sin^2(\alpha_1)} \right) \end{bmatrix}.$$

5.5.5 Výsledný tvar matice \underline{B}

Jak jsme ukázali výše, můžeme po jednotlivých sloupcích odvodit celou matici \underline{B} .

Výsledný tvar matice \underline{B} není zdaleka tak nepřehledný, jak by se mohlo z předcházejících odstavců zdát. Zaveďme nejprve matice

$$\underline{S}_1 = \begin{bmatrix} \sin^2(\alpha_1) & -\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) & -\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_3) \\ -\cos(\alpha_2)\cos(\alpha_1) & \sin^2(\alpha_2) & -\cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3) \\ -\cos(\alpha_3)\cos(\alpha_1) & -\cos(\alpha_3)\cos(\alpha_2) & \sin^2(\alpha_3) \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$\underline{S}_2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_1) & \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) & \cos^2(\alpha_2) & \cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_3)\cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_3)\cos(\alpha_2) & \cos^2(\alpha_3) \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

$$\underline{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\alpha_3) & \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) & 0 & -\cos(\alpha_1) \\ -\cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_1) & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

S jejich užitím můžeme matici \underline{B} stručně a přehledně vyjádřit ve tvaru

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EJ_o} \cdot \underline{S}_1 + \frac{l}{ES} \cdot \underline{S}_2 & \frac{l^2}{2EJ_o} \cdot \underline{S}_3 \\ \frac{l^2}{2EJ_o} \cdot \underline{S}_3^T & \frac{l}{EJ_o} \cdot \underline{S}_1 + \frac{l}{GJ_p} \cdot \underline{S}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

S ohledem na to, že matice \underline{S}_1 a \underline{S}_2 jsou symetrické snadno nahlédneme, že i matice \underline{B} je symetrická.

5.5.6 Vliv posouvajících sil

Při odvození matice \underline{B} jsme předpokládali, že je prut štíhlý. Mohli jsme tak použít vztahy pro štíhlé nosníky, které známe ze základních kurzů pružnosti a pevnosti. Pokud prut štíhlý nebude, projeví se na jeho deformacích i zkos, který je způsobený smykovým napětím a souvisí tedy s posouvající silou. Vzhledem k tomu, že tato problematika je poměrně složitá, v základu PP se nepřednáší.

Vezmeme-li zkos v úvahu, dostaneme matici \underline{B} v poněkud jiné podobě:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{l^3}{3EJ_o} + \Phi \frac{l}{GS} \right) \cdot \underline{S}_1 + \frac{l}{ES} \cdot \underline{S}_2 & \frac{l^2}{2EJ_o} \cdot \underline{S}_3 \\ \frac{l^2}{2EJ_o} \cdot \underline{S}_3^T & \frac{l}{EJ_o} \cdot \underline{S}_1 + \frac{l}{GJ_p} \cdot \underline{S}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

kde Φ je takzvaný *Žuravského koeficient*. Tento součinitel zohledňuje fakt, že smykové napětí není po ploše řezu nosníkem rozloženo rovnoměrně. Odvození Žuravského součinitele je nad rámec toho textu.

Je zřejmé, že matice \underline{B} zůstává i s přihlédnutím k vlivu smykových napětí stále symetrická.

5.6 Stanovení matice \underline{C}

Ke stanovení matice \underline{C} se použije postup analogický tomu, který jsme použili pro nalezení matice \underline{B} . Matice \underline{C} je podobně jako matice \underline{B} symetrická.

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{l^4}{8EJ_o} \cdot \underline{S}_1 + \frac{l^2}{2ES} \cdot \underline{S}_2 & \frac{l^3}{6EJ_o} \cdot \underline{S}_3^T \\ \frac{l^3}{6EJ_o} \cdot \underline{S}_3 & \frac{l^2}{2EJ_o} \cdot \underline{S}_1 + \frac{l^2}{2GJ_p} \cdot \underline{S}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

S uvažováním zkosů způsobených smykovými napětími pak platí

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \left(\frac{l^4}{8EJ_o} + \Phi \frac{l^2}{2GS} \right) \cdot \underline{S}_1 + \frac{l^2}{2ES} \cdot \underline{S}_2 & \frac{l^3}{6EJ_o} \cdot \underline{S}_3^T \\ \frac{l^3}{6EJ_o} \cdot \underline{S}_3 & \frac{l^2}{2EJ_o} \cdot \underline{S}_1 + \frac{l^2}{2GJ_p} \cdot \underline{S}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

5.7 Zobecněné posuvy způsobené druhým uzlem

Ve skutečných prutových soustavách není uzel n obvykle vetknutý. Bývá to styčník, kterým jsou připojené další pruty. To znamená, že uzel n má nějaké vlastní zobecněné posuvy $\underline{u}_{\rightarrow n}$. Tyto zobecněné posuvy se projeví i na druhém konci prutu. Předpokládejme, že tento vliv můžeme linearizovat (neboli složky zobecněných posuvů uzlu n jsou malé), takže můžeme zapsat

$$\underline{u}_{\rightarrow m} = \underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{u}_{\rightarrow n}. \quad (5.37)$$

Matici $\underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)}$ nazveme *transformační matice posuvů*.

5.7.1 Transformační matice posuvů $\underline{T}^{(u)}$

Zapišme si vztah (5.37) ve složkách. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}_n$$

Např. t_{11} je tedy posuv uzlu m do směru x způsobený x -ovým posuvem v uzlu n ; t_{34} je posuv uzlu m do směru z způsobený x -ovým pootočením v uzlu n ; t_{56} je pootočení uzlu m kolem osy y způsobené z -ovým pootočením v uzlu n atd.

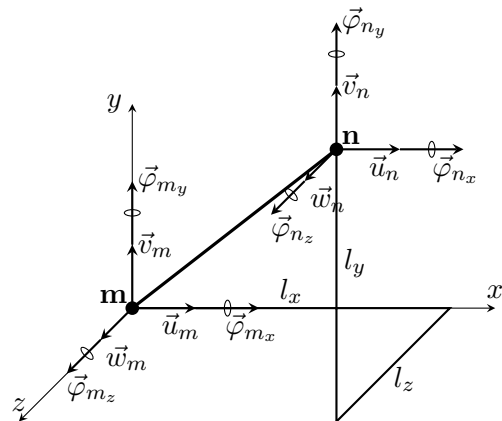
Představme si nejprve, že platí

$$\begin{aligned} u_n &= 1, & \varphi_{n_x} &= 0, \\ v_n &= 0, & \varphi_{n_y} &= 0, \\ w_n &= 0, & \varphi_{n_z} &= 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

což odpovídá tomu, že se uzel n pouze posune ve směru osy x . Je evidentní, že tento posuv se projeví stejným posuvem uzlu m :

$$\begin{aligned} u_m &= 1 \cdot u_n, & \varphi_{m_x} &= 0, \\ v_m &= 0, & \varphi_{m_z} &= 0, \\ w_m &= 0, & \varphi_{m_z} &= 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

První sloupec transformační matice posuvů má



Obr. 5.5: Transformační matice posuvů $\underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)}$ transformuje zobecněné posuvy z uzlu n do uzlu m .

proto tvar

$$\underline{\mathbf{T}}^{(u)(1)} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \\ t_{41} \\ t_{51} \\ t_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Podobnými úvahami zjistíme, že ve druhém sloupci matice $\underline{\mathbf{T}}^{(u)}$ se bude jednička nacházet ve druhém řádku a ve třetím sloupci bude jednička v řádku číslo tři. Získali jsme tak celou levou polovinu matice:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Představme si nyní, že se uzel \mathbf{n} (a celý prut s ním) pootočí o φ_{n_x} . Uzel \mathbf{m} se pootočí o stejný úhel kolem téže osy (x), zatímco pootočení kolem zbývajících os bude nulové. Uzel \mathbf{m} se také posune se v rovině yz , zatímco jeho x -ový posuv bude roven nule.

Podobné úvahy můžeme zopakovat pro pootočení φ_{n_y} a φ_{n_z} . Vyplyvá z nich, že pravý dolní roh transformační matice posuvů bude obsahovat jedničky na diagonále a nuly mimo diagonálu

$$\begin{bmatrix} t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

a pravý horní roh obsahuje na diagonále nuly

$$t_{14} = t_{25} = t_{36} = 0. \quad (5.43)$$

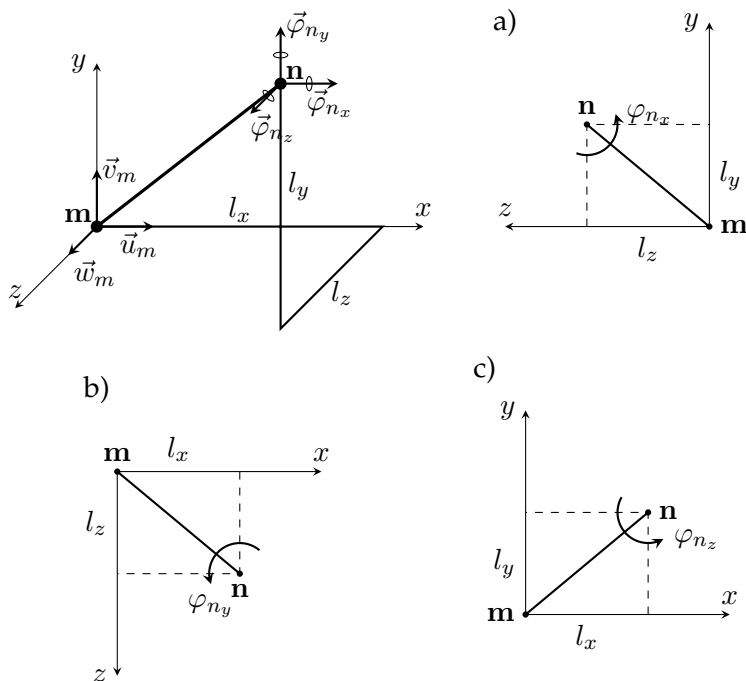
Pohled na případ a) z obrázku 5.6 napoví, že pootočení φ_{n_x} způsobí posuv ve směru y o $l_z\varphi_{n_x}$ a posuv ve směru z o $-l_y\varphi_{n_x}$.

Z pohledu b) stanovíme, že pootočením o φ_{n_y} dostaneme posuv ve směru x o $-l_z\varphi_{n_y}$ a posuv ve směru z o $l_x\varphi_{n_y}$.

Pootočení φ_{n_z} (viz průmět c) v obrázku 5.6) způsobí posuv ve směru y o $-l_x\varphi_{n_z}$ a posuv ve směru x o $l_y\varphi_{n_z}$.

Můžeme tak sestavit celou matici transformace posuvů ve tvaru

$$\underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -l_z & +l_y \\ 0 & 1 & 0 & +l_z & 0 & -l_x \\ 0 & 0 & 1 & -l_y & +l_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$



Obr. 5.6: Prut mn transformující jednotlivé složky natočení uzlu n na složky posuvů uzlu m. Případy a) až c) představují průměty do rovin yz , zx a xy .

5.8 Zobecněné posuvy uzlu m

Uzel m změní svou polohu v důsledku deformace prutu (za níž zodpovídají zatížení prutu $\underline{F}_{\rightarrow m}$, $\underline{q}_{\rightarrow m}$ a ΔT_m a matice \underline{B}_{mn} , \underline{C}_{mn} a $\underline{\alpha}_{mn}$).

Kromě toho se v uzlu m projeví i transformované posuvy uzlu n v podobě vztahu $\underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{u}_{\rightarrow n}$. Všechny tyto vlivy je nutné sečíst – dostáváme tak kompletní vztah pro zobecněné posuvy uzlu m :

$$\underline{u}_{\rightarrow m} = \underline{B}_{mn} \cdot \underline{F}_{\rightarrow m} + \underline{C}_{mn} \cdot \underline{q}_{\rightarrow mn} + \underline{\alpha}_{\rightarrow mn} \cdot \Delta T_{mn} + \underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{u}_{\rightarrow n}. \quad (5.45)$$

5.9 Rovnice rovnováhy uzlu m

Ze vztahu (5.45) vyjádříme zobecněné síly $\underline{F}_{\rightarrow m}$:

$$\underline{F}_{\rightarrow m} = \underline{B}_{mn}^{-1} \cdot \left(\underline{u}_{\rightarrow m} - \underline{C}_{mn} \cdot \underline{q}_{\rightarrow mn} - \underline{\alpha}_{\rightarrow mn} \cdot \Delta T_{mn} - \underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{u}_{\rightarrow n} \right). \quad (5.46)$$

Jsou to zobecněné síly, kterými uzel m působí na prut. Z prutu na uzel působí (podle zákona akce a reakce) stejně velké síly opačného směru.

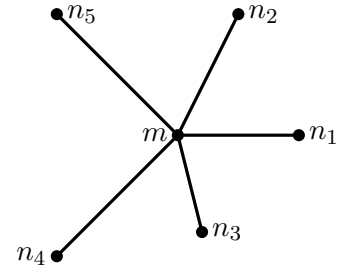
Protože uzel m je zpravidla spojen z několika dalšími sousedy (viz obrázek 5.7), označíme počet jeho sousedů s_m . Souseďní uzly pak označíme n_1, n_2, \dots, n_{s_m} . Součet všech sil z prutů na uzel spolu s vnější silou na uzel musí pro rovnováhu dát nulu:

$$\underline{F}_{\rightarrow m}^{ext} - \sum_{i=1}^{s_m} \left[\underline{B}_{mn_i}^{-1} \cdot \left(\underline{u}_{\rightarrow m} - \underline{C}_{mn_i} \cdot \underline{q}_{\rightarrow mn_i} - \underline{\alpha}_{\rightarrow mn_i} \cdot \Delta T_{mn_i} - \underline{T}_{n_i \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{u}_{\rightarrow n_i} \right) \right] = \underline{0}.$$

Všechny členy obsahující posuvy necháme na levé straně rovnice, ostatní členy převedeme doprava

$$\left(\sum_{i=1}^{s_m} \underline{B}_{mn_i}^{-1} \right) \cdot \underline{u}_{\rightarrow m} - \sum_{i=1}^{s_m} \left[\underline{B}_{mn_i}^{-1} \cdot \underline{T}_{n_i \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{u}_{\rightarrow n_i} \right] = \sum_{i=1}^{s_m} \left[\underline{B}_{mn_i}^{-1} \cdot \left(\underline{C}_{mn_i} \cdot \underline{q}_{\rightarrow mn_i} + \underline{\alpha}_{\rightarrow mn_i} \cdot \Delta T_{mn_i} \right) \right] + \underline{F}_{\rightarrow m}^{ext} \quad (5.47)$$

Získali jsme tak zcela obecnou rovnici rovnováhy uzlu m .



Obr. 5.7: Uzel m s pěti sousedy.

↗ **Příklad – prutová soustava se čtyřmi pruty (bez použití tuhostních matic)**

Na obrázku 5.8 je prutová soustava. Určíme posuvy jejich uzlů. Budeme předpokládat, že známe souřadnice všech uzlů, všechna zatížení, materiálové konstanty a průřezové charakteristiky všech prutů. Zapišeme pak pro každý uzel rovnici rovnováhy podle vztahu (5.47).

Nejprve zavedeme zobecněná zatížení

$$\vec{F}_4 = \begin{bmatrix} \vec{F}_4 \\ \vec{M}_4 \end{bmatrix}$$

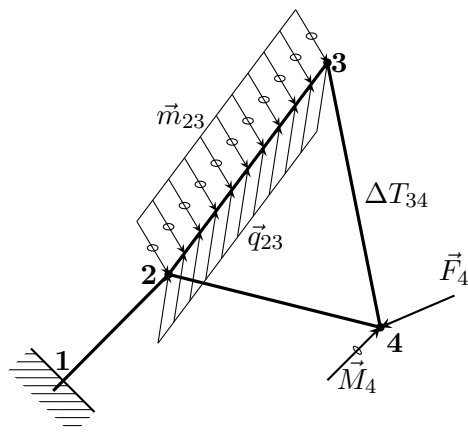
a

$$\vec{q}_{23} = \begin{bmatrix} \vec{q}_{23} \\ \vec{m}_{23} \end{bmatrix}$$

Uzel č. 1

Tabulka shrnuje informace o uzlu č. 1 – tj. zatížení uzlu, počet jeho sousedů a zatížení přilehlých prutů.

Uzel $m = 1$	
Zatížení uzlu $\vec{F}_1^{ext} = \vec{0}, \vec{M}_1^{ext} = \vec{0}$	
Sousedí uzlu $s_1 = 1, \mathbf{n}_i = \{2\}$	
	Pruty
Veličina	12
\vec{q}	$\vec{0}$
\vec{m}	$\vec{0}$
ΔT	0



Obr. 5.8: Prutová soustava je tvořena čtyřmi styčníky a čtyřmi pruty. Styčník č. 1 je vetknutý, na styčník č. 4 působí síla a moment. Prut 34 je ohřátý o ΔT a na prut 23 působí spojitě rozložená síla a spojitě rozložený moment. (Vektory \vec{m}_{23} a \vec{q}_{23} samozřejmě nejsou kolmé k prutu 23.)

Rovnice (5.47) bude mít tvar

$$\underline{\mathbf{B}}_{12}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{u}}_1 - \underline{\mathbf{B}}_{12}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 1}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{0}}. \quad (5.48)$$

Uzel č. 2

Tabulka shrnuje informace o uzlu č. 2 – tj. zatížení uzlu, počet jeho sousedů a zatížení přilehlých prutů.

Uzel $\mathbf{m} = 2$			
Zatížení uzlu $\vec{F}_2^{ext} = \vec{0}, \vec{M}_2^{ext} = \vec{0}$			
Sousedí uzlu $s_2 = 3, \mathbf{n}_i = \{1, 3, 4\}$			
	Pruty		
Veličina	21	23	24
\vec{q}	$\vec{0}$	\vec{q}_{23}	$\vec{0}$
\vec{m}	$\vec{0}$	\vec{m}_{23}	$\vec{0}$
ΔT	0	0	0

Rovnice (5.47) bude mít tvar

$$\left(\underline{\mathbf{B}}_{21}^{-1} + \underline{\mathbf{B}}_{23}^{-1} + \underline{\mathbf{B}}_{24}^{-1}\right) \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 - \left(\underline{\mathbf{B}}_{21}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{1 \rightarrow 2}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{B}}_{23}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{3 \rightarrow 2}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_3 + \underline{\mathbf{B}}_{24}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{4 \rightarrow 2}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_4\right) = \underline{\mathbf{B}}_{23}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{23} \cdot \underline{\mathbf{q}}_{23}. \quad (5.49)$$

Uzel č. 3

Tabulka shrnuje informace o uzlu č. 3 – tj. zatížení uzlu, počet jeho sousedů a zatížení přilehlých prutů.

Uzel $m = 3$		
Zatížení uzlu $\vec{F}_3^{ext} = \vec{0}, \vec{M}_3^{ext} = \vec{0}$		
Sousedí uzlu $s_3 = 2, \mathbf{n}_i = \{2, 4\}$		
	Pruty	
Veličina	32	34
\vec{q}	\vec{q}_{23}	$\vec{0}$
\vec{m}	\vec{m}_{23}	$\vec{0}$
ΔT	0	ΔT_{34}

Rovnice (5.47) bude mít tvar

$$(\underline{\mathbf{B}}_{32}^{-1} + \underline{\mathbf{B}}_{34}^{-1}) \cdot \underline{\mathbf{u}}_3 - (\underline{\mathbf{B}}_{32}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 3}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 + \underline{\mathbf{B}}_{34}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{4 \rightarrow 3}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_4) = \underline{\mathbf{B}}_{32}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{32} \cdot \underline{\mathbf{q}}_{23} + \underline{\mathbf{B}}_{34}^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{34} \cdot \Delta T_{34}. \quad (5.50)$$

Uzel č. 4

Tabulka shrnuje informace o uzlu č. 4 – tj. zatížení uzlu, počet jeho sousedů a zatížení přilehlých prutů.

Uzel $m = 4$		
Zatížení uzlu $\vec{F}_4^{ext} = \vec{F}_4, \vec{M}_4^{ext} = \vec{M}_4$		
Sousedí uzlu $s_4 = 2, \mathbf{n}_i = \{2, 3\}$		
	Pruty	
Veličina	42	43
\vec{q}	$\vec{0}$	$\vec{0}$
\vec{m}	$\vec{0}$	$\vec{0}$
ΔT	0	ΔT_{34}

Rovnice (5.47) bude mít tvar

$$(\underline{\mathbf{B}}_{42}^{-1} + \underline{\mathbf{B}}_{43}^{-1}) \cdot \underline{\mathbf{u}}_4 - (\underline{\mathbf{B}}_{42}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{2 \rightarrow 4}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 + \underline{\mathbf{B}}_{43}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{3 \rightarrow 4}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_3) = \underline{\mathbf{B}}_{43}^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{43} \cdot \Delta T_{34} + \underline{\mathbf{F}}_4. \quad (5.51)$$

Rovnice (5.48) až (5.51) uspořádáme do soustavy

$$\begin{bmatrix} \underline{B}_{12}^{-1} & -\underline{B}_{12}^{-1} \cdot \underline{T}_{2 \rightarrow 1}^{(u)} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{B}_{21}^{-1} \cdot \underline{T}_{1 \rightarrow 2}^{(u)} & (\underline{B}_{21}^{-1} + \underline{B}_{23}^{-1} + \underline{B}_{24}^{-1}) & -\underline{B}_{23}^{-1} \cdot \underline{T}_{3 \rightarrow 2}^{(u)} & -\underline{B}_{24}^{-1} \cdot \underline{T}_{4 \rightarrow 2}^{(u)} \\ \underline{0} & -\underline{B}_{32}^{-1} \cdot \underline{T}_{2 \rightarrow 3}^{(u)} & (\underline{B}_{32}^{-1} + \underline{B}_{34}^{-1}) & -\underline{B}_{34}^{-1} \cdot \underline{T}_{4 \rightarrow 3}^{(u)} \\ \underline{0} & -\underline{B}_{42}^{-1} \cdot \underline{T}_{2 \rightarrow 4}^{(u)} & -\underline{B}_{43}^{-1} \cdot \underline{T}_{3 \rightarrow 4}^{(u)} & (\underline{B}_{42}^{-1} + \underline{B}_{43}^{-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_{\rightarrow 1} \\ \underline{u}_{\rightarrow 2} \\ \underline{u}_{\rightarrow 3} \\ \underline{u}_{\rightarrow 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{B}_{23}^{-1} \cdot \underline{C}_{23} \cdot \underline{q}_{\rightarrow 23} \\ \underline{B}_{32}^{-1} \cdot \underline{C}_{32} \cdot \underline{q}_{\rightarrow 23} + \underline{B}_{34}^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{\rightarrow 34} \cdot \Delta T_{34} \\ \underline{B}_{43}^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{\rightarrow 43} \cdot \Delta T_{34} + \underline{F}_{\rightarrow 4} \end{bmatrix}.$$

Modifikace

Vetknutí uzlu č. 1 odpovídá tomu, že prvních šest neznámých bude rovno nule. To se v soustavě projeví tím, že namísto matice \underline{B}_{12}^{-1} na diagonále bude jednotková matice \underline{I} a součiny $-\underline{B}_{12}^{-1} \cdot \underline{T}_{2 \rightarrow 1}^{(u)}$ z prvního blokového řádku a sloupce budou nahrazeny nulovými maticemi.

Modifikovaná soustava rovnic má tedy tvar.

$$\begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & (\underline{B}_{21}^{-1} + \underline{B}_{23}^{-1} + \underline{B}_{24}^{-1}) & -\underline{B}_{23}^{-1} \cdot \underline{T}_{3 \rightarrow 2}^{(u)} & -\underline{B}_{24}^{-1} \cdot \underline{T}_{4 \rightarrow 2}^{(u)} \\ \underline{0} & -\underline{B}_{32}^{-1} \cdot \underline{T}_{2 \rightarrow 3}^{(u)} & (\underline{B}_{32}^{-1} + \underline{B}_{34}^{-1}) & -\underline{B}_{34}^{-1} \cdot \underline{T}_{4 \rightarrow 3}^{(u)} \\ \underline{0} & -\underline{B}_{42}^{-1} \cdot \underline{T}_{2 \rightarrow 4}^{(u)} & -\underline{B}_{43}^{-1} \cdot \underline{T}_{3 \rightarrow 4}^{(u)} & (\underline{B}_{42}^{-1} + \underline{B}_{43}^{-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_{\rightarrow 1} \\ \underline{u}_{\rightarrow 2} \\ \underline{u}_{\rightarrow 3} \\ \underline{u}_{\rightarrow 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{B}_{23}^{-1} \cdot \underline{C}_{23} \cdot \underline{q}_{\rightarrow 23} \\ \underline{B}_{32}^{-1} \cdot \underline{C}_{32} \cdot \underline{q}_{\rightarrow 23} + \underline{B}_{34}^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{\rightarrow 34} \cdot \Delta T_{34} \\ \underline{B}_{43}^{-1} \cdot \underline{\alpha}_{\rightarrow 43} \cdot \Delta T_{34} + \underline{F}_{\rightarrow 4} \end{bmatrix}.$$

✓

5.10 Tuhostní matice prutu

Sestavení rovnic rovnováhy výše uvedeným způsobem je možné, není ale praktické. Pro každý prut mn totiž musíme znát jeho matici \underline{B}_{mn}^{-1} ale též jeho matici \underline{B}_{nm}^{-1} . Stejně musíme určit matici $\underline{T}_{m \rightarrow n}^{(u)}$ i matici $\underline{T}_{n \rightarrow m}^{(u)}$. Každý prut se tak vlastně zpracovává dvakrát. Poprvé, když sestavujeme rovnici rovnováhy jednoho jeho uzlu, podruhé při sestavování rovnice rovnováhy druhého uzlu.

Je proto praktičtější (a při výpočtech rychlejší) sestavit *tuhostní matici prutu* a matici soustavy sestavovat z jednotlivých tuhostních matic prutů, jak jsme se to naučili v kapitole 2.7.

Nejprve si zavedeme pojem *transformační matice sil*.

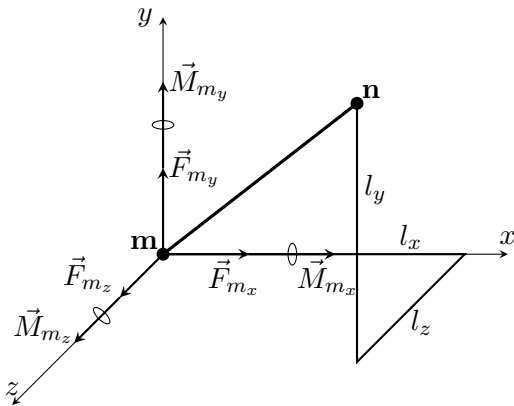
5.10.1 Transformační matice sil $\underline{T}^{(F)}$

Předpokládejme, že z uzlu m působí na prut zobecněná síla $\underline{F}_{\rightarrow m}$. Stanovíme, jaké zobecněné síly působí na druhém konci prutu – z prutu na uzel n .

Zavedme lineární vztah mezi silami v uzlech

$$\underline{F}_{\rightarrow n} = \underline{T}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{F}_{\rightarrow m}. \quad (5.52)$$

Matici $\underline{T}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ nazveme *transformační maticí sil* z uzlu m do uzlu n . Poslední vztah zapíšeme



Obr. 5.9: Transformační matice sil $\underline{T}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ transformuje zobecněné síly z uzlu m do uzlu n .

Vstupem jsou síly z uzlu m na prut mn , výstupem síly z prutu mn na uzel n .

ve složkách.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_m \quad (5.53)$$

Vidíme, že například t_{11} je síla na uzel n do směru x způsobená x -ovou silou z uzlu m ; t_{21} je síla na uzel n do směru y způsobená x -ovou silou z uzlu m ; t_{56} je moment na uzel n kolem osy y způsobený z -ovým momentem z uzlu m atd.

Je zřejmé, že působí-li v uzlu m síla F_x , musí ve druhém uzlu být reakce $-F_x$. Reakce je síla z uzlu na prut, síla z prutu na uzel je $+F_x$. Síla se tedy přenáší beze změny. Stejná úvaha platí i pro zbývající dvě složky síly. To znamená, že první tři diagonální členy matice $\underline{T}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ jsou rovný jedné:

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = 1. \quad (5.54)$$

Síla F_{m_x} nevyvolá žádné silové reakce do směrů y a z , podobně jako F_{m_y} nevyvolá žádné silové reakce do směrů x a z a F_{m_z} nevyvolá žádné silové reakce do směrů x a y . Levý horní roh matice $\underline{T}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ má tedy tvar

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Vektor momentu M_{m_x} způsobí stejný moment na druhém konci prutu, zatímco síly v uzlu n budou nulové. Platí tedy

$$\begin{aligned} F_{n_x} &= 0 \cdot M_{m_x}, \\ F_{n_y} &= 0 \cdot M_{m_x}, \\ F_{n_z} &= 0 \cdot M_{m_x}, \\ M_{n_x} &= 1 \cdot M_{m_x}, \\ M_{n_y} &= 0 \cdot M_{m_x}, \\ M_{n_z} &= 0 \cdot M_{m_x}. \end{aligned}$$

Analogické úvahy platí pro momenty M_{m_y} a M_{m_z} . Dostaneme tak čtvrtý, pátý a šestý sloupec matice $\underline{T}_{m \rightarrow n}^{(F)}$

$$\begin{bmatrix} t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Nakresleme si pohled do roviny yz proti směru síly F_{m_x} - viz obrázek 5.10. Je zřejmé, že síla F_{m_x} mířící k pozorovateli způsobí v uzlu \mathbf{n} nenulové momenty M_{n_y} a M_{n_z} , zatímco moment M_{n_x} bude nulový.

Dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} M_{n_x} &= 0, \\ M_{n_y} &= -F_{m_x} \cdot l_z, \\ M_{n_z} &= +F_{m_x} \cdot l_y \end{aligned}$$

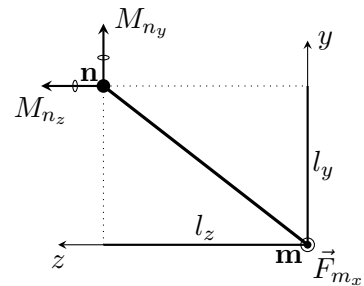
a tedy

$$\begin{bmatrix} t_{41} \\ t_{51} \\ t_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .0 \\ -l_z \\ +l_y \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Analogicky stanovíme velikosti momentů způsobené silou F_{m_y} - viz obrázek 5.11.

Dostaneme vztahy

$$\begin{bmatrix} t_{42} \\ t_{52} \\ t_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +l_z \\ 0 \\ -l_x \end{bmatrix} \quad (5.58)$$



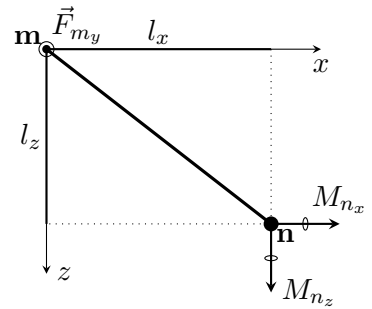
Obr. 5.10: Síla F_{m_x} míří z nákresny směrem k pozorovateli. Tato síla způsobí v uzlu \mathbf{n} momenty okolo os y' resp y a z' resp. z . S ohledem na směry os platí $M_{n_y} = -F_{m_x} \cdot l_z$ a $M_{n_z} = F_{m_x} \cdot l_y$. Protože je síla F_x rovnoběžná s osou x , platí $M_{m_x} = 0$.

Stejně bychom postupovali i se silou F_{m_z} a dostali bychom

$$\begin{bmatrix} t_{43} \\ t_{53} \\ t_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_y \\ +l_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Kombinací vztahů (5.55) až (5.59) dostaneme transformační matici sil $\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ ve tvaru

$$\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +l_z & -l_y & 1 & 0 & 0 \\ -l_z & 0 & +l_x & 0 & 1 & 0 \\ +l_y & -l_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$



Obr. 5.11: Síla F_{m_y} míří z nákresny směrem k pozorovateli. Platí $M_{n_x} = F_{m_y} \cdot l_z$, $M_{n_z} = -F_{m_y} \cdot l_x$ a $M_{m_y} = 0$.

Srovnáním se vztahem (5.44) pro transformační matici posuvů $\underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)}$ shledáme, že platí

$$\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} = \left(\underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \right)^T. \quad (5.61)$$

5.10.2 Sestavení tuhostní matice prutu

Zavedme označení $\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m}^n$ pro zobecněné síly z uzlu m na prut, které jsou způsobeny zobecněnými posuvy uzlu n.

Vrátíme se k rovnici (5.46). Protože se teď budeme zabývat pouze silami, které jsou způsobené posuvy, tak členy obsahující zobecněná zatížení (síly, spojitá zatížení a ΔT) vypustíme:

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m} = \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \left(\underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m} - \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow n} \right). \quad (5.62)$$

neboli

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m} = \underbrace{\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m}}_{\underline{\mathbf{F}}_m^m} - \underbrace{\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow n}}_{\underline{\mathbf{F}}_m^n}. \quad (5.63)$$

Tedy

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_m^m &= \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m}, \\ \underline{\mathbf{F}}_m^n &= -\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow n}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Podobně můžeme zapsat sílu na uzel n :

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n} = \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n}^n + \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n}^m. \quad (5.65)$$

Síly $\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m}$ s použitím transformační matice sil $\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ transformujeme do uzlu n . Transformační matice tak, jak jsme ji odvodili, nám dá síly z prutu na uzel. Nás však zajímají síly z uzlu na prut, proto je nutné připojit ještě znaménko mínus:

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n} = -\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m} = -\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \left(\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m} - \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow n} \right). \quad (5.66)$$

Pro sílu $\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n}^m$ tak můžeme napsat

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n}^m = -\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m} \quad (5.67)$$

a pro sílu $\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n}^n$

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n}^n = \underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow n}. \quad (5.68)$$

Nyní můžeme zapsat maticově

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m} \\ \underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} & -\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \\ -\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} & \underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m} \\ \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow n} \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

Matici

$$\underline{\mathbf{K}}_{mn} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} & -\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \\ -\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} & \underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

nazýváme *tuhostí maticí prutu mn*.

5.10.3 Symetrie tuhostní matice prutu

Podívejme se na pravý horní blok tuhostní matice prutu, tj. na člen $-\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)}$. Protože matice $\underline{\mathbf{B}}_{mn}$ je symetrická, bude symetrická i její inverze $\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1}$. Ukázali jsme také, že platí $\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} = \left(\underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \right)^T$. Můžeme proto psát

$$-\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} = -\left(\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \right)^T \cdot \left(\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \right)^T = \left(-\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1} \right)^T. \quad (5.71)$$

Pravý horní blok je tedy transpozicí levého dolního rohu.

Pravý dolní blok je tvořen symetrickou maticí $\underline{\mathbf{B}}_{mn}^{-1}$, která je zprava násobena $\underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)}$ a zleva maticí $\underline{\mathbf{T}}_{m \rightarrow n}^{(F)}$ neboli (s ohledem na (5.61)) $\left(\underline{\mathbf{T}}_{n \rightarrow m}^{(u)} \right)^T$. Výsledek je symetrický.

Z uvedených poznatků je zřejmé, že *tuhostní matice prutu je symetrická*.

⇨ **Příklad – prutová soustava se čtyřmi pruty (s použitím tuhostních matic)**

Podíváme se znovu na prutovou soustavu, která je znázorněná na obrázku 5.8 na straně 77.

Definice (5.70) nám umožní stanovit tuhostní matice všech čtyř prutů \underline{K}_{12} , \underline{K}_{23} , \underline{K}_{34} a \underline{K}_{42} . Celková tuhostní matice soustavy bude mít čtyři blokové řádky a čtyři blokové sloupce. Podle pravidel pro umísťování bloků tuhostních matic prvků získáme celkovou tuhostní matici \underline{K}_c .

Zapišme si nejprve blokovou strukturu tuhostních matic prvků. Blokové rozměry jsou $[2 \times 2]$, jednotlivé bloky představují sílu v uzlu (\underline{R}), způsobenou posuvy (\underline{u}). Například sílu v uzlu číslo 3 způsobenou posuvy uzlu 1 můžeme symbolicky zapsat takto: „ $\underline{R}_3 // \underline{u}_1$ “.

$$\underline{K}_{12} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{12,1,1} & \underline{k}_{12,1,2} \\ \underline{k}_{12,2,1} & \underline{k}_{12,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{„}\underline{R}_1 // \underline{u}_1\text{“} & \text{„}\underline{R}_1 // \underline{u}_2\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_1\text{“} & \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_2\text{“} \end{bmatrix} \quad \underline{K}_{23} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{23,1,1} & \underline{k}_{23,1,2} \\ \underline{k}_{23,2,1} & \underline{k}_{23,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_2\text{“} & \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_3\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_2\text{“} & \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_3\text{“} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_{34} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{34,1,1} & \underline{k}_{34,1,2} \\ \underline{k}_{34,2,1} & \underline{k}_{34,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_3\text{“} & \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_4\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_3\text{“} & \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_4\text{“} \end{bmatrix} \quad \underline{K}_{42} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{42,1,1} & \underline{k}_{42,1,2} \\ \underline{k}_{42,2,1} & \underline{k}_{42,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_4\text{“} & \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_2\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_4\text{“} & \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_2\text{“} \end{bmatrix}$$

Celková tuhostní matice má v blocích symbolicky zapsaný tvar

$$\underline{K}_c = \begin{bmatrix} \text{„}\underline{R}_1 // \underline{u}_1\text{“} & \text{„}\underline{R}_1 // \underline{u}_2\text{“} & \text{„}\underline{R}_1 // \underline{u}_3\text{“} & \text{„}\underline{R}_1 // \underline{u}_4\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_1\text{“} & \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_2\text{“} & \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_3\text{“} & \text{„}\underline{R}_2 // \underline{u}_4\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_1\text{“} & \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_2\text{“} & \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_3\text{“} & \text{„}\underline{R}_3 // \underline{u}_4\text{“} \\ \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_1\text{“} & \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_2\text{“} & \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_3\text{“} & \text{„}\underline{R}_4 // \underline{u}_4\text{“} \end{bmatrix}$$

a proto platí

$$\underline{K}_c = \begin{bmatrix} \underline{k}_{12,1,1} & \underline{k}_{12,1,2} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{k}_{12,2,1} & (\underline{k}_{12,2,2} + \underline{k}_{23,1,1} + \underline{k}_{42,2,2}) & \underline{k}_{23,1,2} & \underline{k}_{42,2,1} \\ \underline{0} & \underline{k}_{23,2,1} & (\underline{k}_{23,2,2} + \underline{k}_{34,1,1}) & \underline{k}_{34,1,2} \\ \underline{0} & \underline{k}_{42,1,2} & \underline{k}_{34,2,1} & (\underline{k}_{34,2,2} + \underline{k}_{42,1,1}) \end{bmatrix}.$$

✓

5.11 Vazby

Odebrání stupně volnosti uzlu bylo diskutováno v kapitole 2.10.1 na straně 48. Postup u prutové soustavy je shodný. Kromě posuvů můžeme odebírat i natočení.

V následujících odstavcích se podáváme na další typy vazeb.

5.11.1 Pružina ze styčnicku k rámu

Situaci, kdy je uzel spojen s rámem pomocí pružiny, znázorňuje obrázek 5.12. Změna délky pružiny je dána průměty složek posuvu do směru pružiny, tj.

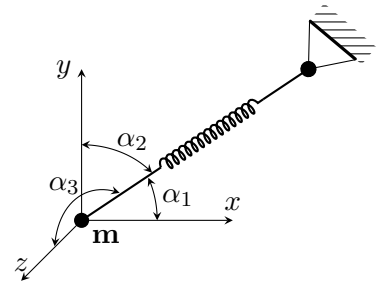
$$\Delta l = u \cos(\alpha_1) + v \cos(\alpha_2) + w \cos(\alpha_3), \quad (5.72)$$

síla v pružině má velikost

$$F = k (u \cos(\alpha_1) + v \cos(\alpha_2) + w \cos(\alpha_3)), \quad (5.73)$$

kde k je tuhost pružiny. Síla působí proti směru posuvů a její složky do směrů os tedy jsou

$$\begin{aligned} F_x &= -k \cos(\alpha_1) (u \cos(\alpha_1) + v \cos(\alpha_2) + w \cos(\alpha_3)), \\ F_y &= -k \cos(\alpha_2) (u \cos(\alpha_1) + v \cos(\alpha_2) + w \cos(\alpha_3)), \\ F_z &= -k \cos(\alpha_3) (u \cos(\alpha_1) + v \cos(\alpha_2) + w \cos(\alpha_3)). \end{aligned} \quad (5.74)$$



Obr. 5.12: Pružina ze styčnicku k rámu.

Poslední tři vztahy zapíšeme maticově

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_1) & \cos^2(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_2) & \cos^2(\alpha_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Maticy

$$\underline{\kappa} = k \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_1) & \cos^2(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \\ \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_2) & \cos^2(\alpha_3) \end{bmatrix} = k \cdot \underline{S}_2 \quad (5.76)$$

vyjadřuje vlastnosti pružiny – síly na uzel \mathbf{m} , způsobené posuvy uzlu \mathbf{m} (matici \underline{S}_2 jsme zavedli vztahem (5.31)). V celkové tuhostní matici vyhledáme blok $\underline{K}_{c_{m,m}}$ a matici $\underline{\kappa}$ přičteme

k jeho levému hornímu rohu – viz. obrázek 5.13.

5.11.2 Pružina mezi styčníky

Jsou-li dva styčníky spojené pružinou, jedná se vlastně o zvláštní případ prutu. Tuhostní matici takového prutu/pružiny sestavíme s použitím matice $\underline{\kappa}$ z minulého odstavce. Pokud v uzlu \mathbf{m} působí vektor síly \vec{F} , bude v uzlu \mathbf{n} působit vektor síly $-\vec{F}$. Sudé řádky budou nulové, protože pružina nezpůsobuje žádné momenty. Tuhostní matice má tvar

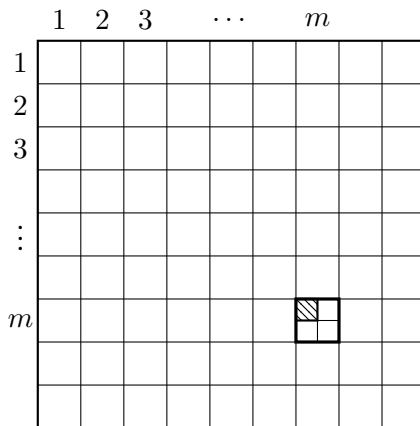
$$\underline{\mathbf{K}}_{mn}^{\text{pruž.}} = \begin{bmatrix} \underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

a nakládáme s ní stejně, jako s tuhostní maticí jakéhokoli jiného prutu.

5.11.3 Prut s kloubovými styčníky

Prut s kloubovými styčníky můžeme považovat za pružinu s tuhostí

$$k = \frac{ES}{l}. \quad (5.78)$$



Obr. 5.13: Matice $\underline{\kappa}$ vyjadřuje vztah mezi posuvy uzlu \mathbf{m} a silami v uzlu \mathbf{m} . V celkové tuhostní matici ji proto budeme přičítat k levému hornímu rohu bloku $\underline{\mathbf{K}}_{c_{m,m}}$.

Tuhostní matice takového prutu má tvar

$$\underline{\mathbf{K}}_{mn} = \begin{bmatrix} \underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\kappa} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{S}}_2 & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{S}}_2 & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{S}}_2 & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{S}}_2 & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}. \quad (5.79)$$

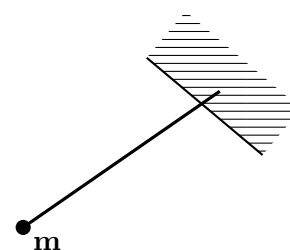
5.11.4 Styčnický spojený prutem s rámem

Je-li styčnický spojen s rámem pomocí prutu (viz obr. 5.14), určíme pro tento prut jeho matici $\underline{\mathbf{B}}$. Jak víme ze vztahu (5.11), matice $\underline{\mathbf{B}}$ k zobecněným silám ze styčnicku na prut přiřazuje odpovídající zobecněné posuvy styčnicku. Pro síly ze styčnicku na prut platí tedy vztah

$$\underline{\mathbf{F}}_{\rightarrow m} = \underline{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\rightarrow m}, \quad (5.80)$$

zatímco síly z prutu na styčnick jsou podle zákona akce a reakce stejně velké, avšak opačného směru. Matice $\underline{\kappa}$, kterou budeme přičítat k bloku $\underline{\mathbf{K}}_{c_m, m}$ celkové tuhostní matice bude proto

$$\underline{\kappa} = -\underline{\mathbf{B}}^{-1}. \quad (5.81)$$



Obr. 5.14: Styčnick m je spojen s rámem pomocí prutu.

5.12 Prutová soustava s kloubovými styčnickými

Obsahuje-li prutová soustava pouze kloubové styčnický, můžeme sestavit celkovou tuhostní matici z tuhostních matic prutů podle vztahu (5.79). V takovém případě bude však každý sudý blokový řádek a sloupec celkové tuhostní matice nulový a řešit natočení styčnicků nemá smysl.

Pro prutovou soustavu s kloubovými styčnickými se redukuje počet stupňů volnosti každého uzlu na tři složky posuvu. Tuhostní matice prutů budou mít tvar

$$\underline{\mathbf{K}}_{mn} = \begin{bmatrix} \underline{\kappa} & -\underline{\kappa} \\ -\underline{\kappa} & \underline{\kappa} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{S}}_2 & -\underline{\mathbf{S}}_2 \\ -\underline{\mathbf{S}}_2 & \underline{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

5.13 Shrnutí

Odvozené vztahy umožňují sestavit prutovou soustavu (pro pruty s kruhovým nebo mezi-kruhovým průřezem) s tuhými i kloubovými styčnickými, které je možné libovolně kombinovat.

Název	Modelování
Autor	Tomáš Hruš
Vydavatel	Technická univerzita v Liberci Studentská 1402/2, Liberec
Scháleno	Rektorátem TUL dne 19.5. 2023, čj. RE 21/23
vyšlo	v květnu 2023
Vydání	1.
ISBN	978-80-7494-651-6
Č. publikace	55-021-23

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou

