

Topologie a poetika prostoru

Svazek II.

Editoři — Jaroslav Nešetřil a Tomáš Vlček

Topology and Poetics of Space

Volume II.

Editors — Jaroslav Nešetřil a Tomáš Vlček

Druhý svazek knihy *Topologie a poetika prostoru* editovaný **Jaroslavem Nešetřilem**, profesorem Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, a **Tomášem Vlčkem**, profesorem Fakulty umění a architektury Technické univerzity v Liberci, rozvíjí téma interakcí vědeckého a uměleckého tvůrčího myšlení inspirovaného topologií. Kniha seznamuje s interdisciplinárními tématy humanitního a vědeckého poznání současnosti. Charakterizace původu a působení topologických témat poskytuje uvedeným studiím možnost ověřování skutečných vztahů řady oborů, v nichž se topologie úspěšně uplatňuje, často ovšem jen v metaforických náznacích. Druhý svazek knihy představuje topologické motivy jako podstatné pro tendence kulturního obratu počínajícího v šedesátých letech 20. století a pokračujícího v tvůrčím poznání současnosti. Kniha předkládá nová fakta získaná při řešení klíčových otázek v oborech neurologie, psychologie, ve filozofii a dalších oborech humanitních studií spojených jak s vědou, tak s uměním a jeho poetikou. Kniha je jedním z výsledků studií v prostředí působení Interdisciplinárního semináře topologických studií poetiky umění, krajiny a architektury založeného roku 2015 a působícího při Fakultě umění a architektury Technické univerzity v Liberci a při Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Tato kniha vznikla na základě projektu spolufinancovaného se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu Éta.

T A
Č R

Tento projekt je spolufinancován se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu ÉTA.
www.tacr.cz
Výzkum užitečný pro společnost.

Topologie a poetika prostoru
Svazek II.

Topology and Poetics of Space
Volume II.

ISBN 978-80-7494-665-3 (Svazek 2 / Volume 2)

ISBN 978-80-7494-663-9 (Soubor / Set)

ISBN 978-80-7494-664-6 (Svazek 1 / Volume 1)

Vydala Technická univerzita v Liberci v roce 2023

Published by the Technical University of Liberec in 2023

Topologie a poetika prostoru

Svazek II.

Editori — Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

Topology and Poetics of Space

Volume II.

Editors — Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

Recenzenti **Reviewers**

prof. PhDr. Petr Kratochvíl, CSc.
doc. RNDr. Jan Hubička, Ph.D.

Obsah Content

Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

Předmluva a poděkování — STRANA 6

Foreword and Acknowledgement — PAGE 7

Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

Topologie a poetika prostoru — STRANA 10

Topology and Poetics of Space — PAGE 11

Aleš Pultr

Prostor, topologie a pár poznámek o bezbodové topologii — STRANA 110

Space, Topology, and a Few Remarks on Pointfree Topology — PAGE 111

Michal Vik, Martina Viková

Topologie barvy — STRANA 144

Topology of Color — PAGE 145

Karel Ježek

Mozek jako topologický procesor — STRANA 206

Brain as a Topological Processor — PAGE 207

Michael A. Arbib

Prostor a čas v architektuře a díle Magdaleny Jetelové — STRANA 270

Space and Time in Architecture and the Works of Magdalena Jetelová — PAGE 271

Filip Šenk

Prolínání uzavřenosti

Ke kontinuitě dění místa jako vztahů vnitřku a vnějšku — STRANA 342

The Blending of Closedness

On the Continuity of the Action of a Place as Relations of the Outside and Inside — PAGE 343

Jiří Uran Vítek

Topologické myšlení v architektuře — STRANA 376

Topological Thinking in Architecture — PAGE 377

Aleš Svoboda

Za nový vizuální náhled (Směřování k novému vizuálnímu významu) — STRANA 416

For a New Visual Insight (Towards a New Visual Meaning) — PAGE 417

Autoři — STRANA 460

Authors — PAGE 461

Předmluva a poděkování

Jaroslav Nešetřil a Tomáš Vlček
V Liberci a Praze, 1. října 2022

Uvedené knihy (sborníky interdisciplinárních studií topologie a poetiky umění, krajiny a architektury) uzavírají čtyřletý výzkumný projekt Topologie a poetika prostoru, TL02000573, spolufinancovaný se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu Éta.

Hlavním řešitelem tohoto výzkumu byl navržen a přijat prof. dr. Tomáš Vlček z Fakulty umění a architektury Technické univerzity v Liberci. Grant byl udělen týmu soustředěnému v Interdisciplinárním semináři topologických studií poetiky umění, krajiny a architektury, semináři založeným Fakultou umění a architektury TUL a Matematicko-fyzikální fakultou UK v Praze roku 2015 profesorem Jaroslavem Nešetřilem a profesorem Tomášem Vlčkem.

Tématem uskutečněného výzkumu se stalo řešení otázek soudobého poznání překonávajících izolovanost segmentů současné kultury, této jedné z hlavních příčin krize kulturního života společnosti moderní a postmoderní doby. Metodologické zaměření na topologii vyplývá z komplexnosti topologie, která se dnes uplatňuje v řadě inspirativních interakcí separovaných oborů tvůrčí práce ve vědě, ve filozofii a v neposlední řadě v umění. Rozsah a obsah těchto interakcí se od poslední třetiny 20. století stává tak výrazný, že můžeme ve shodě s francouzskými filozofy konce 20. století mluvit o jednom z nejvýznamnějších obrátů v moderní a pozdně moderní civilizaci. V uvedených souvislostech se ukazuje omezená platnost teoretických klastrů daných přesvědčením o dostatečnosti kauzálně příčinné interpretaci věcí, o interpretaci limitované jejich vnímáním a hodnocením, jako uzavřených, statických entit skutečnosti. S topologií se otevírá komplexnější pohled na skutečnost jako na propojenou rozmanitost kvalit věcí a událostí, vnímaných jako mnohostranně propojené dění.

Foreword and Acknowledgements

Jaroslav Nešetřil and Tomáš Vlček
Liberec and Prague, 1st October, 2022

These books (collections of interdisciplinary studies of topology and poetics of art, landscape and architecture) conclude a four-year research project *Topology and Poetics of Space*, TL02000573, co-funded with the state support of the Technology Agency of the Czech Republic within its *Éta* programme.

Professor Doctor Tomáš Vlček from the Faculty of Arts and Architecture of the Technical University in Liberec was nominated and approved as the principal investigator of this research. The grant was awarded to the team around the Interdisciplinary Seminar of Topological Studies of Poetics of Art, Landscape and Architecture, a seminar founded by the Faculty of Arts and Architecture of TUL and the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague in 2015 by Professor Jaroslav Nešetřil and Professor Tomáš Vlček.

The theme of the research was to address the issues of contemporary knowledge, overcoming the isolation of segments of contemporary culture, one of the main causes of the crisis of cultural life in modern and postmodern society. The methodological focus of topology stems from the complexity of topology which is today applied in a number of inspiring interactions of separate disciplines of creative work in science, philosophy and, last but not least, in art. The scope and content of these interactions have since the last third of the 20th century become so substantial that we could speak of – in agreement with the French philosophers of the late 20th century – one of the most significant turns in modern and late modern civilization. In these contexts, the limited validity becomes apparent of theoretical clusters given by the belief in the sufficiency of a causal interpretation of phenomena, of an interpretation limited by their perception and evaluation, as closed, static entities of reality. With topology, a more complex view of reality opens up as an interconnected multiplicity of qualities of things and events, perceived as multifaceted and connected action.

I. svazek uvedených studií prezentuje tradici a nové podoby snah o komplexní přístup ke skutečnosti dosahovaný v oblasti architektury. Svazek je věnován památce profesora Cambridgeské univerzity Dalibora Veselého.

II. svazek rozebírá a hodnotí některé motivy topologického myšlení uplatněného v řadě klíčových disciplín poznání, v matematice, v dějinách a teorii umění, v architektuře, neurologii, psychologii a ve filozofii samotné.

Editoři uvedených knih si na závěr úvodu dovoluují vyjádřit vděčnost a díky za mimořádnou ochotu jak českých, tak zahraničních osobností podílet se na řešení uvedených úkolů, které jsou průkopnické, a pro které se dosud hledají obecně použitelné metody a principy poznání. Dík patří samozřejmě Technologické agentuře České republiky, a administrativně manažerskému vedení Interdisciplinárního semináře topologických studií, a to především Kateřině Tandlerové z Fakulty umění a architektury Technické univerzity v Liberci a Petře Milštajnové z Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze. Zvláštní ocenění a poděkování za možnost založení a podporu působení Interdisciplinárního semináře topologických studií patří děkanům spolupracujících fakult, prof. Zdeňku Fránkovi, prof. Janu Kratochvílovi, architektu Osamu Okamurovi a docentu Mirko Rokytovi.

Barevná verze knihy je dostupná v elektronické podobě na adrese webové knihovny Technické univerzity v Liberci <https://etul.publi.cz/>

Volume I. of the mentioned studies presents the tradition and new forms of endeavours for a complex approach to reality achieved in architecture. The volume is dedicated to the memory of Dalibor Veselý, Cambridge University professor.

Volume II. discusses and evaluates some motives of topological thinking as applied in a number of key disciplines of knowledge – in mathematics, history and art theory, in architecture, neurology, psychology and in philosophy itself.

At the end of the introduction, the editors of these books would like to express their gratitude and thanks for the extraordinary willingness of both Czech and foreign personalities to participate in the solution of these tasks, which are pioneering and for which generally applicable methods and principles of knowledge are still being sought. We naturally have to thank the Technology Agency of the Czech Republic and the administrative and managerial management of the Interdisciplinary Seminar of Topological Studies, especially to Kateřina Tandlerová from the Faculty of Arts and Architecture of the Technical University of Liberec and Petra Milštajnová from the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague. Special acknowledgments and thanks for the opportunity to establish and support the Interdisciplinary Seminar of Topological Studies go to the deans of the cooperating faculties, Professor Zdeněk Fránek, Professor Jan Kratochvíl, architect Osamu Okamura and Associate Professor Mirko Rokyta.

The colour version of the book is available in electronic form in the web library of the Technical University of Liberec at <https://etul.publi.cz/>

Topologie a poetika prostoru

Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

Topology and Poetics of Space

Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

Prolegomena

Prostor k seberealizaci, daný prostor nebo prostor vytvářený, prostor přivádějící nás v úžas, prostor zakázaný, nebo prostor k dispozici potom třeba topologie bytí. Čtenář sám si zajisté vzpomene na mnoho dalších použití slova prostor a topologie. Uvedli jsme jen několik příkladů, vlastně jen několik příkladů namátkou. Úmyslně jsme však napsali „slova“ neboť jako pojem má prostor tolik významů, kolik je kontextů v kterých se pojem vyskytuje. Prostor, se často vyskytuje ve smyslu rámce nebo ve smyslu prostředí, v kterém se daná věc diskutuje. Všechno může být tak označeno jako prostor. Označujeme tak prostředí, vzdálený a ne příliš určitý kontext, který tvoří rámec nebo horizont našich úvah. A je tolik rámců, jako je druhů vyprávění.

Tento způsob použití slova prostor je snad nejběžnější a vyskytuje se velmi často v každodenní mluvě. Rámec sám, je zpravidla nspecifikovaný, nestrukturovaný. Je vnějším omezením a vymezením, které se uvádí, ale často nevysvětluje. S tímto vágním vymezením se ovšem nemůžeme spokojit a bohatý kontext pojmu prostor vyžaduje uvedení a upřesnění. Chceme tedy v první části uvést problematiku používání pojmu prostor do širšího historického a filozofického rámce předtím, než v druhé části nastíníme matematickou stránku a vývoj směřující k pojmu topologie. Řečeno stručně, rozlišujeme tři druhy použití pojmu topologie: Použití ve smyslu toposu, místopisu nebo prostoru v tradičním smyslu. Sem také náleží použití pojmu topologie v tom smyslu, že prostor, který máme na mysli je blíže neurčený nebo vágní a topologie vyjadřuje právě tento aspekt.

Použití topologického kalkulu v nějakém konkrétním rámci, čemuž je nejbližší Poincarého pojem pojem Analysis Situs. Tento aspekt může ale nemusí být více matematický. Můžeme tak například mluvit o topologických vlastnostech objektů v euklidovské rovině (například grafů nebo sítí; v dnešní době má v podstatě každá matematická disciplína topologickou variantu) a rovněž tak o topologických vlastnostech krajiny nebo architektury. Toto použití zahrnuje většinu použití v nejruznějších oblastech matematiky samotné.

A konečně použití topologie v matematickém smyslu, topologický kalkul samotný, sám o sobě. To je matematický obor zvaný obecná (nebo množinová) topologie, která vytváří vhodné prostředí jak pro většinu současné matematiky tak pro uvažování v nejrozličnějších oblastech umění, filozofie, ekonomie o přírodních vědách nemluvě. V druhé části článku toto dělení vysvětlíme podrobněji. Vývoj je samozřejmě vyznačen rozšiřující se abstrakcí a ve třetí části práce to dáváme do kontextu malířství a architektury.

Prolegomena

Space for self-realisation, given space or space created, space that makes us wonder, forbidden space or available space, then perhaps the topology of being. The reader can certainly think of many other uses of the word space and topology. We have given only a few examples, just a few examples at random actually. However, we deliberately wrote 'words' because as a concept space has as many meanings as there are contexts in which the concept occurs. Space, often occurs in the sense of a framework or in the sense of the setting in which the matter is discussed. Everything can thus be described as space. We refer to the environment, the distant and not very definite context that forms the framework or horizon of our deliberations. And there are as many frames as there are kinds of narratives.

This way of using the word space is perhaps the most common and occurs very often in everyday speech. The frame itself, as a rule, is unspecified, unstructured. It is an external limitation and definition that is stated but often not explained. However, we cannot be satisfied with this vague definition, and the rich context of the concept of space needs to be stated and clarified. Thus, we want to set the issue of the use of the concept of space in a broader historical and philosophical framework in the first part, before outlining the mathematics and development towards the concept of topology in the second part. To put it briefly, we distinguish three uses of the notion of topology: Uses in the sense of topos, locale, or space in the traditional sense. This also includes the use of the term topology in the sense that the space we have in mind is unspecified or vague, and topology expresses this aspect.

The use of the topological calculus in some specific framework, which is closest to Poincaré's notion of Analysis Situs. This aspect may or may not be more mathematical. For example, we can talk about the topological properties of objects in the Euclidean plane (for example, graphs or networks; nowadays, virtually every mathematical discipline has a topological variant), as well as the topological properties of landscapes or architecture. These uses include most applications in various areas of mathematics itself.

And finally, the use of topology in the mathematical sense, topological calculus itself... This is a mathematical field called general (or set) topology, which provides a suitable setting for much of contemporary mathematics as well as for thinking in various areas of art, philosophy, economics not to mention the natural sciences. In the second part of this article we will explain this division in more detail. The development is, of course, marked by the expansion of abstraction, and in the third part of the paper we put this in the context of painting and architecture.

Obsah

Prolegomena

A. Prostor (a topologie) v mnoha podobách

1. Určitost a přesnost
2. Rámec a model
3. Dualita v mnoha podobách
4. Nekonečno a Nic
5. Paradox

B. Topologie

1. Topologické uvažování
2. Topologické uvažování v matematice
3. Absolutní (množinová) topologie
4. Existence modelu, model bez rámce?

C. Vnitřek a vnějšek abstrakce

1. Události roku 1968 a téma-myslet jinak.
2. Zapomenutá vykročení k topologii.
3. Abstraktní kartografie land artu.
4. Topologická psychologie Kurta Lewina.
5. Mezi vnějškem a vnitřkem abstrakce.

Contents

Prolegomena

A. Space (and topology) in its many forms

1. Certainty and precision
2. Framework and model
3. Duality in many forms
4. Infinity and nothing
5. Paradox

B. Topology

1. Topological reasoning
2. Topological reasoning in mathematics
3. Absolute (set) topology
4. The existence of model, a model without a framework?

C. Inside and outside of abstraction

1. The events of 1968 and topic-thinking differently
2. Forgotten steps towards topology
3. The abstract cartography of land art
4. Kurt Lewin's topological psychology
5. Between the outside and the inside of abstraction

A. Prostor (a topologie) v mnoha podobách

Topologie a obecněji prostor jsou možná nadužívaná slova, ale co vlastně označují, co myslíme nového, když slova používáme? Na tuto otázku se pokusíme odpovědět. Náš přístup však není výčet možností ani historický přehled, na to bychom každopádně potřebovali více místa. Uvedme však dva příklady myšlenek, které snad vystihují o co se snažíme a čím hodláme usměrnit naše zkoumání.

Je nám blízký Roland Barthes a jeho kniha *Světlá komora*. Barthes stojí vlastně před podobným problémem. Chce vystihnout něco co je běžné a v jazyce nadužívané. V úvodu knihy uvádí hlavní motivaci knihy a její část je možno v našem kontextu formulovat následovně: *Náš přístup je motivován ontologickou touhou, čím je topologie „v sobě“, jaký podstatný rys ji odlišuje od ostatních prostorů.*¹ *Ano, prostor sám bez příkras, sám o sobě.*

Je nám rovněž blízký názor Huberta Damische, když v předmluvě své slavné knihy o vzniku perspektivy² píše: *„tato kniha se zrodila z nespokojenosti... jak tak myšlenkově spekulativní oblast jako perspektiva je předmětem knih, které jsou sice zevrubné, ale nezahrnují hlubší filosofické aspekty.“* Domníváme se, že nadužívané slovo prostor zasluhuje hlubší porozumění, nebo lépe řečeno zastavení se snahou o pochopení.

Pokusíme se uvést pár společných rysů pojmu prostor hlavně v oblastech souvisejících s tématem této práce. Téma prostoru z hlediska percepce a reprezentace lidského myšlení zahrnuje síť protikladných stránek lidského osvojování světa od samých počátků geneze lidstva. Geometrie se utvářela hluboko v ontogenezi lidského myšlení. Člověk v návaznosti na schopnosti uplatněné ve vývoji živočichů, schopnosti zahrnující vzory prostorové orientace a navigace jako podstatné součásti geneze myšlení je spjat s geometrií v mnoha, možná že ve všech, oblastech lidské činnosti (dva příklady za všechny: kognitivní psychologie a topologie v neurovědách). Je potom zajímavé, že topologie jako samostatná disciplína matematiky se stala předmětem vědy až v 19. a během 20. století. Jak ještě podrobněji uvedeme, bylo to hlavně (ale nikoliv výlučně) v kontextu teorie množin, ale z širšího hlediska také v době kdy protiklady lidské civilizace ve vztazích lidské inteligence a přírody dospěly do stavu těžko řešitelné separace disciplín vědeckého a humanitního poznání.

1 — Tuto větu jsme parafrázovali podle knihy R. Barthes: *Světlá komora* (překlad M. Petříček) Fra 2005, str. 12 (kdy Barthes hovoří samozřejmě o fotografiích). Toto vydání obsahuje zasvěcenou studii překladatele „Cítím tedy vidím“.

2 — Hubert Damisch: *The origins of perspective*, MIT Press 1994, xiii. Tato kniha podává tradiční problematiku perspektivy jak v kontextu historickém tak v kontextu soudobé filosofie a umění. Kniha končí analýzou Picassových variací na téma Velázquezova obrazu „Les Meninas“. Možná nejucelenější prezentace filozofického přístupu Huberta Damische k výtvarnému umění byla výstava *Moves – Playing chess and cards with the museum* (Museum Boijmans Van Beuningen Rotterdam 1997) a rovněž výstava *Traité du trait*, Louvre 1995. (Obě výstavy s dostupnými katalogy. Katalog z Louvru navíc s poděkováním Věře Linhartové.) Viz rovněž: J. Nešetřil: *Poznámky o Umění a Matematice* (o porozumění „Tahů“ Huberta Damische, v katalogu výstavy *Antropogeometrie*, Rabasova galerie, Rakovník 1998

A. Space (and Topology) in its Many Forms

Topology, and more generally space, are perhaps overused words, but what do they actually mean, what do we mean by using these words? We will try to answer this question. However, our approach is not a list of possibilities or a historical survey; we would need more space for that anyway. Let us, however, give two examples of ideas that perhaps describe what we are trying to present and how we intend to guide our research.

Roland Barthes and his book *Camera Lucida* are close to our heart. Barthes actually faces a similar problem. He wants to capture something that is common and overused in the language. In the introduction to his book, he gives the main motivation behind the book and part of it can be formulated as follows in our context: *Our approach is motivated by an ontological desire to know what topology is 'in itself', what essential feature distinguishes it from other spaces.*¹ *Yes, the space itself without embellishments, in itself.*

1 — We paraphrased this sentence from R. Barthes: *Camera Lucida* (translated by M. Peřtřiček) Fra 2005, p. 12 (Barthes is of course talking about photography). This edition contains an insightful study by the translator 'I feel therefore I see'.

We also resonate with the opinion of Hubert Damisch who in the preface of his famous book on the origin of perspective writes²: *'...this book was born out of dissatisfaction.... how such a speculative area of thought as perspective is the subject-matter of books which, though elaborate, do not include deeper philosophical aspects.'* We believe that the overused word 'space' deserves a deeper understanding, or better said, considerations attempting to understand it.

2 — Hubert Damisch: *The Origins of Perspective*, MIT Press 1994, xiii. This book presents the traditional topic of perspective in both historical and contemporary contexts of philosophy and art. The book concludes with an analysis of Picasso's variations on the theme of Velasquez's painting 'Les Meninas'. Perhaps the most comprehensive presentation of Hubert Damisch's philosophical approach to visual arts was the exhibition titled *Moves – Playing Chess and Cards* with the Museum (Museum Boijmans Van Beuningen Rotterdam 1997) and also the exhibition titled *Traité du trait*, Louvre 1995. (Both exhibitions with catalogues available. The Louvre catalogue also with acknowledgments to Věra Linhartová.) See also: J. Nešetřil: *Poznámky o umění a matematice* [Some Remarks on Art and Mathematics] (on understanding Hubert Damisch's 'Moves', in the catalogue of the exhibition titled *Antropogeometrie*, Rabas Gallery, Rakovník 1998.

We will try to list some common features of the concept of space, mainly in areas related to the topic of this paper. The theme of space in terms of perception and representation of human thought has included a network of opposing aspects of human mastery of the world since the very beginning of the genesis of mankind. Geometry was formed deep in the ontogeny of human thought. Building on the abilities applied in animal evolution, abilities involving patterns of spatial orientation and navigation as an essential part of the genesis of thought, man is linked to geometry in many, perhaps all, areas of human activity (two examples for all: cognitive psychology and topology in neurosciences). It is therefore interesting that topology as a separate mathematical discipline became an object of science as late as in the 19th and during the 20th centuries. As we will show in more detail, it was mainly (but not

Rozvedme tuto myšlenku podrobněji. Matematika se ve vývoji lidstva stala nástrojem progresivního zužitkování lidských schopností abstrahovat a kombinovat osvojené modely poznání tváří v tvář přírodě a přírodní danosti lidské existence. Matematika se stávala ve vývoji lidstva klíčovou disciplínou emancipace světa lidí z limitů daných přírodou a s emancipací cest poznání určených abstrakcí. Reflexe matematiky jako cesty k porozumění dění, či tajemství světa patří ke klíčovým tématům lidské civilizace. Byli to Pythagorejci, kteří v esenciálním rozvrhu pro následný vývoj evropské civilizace spatřovali v matematice (a geometrii zvláště) jádro veškerého lidského myšlení. Jedním z vrcholů chápání matematiky jako klíčové disciplíny poznání představila, jak známo filosofie René Descarta. Díky Descartovi si člověk mohl uvědomit sám sebe jako myslící bytost, aby na druhé straně ponechal poznání rozprostraněného světa obklopujícího člověka v rukou božích za modely měřitelnosti věcí a událostí, které podle Descarta ještě spadaly do schopností člověka. Příčiny vzniku topologie souvisí s protiklady matematiky jako klíčového paradigmatu abstrakce, jak jej příkladně definoval Descartes s tím, co toto paradigma nezahrnuje. Odkaz antiky nalézající v propojení světa abstrakce a přírodního univerza motiv a důkaz harmonie skutečnosti přestával platit tím více, čím větší nároky byly kladeny na matematiku samotnou.

Jak se přiblížit významu pojmu prostor a problému tak široce rozprostraněnému? Výčtem příkladů to samozřejmě nejde. Nejenom z důvodů mnohosti, ale také vzhledem k únavě z opakování. Volíme tedy cestu uvedení společných rysů, klíčových aspektů a myšlenkových obrátů. Tento zajisté více nepřesný a mlhavý úmysl nás ale přirozeně přivede k topologii. Úmysl může být mlhavý, ale první náš rys je přesnost.

1. Určitost a přesnost

Není to jen tak. Když označíme nějakou skutečnost jako prostor tak vyvoláme jistý dojem určitosti. Pražský prostor, individuální prostor, inspirující prostor, divadelní prostor, prostor k rozlišení, ... Jako bychom odkazovali na společnou určitou věc, nebo na společný rys. Odkud se ona určitost v tak neurčitých pojmech bere? Jak vyjádřit snovou určitost zamýšlenou nebo tušenou pomocí neurčitého pojmu prostor o topologii nemluvě? Co je zdrojem oné určitosti? Pomožme si příkladem.

V kapitole Přesnost své knihy Americké přednášky³ Italo Calvino uvádí egyptskou bohyni Maat: „*Přesnost byla pro staré Egyptany symbolizována pírkiem, které sloužilo jako závaží na misce vah pro vážení duší. Ono lehké pírko se jmenovalo Maat, bohyně vah. Hieroglyf jména Maat označoval také jednotku délky, 55 centimetrů jednotné cihly, a také základní tón flétny.*“ Poznamenejme k tomu, že „maat“ je centrální pojem egyptské kultury a je to slovo mnoha významů: řád, spravedlivá míra věcí, pravda a jiné základní významy.

3 — Italo Calvino: Americké přednášky – šest poznámek pro příští tisíciletí, (přel. M. M. Jilsky), Prostor 1999.

exclusively) in the context of set theory, but more broadly also at a time when the oppositions of human civilisation in the relations of human intelligence and nature had reached a state of difficult-to-resolve separation of the disciplines of scientific and humanistic knowledge.

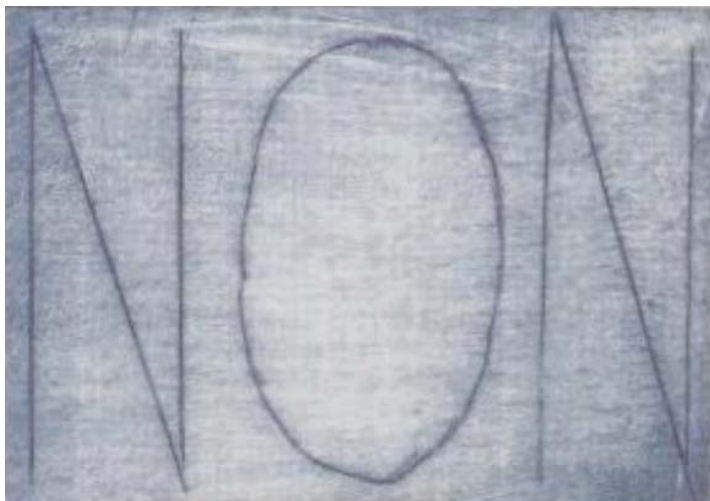
Let us elaborate on this idea. During the evolution of humanity, mathematics has become a tool for progressive capitalisation on human abilities to abstract and combine acquired models of cognition in the face of nature and the natural givens of human existence. In the development of humanity, mathematics gradually became a key discipline in the emancipation of the human world from the limits imposed by nature and with the emancipation of the paths of knowledge determined by abstraction. The reflection of mathematics as a way of understanding the events or mysteries of the world belongs to the key themes of human civilisation. It was the Pythagoreans who, in the essential framework for the subsequent development of European civilisation, saw mathematics (and geometry in particular) as the core of all human thought. One of the highlights of the understanding of mathematics as the key discipline of knowledge was, as is well known, the philosophy of René Descartes. Thanks to Descartes, man could become aware of himself as a thinking being, in order to leave, on the other hand, the knowledge of the extended world surrounding man in the hands of God for models of the measurability of things and events, which, according to Descartes, still fell within the faculties of man.

The reasons behind the emergence of topology are related to contradictions in mathematics as the key paradigm of abstraction, as exemplarily defined by Descartes, including what this paradigm does not include. The legacy of antiquity, finding in the connection between the world of abstraction and the natural universe a motive and proof of the harmony of reality, ceased to be valid the more demands were placed on mathematics itself.

How to approach the meaning of the concept of space and a problem so widely extended? By listing examples, of course, it cannot be done. Not only for reasons of numerosity, but also because of the fatigue of repetition. We have therefore decided to present common features, key aspects and turns of thought. But this admittedly more imprecise and vague intention naturally leads us to topology. The intention may be vague but our first feature is precision.

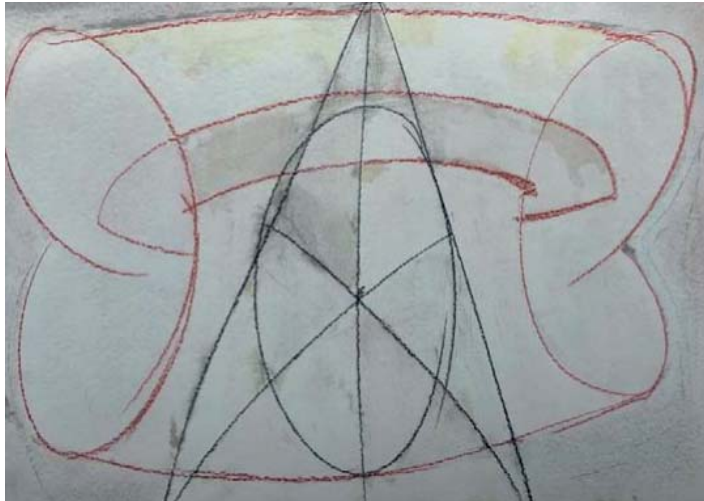
1. Specificity and Precision

It is not that easy. If we designate a certain reality as space, we give a certain impression of specificity. Prague space, individual space, inspiring space, theatrical space, space for differentiation ... As if referring to a certain common specific thing or to a common feature. Where does this specificity come from in such vague terms? How to express dreamlike specificity, intended or anticipated, using the vague concept of space, not to mention topology? What is the source of that specificity? Let us help ourselves with an example.



OBR. 1 Marcel Duchamp, ilustrace k básni Pierra Andrea „Première Lumière“, lept 1959

FIG. 1 Marcel Duchamp, Illustration of the Pierre Andre's poem 'Premiere Lumiere', etching, 1959



OBR. 2 Jiří Načeradský a Jaroslav Nešetřil, Modulor III.

(Spojité a diskrétní), 1996, akryl na papíře

FIG. 2 Jiří Načeradský and Jaroslav Nešetřil, Modulor III.

(Continuous and discrete), 1996, acrylic on paper

Co je potom oním *peříčkem*, které určuje (a symbolizuje) míru přesnosti použití slova prostor? Domníváme se, že ono peříčko představuje antický ideál geometrie, který tak úspěšně vyhovuje naší každodenní skutečnosti a je ve společnosti (a školách) zaveden. Tento ideál vydržel až do novověku (nebo do Newtonovy matematiky a fyziky). A má platnost i dnes. Jak pěkně píše fyzik Brian Greene v úvodu Einsteinovy knihy *Smysl relativity*⁴: „*Ale přestože je relativita matematicky systemizovaná, drtivá většina by stále přiznala, že jim „nepřešla do krve“. I já si uvědomuji, jak snadné je upadnout do navyklého newtonovského myšlení, v němž jsou prostor a čas nesprávně nazývány jako vzájemně oddělené, nezávislé a neměnné.*“

4 — A. Einstein: *Smysl relativity*, Vyšehrad 2016, str. 7

Pevný bod řádu, ideál krásy a neměnnosti, peříčko našeho uvažování. Mnoho pojednání se také uspokojí tím, že se problematika vnoří do prostoru (nebo módnější topologie) aniž by se onen prostor porté blíže studoval nebo i definoval. Je tak samo slovo prostor vyjádřením zamýšlené určitosti či přesnosti.

Náš další příklad je literární: Výše jsme zmínili *prostor k rozlišení*... Citovat Věru Linhartovou je v našem kontextu přirozené. Pro její přesnost a roli prostoru. Prostorový aspekt je pro její psaní typický a je také široce diskutován.⁵ Již diplomová práce V. Linhartové se týká baroka a prostoru. Je okouzlena barokními klenbami (jako předtím její učitel Václav Richter). Stejně jako později píše o klenbě kostela sv. Markéty v Břevnově⁶: „*...malované průhledy do pomyslných nebes jsou tady pouze v těch částech celé klenby, kde se promítá vzájemný průnik oválných prostorových útvarů, v nichž je seřazen prostor lodi – tedy vlastně v místech kde je hodnota hmoty záporná a neproniknutelnost těles popřena. Lze předpokládat, že by stačilo, aby boční zdi poodstoupily od sebe tak, že by se vzdálenost mezi nimi zvětšila. A proniky zmizí, průhledy nebes se uzavřou v bezvýhledně k sobě přiléhajících přímkách. – Lze to ostatně dokázat ještě jinak.*“

5 — Viz například: Veronika Košnarová: *Variace na hlásku m*, Torst 2019; Miroslav Petříček: *Vícehlasé rozptýlení*, In: *Kontext-překlad-hranice. Studie z komparabilistiky*. FF UK, Praha 1996, 7–17.

6 — V. Linhartová: *Meziprůzkum nejbliž uplynulého. Přestořech*, *Mladá fronta* 1993. (Citováno dle V. Košnarová: *Variace na hlásku m*, str. 27.).

Shrňme tuto úvahu: To vše jsou příklady, kde slovo prostor vymezuje a upřesňuje výpověď, uvádí dílčí jevy zmíněné i nezmíněné do souvislosti celku. Nemyslí se tím zřejmě pouze geometrické (nebo topografické) vymezení. Jde spíše o vymezení určitého typu otázek a výpovědí. Prostor jako určující a zpřesňující fakt. Nebo jako rámec našich úvah a rovněž uvedení do toho co bude.

Jako bychom předkládali na vědomí, že víme o prostoru vše nebo mnohé, že prostor je nám znám a nebo ještě lépe, že víme, o čem mluvíme. Prostor není místo, ale místa

In the chapter titled *Exactitude* of his book *American Lectures*,³ Italo Calvino mentions the Egyptian goddess Maat: *‘For the ancient Egyptians, exactitude was symbolised by a feather that served as a weight on scales used for the weighing of souls. This light feather was called Maat, goddess of the scales. The hieroglyph for Maat also stood for a unit of length – the 33 centimetres of the standard brick – and the fundamental note of the flute.’* Note that ‘maat’ is a central concept in Egyptian culture and a word of many meanings: order, a just measure of things, truth, and other essential meanings.

What is then the *feather* that determines (and symbolises) the degree of precision in the use of the word ‘space’? We believe that this feather represents the ancient ideal of geometry, which so successfully fits our everyday reality and is established in society (and schools). This ideal lasted until the modern era (or until Newtonian mathematics and physics). And it is relevant even today. As physicist Brian Greene writes nicely in the introduction to Einstein’s book *The Meaning of Relativity*⁴: *‘Nevertheless, even though relativity has been systemized mathematically, the vast majority of physicists would say that they still don’t “feel relativity in their bones.” I, for one, know how easy it is to slip into familiar Newtonian thinking in which space and time are incorrectly envisioned as separate, independent, and unchanging.’*

A fixed point in the order, the ideal of beauty and immutability, a feather of our thinking. Many treatises are just fine with immersing the topic in space (or in a more fashionable topology) without further studying or even defining such space. The very word ‘space’ expresses the intended specificity or precision.

Our next example is a literary one: above we mentioned *space for differentiation*... To quote Věra Linhartová is natural in our context. For her precision and the role of space. The spatial aspect is typical of her writing and is also widely discussed.⁵ Already V. Linhartová’s diploma thesis deals with baroque and space. She is enchanted by baroque vaults (just like her teacher Václav Richter was before). She writes about the vault of St. Margaret’s Church in Břevnov⁶: *‘... painted vistas into the imaginary heavens are here only in those parts of the entire vault where the intersection of oval spatial formations is reflected, in which*

3 — Italo Calvino: *Americké přednášky – šest poznámek pro příští tisíciletí* [*American Lectures – Six Memos for the Next Millennium*], (translated by M. M. Jilský), Prostor 1999.

4 — A. Einstein: *Smysl relativity* [*The Meaning of Relativity*], Vyšehrad 2016, p. 7.

5 — See for example: Veronika Košnarová: *Variace na hlásku m* [*Variations on the Phone m*], Torst 2019. Miroslav Petříček: *Vícehlasé rozptýlení* [*Dispersion Polyphonique*], In: *Kontext-překlad-hranice. Studie z komparabilistiky*. FF UK, Praha 1996, pp. 7–17.

6 — V. Linhartová: *Meziprůzkum nejbliž uplynulého* [*Intersurvey of the Nearest Past*], Přestořeč, Mladá fronta 1993. (Quoted according to V. Košnarová: *Variace na hlásku m* [*Variations on the Phone m*], p. 27).

vytvářejí prostor, prostor však není jen souhrn míst. Lze však také říci, že prostor je pojmenování společného rysu míst, abstrakce jednotlivostí. Místo i prostor nás může utvářet a my spolu vytváříme prostor, svojí přítomností, svým jednáním. Ale použitím slova vyvoláváme a odkazujeme na rámec, který naše úvahy vymezuje, ale také určuje a zasazuje do systémů jiných úvah, možností míst a jiných prostorů.

2. Rámec a Model

To není variace na *malíř a model*. Máme na mysli spíše situaci, která tvoří rámec našich úvah. Nemůžeme-li postihnout skutečnost v úplné celistvosti, vytváříme jistý model jako rámec našeho uvažování. Nemusíme vlastně model mnohdy vytvářet, model a rámec jsou nám prostě dány situací ve které se nacházíme. Model také souvisí s prostorem pro nějž je rámcem. Model umožňuje prostor a pomáhá mu tím, že vyjadřuje jeho konzistenci. Prostor se zdá být prvotní a neodvoditelný. Prostor nemusí mít určitý model a model také nemusí být jediný. Ale zpravidla při použití slova prostor máme na mysli nějaký základní model. Základní model ve smyslu rámce a jistoty. Model zpravidla nevytváříme, je nám dán naší zkušeností nebo rámcem našeho uvažování.

Slovo model zde používáme v intuitivním smyslu jako místo a východisko našich úvah, místo které předpokládáme a které je naší jistotou. Po dlouhá staletí od antiky byl prostor jediný a ontologický, měl jediný Euklidovský model. Navíc dokonala skladba Eukleidových základů, přesněji jejich podoba vytvořená historií, se stala předobrazem a vzorem celé matematiky a vědy vůbec. Nebylo o čem pochybovat. Vlastně bylo, ale to přišlo až mnohem později na konci 18tého století Euklidův pátý postulát začal být zkoumán podrobněji, neboť svojí „složitostí“ se odlišoval od ostatních a tak vznikla otázka zda (v oné krásné antické stavbě) je vůbec potřeba, zda ho vlastně není možno odvodit jako důsledek ostatních axiomů. Tato čistě teoretická otázka měla závažné důsledky a nabourala jednoznačnost a jedinečnost Eukleidovské geometrie, která měla až posvátný charakter. Bolyai, Lobačevsky, Gauss našli nové modely geometrických situací. Tyto modely splňovaly všechny Eukleidovy axiomy kromě pátého, který zde ale neplatil. Byly tak vytvořeny nové prostory – nové modely prostorů. Toto znejistění mělo za důsledek snahu vyjádřit a definovat prostor sám. Bernhard Riemann ve své inaugurační přednášce předdeslal snahu o obecnou definici prostoru. Tato snaha se ukázala jako obtížný oříšek. Proč? Právě proto, že prostor uvažujeme intuitivně vždy s nějakým modelem, který má mnoho dalších vlastností, a, řečeno s Poincarém, je plný „bohatě barevně zářících povrchů“. Tato snaha a naplnění hledání univerzální modelu musela ještě počkat a v článku se k tomu ještě vrátíme. To je ta pravá chvíle obecné topologie.

S prostorem mimo matematiku je to však ještě jinak. Příběh vyprávění a síla narace vlastně prostor vytváří a vymezuje a jaksi určuje v míře nezbytné pro příběh, jako v dobrém románu. Prostor je tak mnohdy definován zevnitř, dílčími projevy. Jako něco co vyhovuje našim rozlišením, jako vhodný rámec našeho dění. Prostor se tak

the space of the nave is arranged – in fact, in places where the value of mass is negative and the impenetrability of bodies is denied. It may be assumed that it would be enough for the side walls to move apart so that the distance between them would increase. And the penetrations will disappear, the vistas of the heavens will close in sightlessly contiguous straight lines. – After all, there is another way to prove this.’

Let us summarise this reflection: These are all examples where the word ‘space’ defines a statement and makes it more specific, bringing the partial phenomena both mentioned and not mentioned into the context of the whole. Apparently, this does not mean only geometrical (or topographical) definition. It is more about defining a certain type of questions and statements. Space as a determining and specifying fact. Or as a framework for our considerations and also an introduction to what will happen.

It is as if we were making it known that we know everything or a lot about space, that space is known to us, or even better, that we know what we are talking about. Space is not a place, but places create space – but space is not just a collection of places. However, it can also be said that space means naming the common feature of places, an abstraction of particularities. Place and space can shape us, and we co-create space, by our presence and our actions. But by using the word we evoke and refer to a framework that defines our considerations, but also determines and embeds them in the systems of other considerations, possibilities of places and other spaces.

2. Framework and Model

This is not a variation on the *painter and model*. Rather, we have in mind a situation that forms the framework of our considerations. If we cannot grasp reality in its entirety, we create a certain model as a framework for our thinking. We do not actually have to create a model very often; a model and a framework are simply given to us by the situation in which we find ourselves. A model is also related to the space for which it serves as a framework. A model makes a space possible and helps it by expressing its consistency. Space appears to be primal and not inferable. Space does not have to have a particular model, and a model does not have to be the only one either. But usually, when we use the word space, we mean some basic model. A basic model in terms of a framework and certainty. As a rule, we do not create a model, it is given to us by our experience or by the framework of our thinking.

We use the word ‘model’ here in an intuitive sense as a place and the starting point of our considerations, a place we assume and which is our certainty. For many centuries since antiquity, space was the only one and ontological, had one Euclidean model. Moreover, the perfect composition of Euclidean foundations, or more precisely, their form created by history, has become a prototype and model for entire mathematics and science in general. There was nothing to doubt. Actually, it was, but that did not come until much later in the late 18th century. Euclid’s fifth postulate began to be examined in more detail, as its ‘complexity’ made it different from



OBR. 3 Marcel Duchamp, Umělec s kolejnicovým kluzákem, 1913–1915, publikováno v La Boite verte 1934 (foto Man Ray)

FIG. 3 Marcel Duchamp, Artist with a track glider, 1913–1915, published in La Boîte verte, 1934 (photo Man Ray)



OBR. 4 Jiří Načeradský a Jaroslav Nešetřil, Modul X,
1993, tuš a xerox na papíře

FIG. 4 Jiří Načeradský and Jaroslav Nešetřil, Modul X,
1993, Indian ink and xerox on paper

vyvíjí, odvíjí v čase s příběhem samotným. Básnický prostor se vytváří a zpětně určuje příběh sám, čtenář je vtahován do magického prostoru autora.

Mistrovsky to samozřejmě dokázal Franz Kafka například následující ukázkou ze Zámku (str. 259, vydání z roku 1964): „...kde je tedy ona zmíněná, vzácná, téměř nikdy se nenaskytající možnost? Tajemství vězí v předpisech o příslušnosti. Věc není totiž taková, a ve veliké živoucí organizaci ani být nemůže, že by pro každou záležitost byl příslušný jen jeden určitý tajemník. Je to pouze tak, že jeden má hlavní příslušnost, avšak řada dalších má též jistou, i když menší příslušnost. Kdo-pak by dokázal, i kdyby pracoval sebevíc, sám udržet na svém psacím stole veškeré souvztažnosti i toho nejmenšího případů? Už to, co jsem řekl o hlavní příslušnosti, je přehnané. Což není už v té nejmenší příslušnosti obsažena veškerá příslušnost? Což tu nerozobduje vášnivost, s níž se kdo věci chopí? A není zde ta vášnivost vždy a v plné síle? Ve všem se mohou mezi sebou tajemníci lišit, a rozdílů je nespočet, ve vášnivosti však ne; žádný z nich nedá najevo zdrženlivost, vznese-li se na něho požadavek, aby se zabýval případem, pro nějž je sebestěně příslušný. Navenek je ovšem třeba nějak uspořádat jednací možnosti, a tak pro strany stojí v popředí vždycky určitý tajemník, jehož se mají v úředních věcech držet. Avšak nemusí to být vůbec tajemník, který má pro ten případ hlavní příslušnost, to záleží na organizaci a na jejích zvláštních okamžitých potřebách. Tak věci vypadají. A teď uvažte, pane zeměměřiči, možnost, že nějaká strana díky některým okolnostem přes všechny již popsané, celkem úplně dostačující překážky přece je překvapí uprostřed noci některého tajemníka, který má pro dotyčný případ jistou příslušnost. Na takovou možnost jste asi ještě nepomyslel? To vám rád věřím. Také na ni není třeba myslet, protože skoro nikdy nenastane.“

Klap, klap, klap, nekonečná byrokracie tekuté modernity vytvářející náš svět. Divák, každý z nás, si vytváří z působivých náznaků autora, Franze Kafky nebo Stanislava Kolíbalu, svůj svět. Svoji interpretaci prostoru.

Tento rozvíjející přístup se však zdá být v přímém rozporu s obvyklým chápáním prostoru v přírodovědě a hlavně v matematice. Zde je prostor definován, určen z vnějšku. Je popsán alespoň zdánlivě vyčerpávajícím způsobem přesně a většinou i elegantně a stručně. Prostor jako pozadí našich úvah musí být přece popsán srozumitelně, aby mohl posloužit jako východisko abstraktních úvah. Příklady tohoto postupu zná každý ze školy. Euklidovská geometrie svým přesným a jasným výkladem a samotnou výstavbou se stala vzorem pro vědecké uvažování a metodu od antiky do dneška. Ale antický prostor se vyvíjel, prohluboval a rozvíjel.⁷

7 — Krásně o této historii přístupnou formou píše Petr Vopěnka ve svém opus magnum Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, Práh 2011. Vopěnka se bohužel nevěnuje topologii. Jeho pozdní práce: P. Vopěnka, M. Vétrovcová: Uvedení do obecné topologie a jejích dějin do roku 1960, (Pavel Mervart 2015) je zaměřena jinak.

Ale zdání klame. Věda prostor také stále hledá, hledá vhodný rámec pro své úvahy. V mnoha oblastech se hledá prostor, který bude vyhovovat, ale také spoluvytvářet.

the others, and so the question arose whether (in that beautiful ancient construction) it was needed at all, whether it could not in fact be inferred as a consequence of the other axioms. This purely theoretical question had serious implications and undermined the clarity and uniqueness of Euclidean geometry, which had an almost sacred character. Bolyai, Lobachevsky and Gauss found new models of geometric situations. These models complied with all Euclid's axioms except the fifth one, which, however, did not apply here. Thus, new spaces were created – new models of spaces. This uncertainty resulted in an attempt to express and define space as such. In his inaugural address, Bernhard Riemann mentioned an attempt to find a general definition of space. This endeavour proved to be a difficult task. Why? Precisely because we always think of space intuitively with a model that has many other properties and, in Poincaré's words, is full of 'richly coloured shiny surfaces.' This effort to find a universal model had yet to wait and we will return to it later in this article. This is the true moment of general topology.

However, space outside mathematics is yet another thing. The story of telling and the power of narration actually creates and defines a space and somehow determines it to the extent necessary for the story, like in a good novel. Space is thus often defined from within, by partial expressions. As something that suits our differentiation, as a suitable framework for our action. Space thus evolves, unfolds in time with the story itself. The poetic space is being created, retroactively determining the story itself; the reader is drawn into the magical space of the author.

Of course, Franz Kafka did this masterfully, for example in the following excerpt from *The Castle* (Zámek, p. 259, 1964 edition): *'... where now is that previously mentioned, rare possibility that never occurs? The secret lies in the regulations regarding competence. The fact is things are not so constituted, and so such a large living organization cannot be so constituted, that there is only one definite secretary competent to deal with each case. It is rather that one is competent above all others, but partly others are in certain respects, even though to a smaller degree – also competent. Who, even if he were the hardest of workers, could keep together on his desk, single-handed, all the aspects of even the most minor incident? Even what I have been saying about the competence above all others is saying too much. For is not the whole competence contained even in the smallest? Is not what is decisive here the passion with which the case is tackled? And is this not always the same, always present in full intensity? In all things there may be distinctions among the secretaries, and there are countless such distinctions, but not in the passion. None of them will be able to restrain himself if it is demanded of him that he shall concern himself with a case in regard to which he is competent if only in the smallest degree. Outwardly, indeed, an orderly mode of negotiation must be established, and so it comes about that a particular secretary comes into the foreground for each applicant, one they have, officially, to keep to. This, however, does not even need to be the one who is in the highest degree competent in regard to the case, what is decisive here is the organization and its particular needs of the moment. That is the general situation. And now, Land Surveyor, consider the possibility that through some circumstances or other, in*



OBR. 5 Stanislav Kolíbal, Geometrické cvičení, dřevo, štuk, olej, kresba, 1998, soukromá sbírka

FIG. 5 Stanislav Kolíbal, Geometrical exercises, wood, stucco, oil, drawing, 1998, private collection



OBR. 6 Stanislav Kolíbal, Průnik dvojího pohledu, 1988, lanovka, štuk, železo, Galerie hlavního města Prahy, z katalogu Aktuální nekonečno, GHMP s. 64

FIG. 6 Stanislav Kolíbal, Penetration of two kinds of view, 1988, scoreboard, stucco, iron, City Gallery Prague, published from the catalogue Actual infinity, GHMP p. 64

spite of the obstacles already described to you, which are in general quite sufficient, an applicant does nevertheless, in the middle of the night, surprise a secretary who has a certain degree of competence with regard to the given case. I dare say you have never thought of such a possibility? I am quite prepared to believe it. Nor is it at all necessary to think of that for it does, after all, practically never occur.'

Clack, clack, clack, the endless bureaucracy of liquid modernity creating our world. The viewer, each of us, creates their own world out of the impressive hints of the author – Franz Kafka or Stanislav Kolíbal. Their own interpretation of space.

This developing approach, however, seems to be in direct contradiction with the usual understanding of space in natural science and especially in mathematics. Here space is defined, determined from the outside. It is described, at least in a seemingly exhaustive way, precisely and usually elegantly and concisely. After all, space as a background of our considerations must be described in a comprehensible manner in order to serve as a starting point for abstract reasoning. Everyone knows examples of this procedure from school. Euclidean geometry, with its precise and clear interpretation and its very construction, has become a model for scientific reasoning and method from antiquity to the present day. But ancient space has evolved, deepened and developed.⁷

7 — Petr Vopěnka writes beautifully, and in an easy-to-understand manner, about this history in his opus magnum *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*, [The Cornerstone of European Learning and Power] Práh 2011. Unfortunately, Vopěnka does not engage in topology. His later works: P. Vopěnka, M. Větrovcová: *Uvedení do obecné topologie a jejich dějin do roku 1960* [Introduction to General Topology and its History to 1960] (Pavel Mervart 2015) has a different focus.

But appearances are deceiving. The science is also still searching for space, looking for a suitable framework for its reasoning. A space that will be suitable as well as co-creating, is being sought in many fields. The question of finding a suitable space and how to comprehensibly describe it has been essential. In today's terminology, we are looking for a suitable model. A model that is usually given by experience and our history or a model that we draw on.

Let us recall again that the model is understood here not only in a mathematical sense, but more broadly as a set of experiences and properties that are the basis of our reasoning. A mathematician can explore very abstract notions related to natural numbers, but in doing so s/he (also) has in mind the initial underlying model. As a certainty for his exploration. One would like to say as a natural and existential certainty, as the basis and certainty of actions (in an abstract jungle of complex concepts). But the basic model is not enough. It is often essential to ask a question of how to comprehensively describe the space or, in today's terminology, to create an adequate model. If we are lucky and our model is indeed adequate, then we can

Podstatná byla a je otázka nalezení vhodného prostoru a jak prostor uceleně popsat. V dnešní terminologii hledáme vhodný model. Model, který je zpravidla dán ze zkušenosti a naší historie nebo model z kterého vycházíme.

Připomeňme opět, že zde chápeme model nejenom v matematickém smyslu, ale šířeji jako souhrn zkušeností a vlastností, které jsou východiskem našich úvah. Matematik může zkoumat velice abstraktní pojmy týkající se přirozených čísel, ale má přitom na mysli (rovněž) výchozí základní model. Jako jistotu svého zkoumání. Chtělo by se říci jako přírodní a existenciální jistotu, jako základ a jistotu počínání (v abstraktní džungli složitých pojmů). Ale základní model nestačí. Podstatná je často otázka jak prostor uceleně popsat nebo, v dnešní terminologii, vytvořit adekvátní model. Máme-li štěstí a náš model je vskutku adekvátní, potom můžeme prostor a model ztotožnit (tak jak tomu bylo u geometrie po dlouhou dobu). Jak dnes víme, tím se vzdáváme volby na obou stranách. Jako celek je to otázka stále aktuální: máme co činit s prostorem, kterému v úplnosti nerozumíme a chtěli bychom se v něm naučit pohybovat a „počítat“. Hledáme způsob jak si ho vhodně představit. Je to otázka, kterou se zaobírají jak teoretičtí fyzikové (a kosmologové), tak neurologové (např. v případě modelů mozku) a informatikové (např. v případě teorie sítí). Ve všech těchto případech hledáme model, který vede k lepšímu porozumění prostoru, jehož jen některé vlastnosti známe, prostoru který je všude a vlastně nikde. Prostoru, kterého se někdy obáváme stejně jako kdysi byl „horror vacui“ a dnes máme strach z nedozírných implikací informačních sítí.

A potom, v nějaké šťastné chvíli jako v renesanci, přijde R. Descartes a řekne (ve volné poetické parafrázi): „Děti, nebojte se, vždyť prostor to jsou jenom trojice.“ A ukáže, jak model funguje, jak se s ním zachází a jak pěkně se v něm počítá.

Tak to je sen, sen o úspěšném modelu, který vytváří nová paradigma. Je to ale sen, který se nepřihodí příliš často. Podobná situace zatím ještě nenastala např. pro informatické sítě a ani v neurologii, kde stále hledáme.

3. Dualita v mnoha podobách

Slovo dualita je velmi oblíbené v různých teoretických disciplínách, nejen v matematice a fyzice. V matematice má často formu zahrnující extrémny min a max a v důsledku toho se takové věty někdy označují jako minimaxové věty (podobnost se stejnojmenným hasicím přístrojem je čistě náhodná). Dva póly jedné věci, které jsou součástí běžné řeči: bílý a černý, krátký a dlouhý. A v dualitě jde o více. Obě strany jsou tak říkajíc myšlenkově propojeny a extrémny mohou přecházet na sebe. Příмка po vhodné (projektivní) transformaci může přejít na bod (a vice versa), při intenzivním prohlížení bílé může dojít k temnotě, dlouhý a krátký jsou samy o sobě relativní pojmy. Ale vztah blízkého a vzdáleného vykazuje mnohé duální rysy. Rovněž tak uvažování globální (nebo celostní) a zkoumání vlastností lokálních tvoří dvojici, která se rovněž označuje jako dualita. Poslední příklad nás bude zajímat podrobněji, protože se vztahuje k jednomu pojmu, který zde uvažujeme: *práce v rámci*.

identify the space with the model (as was the case with geometry for a long time). As we know today, this gives up choices on both sides.

As a whole, this question is still relevant: we are dealing with a space that we do not fully understand and would like to learn how to move in it and ‘count.’ We are looking for ways to imagine it properly. It is a question addressed by both theoretical physicists (and cosmologists), neuroscientists (e.g., brain models) and computer scientists (e.g., network theory). In all these cases, we look for a model that leads to a better understanding of a space of which we know only some properties, a space that is everywhere and, in fact, nowhere. A space that we sometimes fear, just we once feared ‘horror vacui’, and today we fear the immeasurable implications of information networks.

And then, in some happy moment like the Renaissance, R. Descartes comes along and says (loosely poetically paraphrased), ‘Children, don’t be afraid, for space is only triads.’ And he shows how the model works, how to use it, and how good it is for counting.

So, this is a dream, a dream of a successful model that creates new paradigms. But it is a dream that does not happen very often. A similar situation has not yet occurred, for example, in IT networks or in neuroscience, where we are still in the process of searching.

3. Duality in Many Forms

The word ‘duality’ is very popular in various theoretical disciplines, not only in mathematics and physics. In mathematics it often takes the form involving the extremes min and max, and as a result such theorems are sometimes referred to as min-max theorems (the resemblance to the eponymous fire extinguisher is purely coincidental). Two poles of the same thing that are part of common speech: white and black, short and long. And there is more to duality. The two sides are, so to speak, mentally related, and the extremes can overlap. A straight line after an appropriate (projective) transformation can turn into a point (and vice versa); intensely looking at white may lead to darkness; long and short are themselves relative terms. But the relationship of near and far shows many dual features. Likewise, global (or holistic) thinking and examining local properties form a pair that is also referred to as duality. The latter example will be covered in more detail as it relates to one concept that is considered here: *working in a framework*. Let us therefore take the general position that space is a framework for our thinking. What does it mean? A space that we use as a framework and that has ‘got into our blood’ in the way that we use its properties to our advantage all the time. Working in a framework is therefore freedom within limitations and is often given to us without our knowing it.



OBR. 7 Jiří Načeradský, Akty, (1970–1975), kombinovaná technika na kartonu, Katalog aukční síně Národní

FIG. 7 Jiří Načeradský, Nudes, (1970–1975), mixed technique on cardboard, Catalogue of the Auction House Národní



OBR. 4 Aleš Veselý, Zakřivený vůz, 1987, železo, z areálu studia umělce ve Středoklukách, fotografie Tomáš Vlček, reprodukováno v katalogu Aktuální nekonečno, GHMP, 2000

FIG. 4 Aleš Veselý, Distorted Vehicle, 1987 iron, from the studio areal of the artist, photo Tomáš Vlček, published in the catalogue, Actual infinity, City Gallery Prague, 2000

Přijměme tedy obecné stanovisko, že prostor je nám rámcem pro naše uvažování. Co to znamená? Prostor, který je nám rámcem, který máme a „přešel nám do krve“ jak, že používáme s výhodou neustále jeho vlastnosti. Práce v rámci je tedy svoboda v omezení a je nám mnohdy dána aniž bychom o ní věděli.

Práci v rámci označuje Thomas Kuhn jako *normální věda*⁸. Revoluční obrat vyžaduje změnu rámce, změnu paradigmatu. Pro tuto změnu však věda vytváří podmínky rozvojem poznatků práce v rámci, rozvinutím kalkulu existujících prostorů, které se dotýkají a testují jejich hranice.

8 — Thomas Samuel Kuhn: *Struktura vědeckých revolucí*, Oikoymenh 2022.

Emancipace matematiky se od počátků dějin novověku stala jednou z příčin dramatického vyhrocování napětí mezi vědou a vírou, mezi vědou a disciplínami humanitní vzdělanosti a potažmo celé novověké kultury. Jedním z klíčových vyústění těchto napětí lze nalézt v projevech kultury doby manýrismu a baroka. Uveďme podrobněji tento příklad. Jak máme chápat rozeklaný fronton jako symbolický motiv po-renesanční architektury? Kdy prostřednictvím masového uplatnění tohoto architektonického prvku zejména v architektuře baroka, se dostaly do roviny názornosti podstatné motivy vědeckého a humanitního poznání. Jako zobrazení protikladů a poukázání na východisko z uzavřeného konceptu skutečnosti, kdy novověká kultura objevovala témata plurality a singularity, variability, okamžiku a věčnosti. Pod těmito motivy se odehrávala kritika Descarta v takových modelech, jaké představují La Scienza Nuova Giambattisty Vica a k ta pokusům zahrnout rozmanitost přírody a poznání skutečnosti patřily snahy Athanasia Kirchera demonstrovat na základech vědy a zejména lingvistiky, fyziky a matematiky nové paradigma poznání integrujícího odlišného jeho disciplíny.

Na Kirchera navazovala celá řada snah otevřít nové možnosti porozumění protikladům člověka a světa za pomoci matematických postupů. Takovým pokusem bylo také založení Muzea matematiky pražskými jezuiti v klášteře Klementina, které ve svém chápání aktuálního nekonečna hledalo možnosti spojení vědy a víry, matematiky a umění. Barokní kultura v celé řadě svých projevů dokončovala snahy o spojení smyslovosti, emocí a abstrakce, když zužitkovávala vzory a prvky pocházející z odkazu celého vývoje evropské kultury a navazovala kontakty s mimoevropskými kulturami. Podstatné se stalo uplatnění těchto vzorů a motivů pro proměnu směřující od stabilních, racionálníou ovládnutých způsobů kulturní reprezentace k dynamickým formám využívajícím racionality, včetně, nebo hlavně matematicky rozvinutého poznání pro imaginativní diskurz. Takové využití a přetváření tvarosloví architektury a s ní spojených modelů geometrie a matematiky představuje dílo českého architekta italského původu, Santiniho Aichela z let 1700–1723. Dnes jej vidíme jako inspirativní paralelu snah zahrnout do diskurzu založeném na matematické otázky přesahující funkce omezené algoritmy uzavřených modelů, tvůrčí úsilí otevřené porozumění struktury poznání sahajícího od vědy k umění.

Thomas Kuhn refers to work in a framework as *normal science*.⁸ A revolutionary turn requires a change of framework, a shift of paradigm. However, science creates conditions for this change by developing the knowledge of work in a framework, by developing the calculus of existing spaces that touch each other and test their boundaries.

8 — Thomas Samuel Kuhn: The Structure of Scientific Revolutions, Oikoymenh 2022.

The emancipation of mathematics has been one of the causes of the dramatic escalation of tensions between science and faith, between science and the disciplines of humanistic education and thus the entire modern culture since the beginning of modern history. One of the key outcomes of these tensions can be found in the cultural manifestations of Mannerism and Baroque. Let us examine this example in more detail. How should we understand a broken pediment as a symbolic motif of post-Renaissance architecture? The massive use of this architectural element, especially in Baroque architecture, made the essential motifs of scientific and humanistic knowledge illustrative. As a depiction of oppositions and as a way out of the closed concept of reality, where modern culture discovered the themes of plurality and singularity, variability, a moment and eternity. The criticism of Descartes took place under these motives, in such models as represented by *La Scienza Nuova* by Giambattista Vico; and the attempts to include the diversity of nature and knowledge of reality included the attempts of Athanasius Kircher to demonstrate, on the basis of science and especially linguistics, physics and mathematics, a new paradigm of knowledge integrating the distinctness of his discipline.

Kircher was followed by a number of efforts to open up new possibilities of understanding the oppositions between man and the world with the help of mathematical procedures. One such attempt was the founding of the Museum of Mathematics by the Prague Jesuits in the Klementinum Monastery, which in its understanding of the then infinity sought to combine science and faith, mathematics and art. Baroque culture, in its many manifestations, completed attempts to combine sensuality, emotions and abstraction by making use of patterns and elements originating from the legacy of the entire development of European culture and by establishing contacts with non-European cultures. The application of these patterns and motifs became essential to the transformation moving from stable, rationality-dominated modes of cultural representation to dynamic forms using rationality, including (or mainly) mathematically developed knowledge for imaginative discourse. Such use and reshaping of the morphology of architecture and associated models of geometry and mathematics is represented by the work of the Czech architect of Italian origin, Santini Aichel from the years 1700–1723. Today we see him as an inspiring parallel to attempts to incorporate matters into mathematics-based discourse that go beyond the functions limited by algorithms of closed models, a creative endeavour open to understanding the structure of knowledge extending from science to art.

Openness, plurality, variability, aspects of Baroque culture became attractive by maintaining relations of the knowable, paradigmatic with the unknown, and

Otevřenost, pluralita, variabilita, aspekty barokní kultury se staly přitažlivé tím, že udržovaly vztahy poznatelného, paradigmatického s nepoznaným, a nepoznatelným. Takový střet zkušenosti a kreativní představivosti definoval heroický Leonhard Euler ovlivňující vývoj matematiky jako celku. Nejen zakládá teorii grafů, ale i kalkulus iracionálního čísla, teorie derivací, nekonečných řad a integrálů. To vše jsou jen příklady na cestě, jím založených matematických témat, které kromě dalšího anticipovaly topologii. Euler uvedl do prostředí rozvinutého poznání baroka motivy nových možností a dimenzí racionality. To, co se jevílo jako přirozeně začlenitelné do filosofické interpretace skutečnosti v přístupech klasiků novověku jakými byli Descartes, Spinoza, Leibnitz, bylo Eulerovými a dalšími objevy nové matematiky narušováno a dynamizováno. Protiklad vědy a víry, který byl základem metafyziky před-moderních přístupů se stal součástí reflexe života, reflexe založené především na vědě jako hlavní disciplíně poznání a kulturní reprezentace. Nepoznatelnost, iracionalita jako atributy duchovního přesahu v projevech dříve spojujících kulturu a víru se staly součástí témat protikladů a vztahů především vědeckého diskurzu moderní doby. Absolutno, nekonečno přestalo být referencí víry a stalo se referencí intelektu, experimentu a abstrakce. To, co dříve bylo v poznání ponecháno v rukou božích, se prioritně stalo tématem vědeckého poznání včetně pocitů, prožitků, představ jedince i davu.

Je jenom přirozené, že teorie záhybu jako matematicky definované formy, kterou nalézáme v díle Leibnitzově našla své uplatnění a definitivní popis v rámci topologie a posléze teorii katastrof (viz. René Thom opírající se o katalog záhybů, který vytvořil Hassler Whitney).⁹

9 — Teorie katastrof, která vznikla v 60tých letech byla jednou z motivací Miroslava Katětova pro založení semináře Matematických metod v psychologii. Tento seminář se zapsal do Pražského života nejen matematického ale obecně intelektuálního a kulturního. O záhybu pojednává podrobně Miroslav Petříček: *Myšlení obrazem*, Hermann a synové 2009.

4. Nekonečno a Nic

Extrémy jako „nekonečno“ nebo „nic“ se často vysvětlují v souvislosti s vnuknutím, se silou okamžiku, která přemůže a vymkne člověka z běžných starostí a zvyklostí. Ať chceme nebo ne, jsou to kategorie výjimečné vyjadřující jedinečné okamžiky. Tak jako známý Petrarkův zážitek na hoře Ventoux u Avignonu, kdy byl přemožen dojmem nedozírné krajiny, kterou viděl svrchu a ve které náhle pocítil svoji roli. Tak jako Giacomo Leopardi ve své básni *L'infinito* popisuje horu Tabor nad domovským městem Recanati.¹⁰

10 — Přeložil Kamil Bednář. Citováno dle Anna Hrdličková: *Giacomo Leopardi, básník Romantismu?*, Diplomová práce FFUK, Praha 2008.

Báseň je plná duálních pojmů a přirovnání, která tvoří pestrou paletu lesklých povrchů a doplňkových barev.

the unknowable. Such a clash of experience and creative imagination was defined by the heroic Leonhard Euler, influencing the development of mathematics as a whole. He not only came up with graph theory, but also the calculus of irrational numbers, the theory of derivatives, infinite series and integrals. All these are just examples along the way of mathematical topics developed by him, which anticipated topology, among others. Euler introduced motives of new possibilities and dimensions of rationality into the milieu of the developed knowledge of the Baroque. What appeared to be naturally incorporated into the philosophical interpretation of reality in the approaches of the classical authors of modern age such as Descartes, Spinoza, and Leibnitz, was disrupted and dynamised by Eulerian and other discoveries of new mathematics. The antithesis of science and faith, which was the basis of the metaphysics of pre-modern approaches, became part of the reflections on life, reflections based primarily on science as the main discipline of knowledge and cultural representation. The unknowable, irrationality as attributes of spiritual overlap in the manifestations formerly linking culture and faith, became part of the themes of oppositions and relations especially in the scientific discourse of modern times. The absolute, the infinite, ceased to be a reference to faith and became a reference to intellect, experiment and abstraction. What was previously left in the hands of God in terms of knowledge became a priority topic of scientific knowledge, including feelings, experiences, ideas of both an individual and the crowd.

It is only natural that the theory of the fold as a mathematically defined form, which we find in the work of Leibnitz, found its use and definitive description in the framework of topology and later in the theory of catastrophes (see René Thom relying on Hassler Whitney's catalogue of folds).⁹

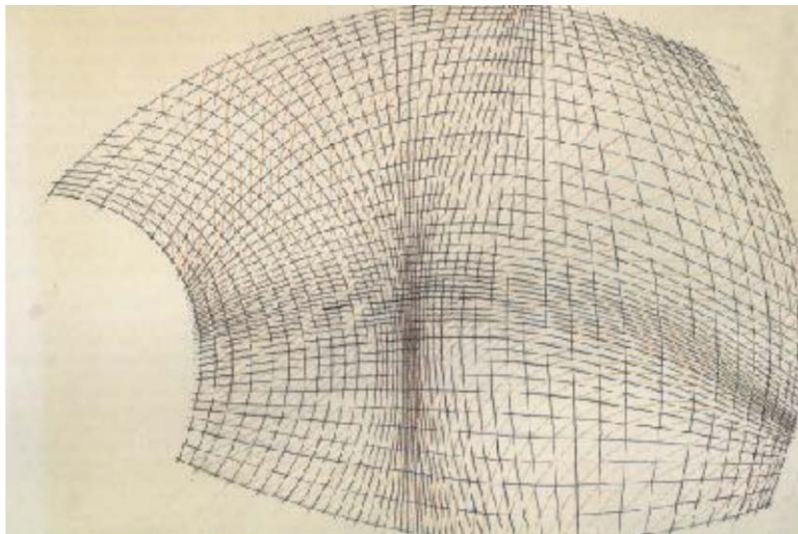
9 — The theory of catastrophes, which originated in the 1960s, was one of Miroslav Katětov's motivations for founding the Seminar of Mathematical Methods in Psychology. This seminar made its mark on Prague's mathematical, intellectual and cultural life in general. Miroslav Petříček discusses the fold in detail: Miroslav Petříček: *Myšlení obrazem* [Thinking through Image], Hermann a synové 2009).

4. The Infinite and Nothing

Extremes such as 'infinity' or 'nothing' are often explained in connection with inspiration, with the power of a moment that overwhelms us and breaks us out of ordinary worries and habits. Whether we like it or not, these are exceptional categories expressing unique moments. Like Petrarch's well-known experience on Mount Ventoux near Avignon, where he was overwhelmed by the impression of an unfathomable landscape that he saw from above and in which he suddenly understood what his role was. Like Giacomo Leopardi in his poem *L'infinito* describes Mount Tabor above his home town of Recanati.¹⁰

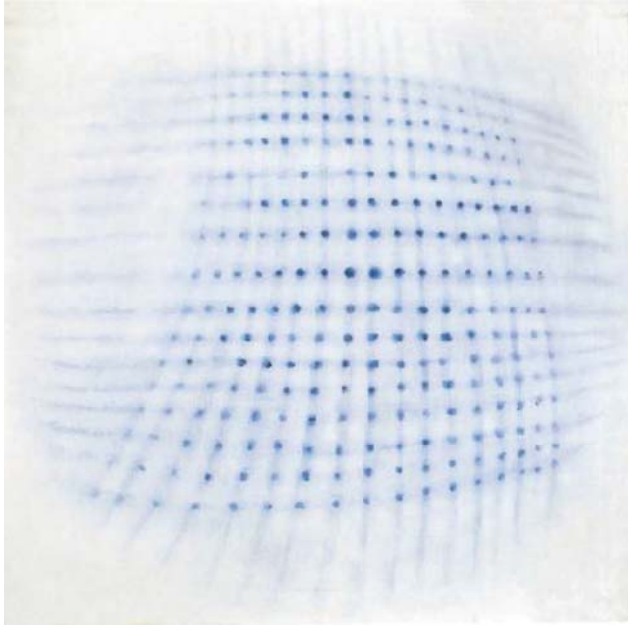
10 — Translated into Czech by Kamil Bednář. Quoted from Anna Hrdličková: *Giacomo Leopardi, básník Romantismu?* [Giacomo Leopardi, Poet of Romanticism?], *Diplomová práce* [Diploma thesis] FFUK, Praha 2008.

The poem is full of dual concepts and similes that create a colourful palette of shiny surfaces and complementary colours.



OBR. 9 Vojtěch Preissig, Zakřivená plošná struktura v prostoru, (1932–1934), kresba černou a červenou tuší na papíře, Památník národního písemnictví Praha, z katalogu výstavy Aktuální nekonečno, GHMP 2000

FIG. 9 Vojtěch Preissig, Distorted flat structure in space, (1932–1934), drawing, black and red Indian ink on paper, National museum of Literature, Prague, from the Actual Infinity catalogue, City Gallery, Prague, 2000



OBR. 10 Václav Boštík, Zakřivený prostor, 1970, olej na plátně,
Galerie moderního umění v Roudnici nad Labem, z katalogu
Aktuální nekonečno, GHMP 2000, s. 67

FIG. 10 Václav Boštík, Distorted space, 1970, oil on canvas
Gallery of modern art, Roudnice nad Labem, From the Actual Infinity
catalogue, City Gallery Prague, 2000, p. 67

Nekonečno

*Vždy rád jsem měl vrch tento opuštěný
I tento živý plot, jenž z valné části
Výhledu na vzdálený obzor brání.
Však usednuv zde, prostor nekonečný
Tam za plotem i nadpozemské ticho
A přehluboký mír si představuji
Až bezmála se tlukoucí mé srdce
Tím poleká. A když pak slyším vítr,
Jak v těchto keřích šelestí, tu ono
Nezměrné ticho s tímto šelestěním
Srovnávám, na věčnost vzpomínaje,
Na zašlá údobí i na současnost
živoucích časů se vším jejich hlukem,
V té nesmírnosti myšlenka má tone
A v tomto moři ztroskotat je sladké.*

Pro jiný působivý příklad nemusíme chodit daleko ani v čase ani v místě. Ve svém krátkém a neobyčejně krásném eseji *O šestiúhelné sněhové vločce – poutavé čtení o „ničem“*¹¹ řeší Johannes Kepler otázku o čem psát, aby to bylo o ničem. Kepler v knize filosofuje velmi rozmařile (jak se asi na podobnou příležitost sluší) a svoji volbu psaní o ničem zdůvodňuje takto: „*Velmi dobře vím, jak nesmírně miluješ nic – nikoliv pro jeho zanedbatelnou cenu, ale pro půvabnou lehkost a veselou bravost, jež toto slovo nabízí. Soudím proto, že dar Ti bude tím milejší, čím bližší bude ničemu.*“ A Kepler poté probírá neméně než 9 možností o čem psát, když zabrán do myšlenek a rozhněván sám na sebe, že mu to nejde...přešel (zřejmě Karlův) most a několik nicotných sněhových vloček mu přistálo na kabát. Tím našel Kepler téma a krystalografie svoji první učebnici! Nicota, nic jako kontrast nekonečné bohatosti světa a uvažování v Keplerově strhujícím literárním podání.

11 — Johannes Kepler: O šestiúhelné sněhové vločce – poutavé povídání o ničem, MatfyzPress, 2017. Tato kniha se sestává ze 34 stran formátu A6 (!) a jedná se vlastně o novoročenku (pravděpodobně roku 1611) pro Keplerova přítele a blahodárce Jana M. Wackera z Wackenfelsu. Přes tento příležitostný charakter se jedná o vědecky důležitou práci. Kniha se považuje za pionýrskou práci v oblasti krystalografie a rovněž obsahuje formulaci problému optimálního pakování koulí v prostoru. Tento problém, známý jako Keplerův problém, byl vyřešen v úplnosti zcela nedávno (Thomas Hales, 1998–2006). Přitom se jednalo o problém známý, ke kterému podstatně přispěl již K. F. Gauss.

Podobně postupuje Paul Klee ve svém známém obraze *Rovno nekonečnu (Equal infinity)* z roku 1932 dnes v MOMA v New Yorku. Tento zdánlivě monotónní obraz, malován ve žlutých a okrových odstínech je ve skutečnosti složitou směsicí různých odstíněných teček. Je to v podstatě abstraktní pointilistický obraz, kde symbol nekonečna (lemniskáta) je znázorněn jako otvor v houslích. Jsou možné mnohé výklady: naznačené spojení matematiky umění a hudby, nebo prostě vizuální forma přemíry teček a odstínů naznačující nekonečnou, stále vzrůstající mnohost. Hudba však byla Kleeovi velmi blízká. Nejen, že pocházel z hudební rodiny, ale sám byl vynikajícím

The Infinite

*This lonely hill to me was ever dear,
This hedge, which shuts from view so large a part
Of the remote horizon. As I sit
And gaze, absorbed, I in my thought conceive
The boundless spaces that beyond it range,
The silence supernatural, and rest
Profound; and for a moment I am calm.
And as I listen to the wind, that through
These trees is murmuring, its plaintive voice
I with that infinite compare;
And things eternal I recall, and all
The seasons dead, and this, that round me lives,
And utters its complaint. Thus wandering
My thought in this immensity is drowned;
And sweet to me is shipwreck on this sea.*

We do not have to go far in time or place for another impressive example. In his short and extraordinarily beautiful treatise *O šestiúhelné sněhové vločce – poutavé povídání o ničem* [*The Six-Cornered Snowflake*]¹¹, Johannes Kepler addresses the question of what to write about in order to write about nothing. In the book, Kepler philosophises very whimsically (as is perhaps fitting for such occasion) and justifies his choice to write about nothing as follows: *'I am well aware how fond you are of Nothing, not so much for low price as for the sport, as delightful as it is witty, that it affords your pert sparrow; and so I can really guess that the closer a gift comes to Nothing the more welcome and acceptable it will be to you.'* And Kepler then discusses no less than nine possibilities of what to write about, when lost in thought and angry with himself for not being able to do it...he crossed the (presumably Charles) bridge and a few insignificant snowflakes landed on his coat. With that, Kepler found the subject and crystallography its first textbook! Nothingness, the nothing as a contrast to the infinite richness of the world and reasoning in Kepler's captivating literary rendering.

Paul Klee follows a similar approach in his famous painting *Equals Infinity* from 1932, today at MOMA in New York. This seemingly monotonous picture, painted in shades of yellow and ochre, is actually a complex mixture of differently shaded dots. It is essentially an abstract pointillist painting where the symbol of infinity (the lemniscate) is represented as a hole in the violin. Many interpretations are possible: the implied combination of mathematics, art and music, or simply a visual

11 — Johannes Kepler: *O šestiúhelné sněhové vločce – poutavé povídání o ničem* [The Six-Cornered Snowflake], MatfyzPress, 2017. This book consists of 34 pages of A6 format (!) and is actually a New Year's card (probably from 1611) for Kepler's friend and benefactor Jan M. Wacker von Wackenfels. Despite this occasional character, it is a scientifically important work. The book is considered a pioneering work in the field of crystallography and also contains a formulation of the problem of optimal packing of spheres in space. This problem, known as Kepler's problem, has only recently been solved in its entirety (Thomas Hales, 1998–2006). Yet it was a well-known problem to which K. F. Gauss had already made a substantial contribution.

houslistou a uvažoval o kariéře hudebníka. O jeho herních kvalitách hovoří za všechny komentáře fakt, že ve svých denících uvádí, že hrál s Českým kvartetem a že to bylo dobré. Vlastně o tom, že bude malířem, se rozhodl až při slavné Tuniské cestě v roce 1912.¹² Tak možná je tento obrázek jako oxymoron.

12 — P. Klee: Tagesbücher 1898 – 1918, DuMont Verlag 1957. Až v dubnu v roce 1914 (deníkový záznam 926 o) přemožen barvami a svojí tvorbou Klee píše „Ich bin Maler“. Objevnu výstavou byla Tunisreise (Katalog výstavy Münster 1986).

Výzvy, které přinášely postupné kroky rozvoje civilizace byly plné jak zužitkování poznatků matematiky a geometrie z klasického odkazu, tak i otázek, které předznamenávaly vznik a uplatnění nových směrů včetně topologie v moderní době. Jeden z nejradikálnějších kroků vedoucích od starších vrstev abstrakce k novým dynamickým formám tvůrčího myšlení představuje vývoj kultury od renesance k baroku, který můžeme charakterizovat posuny poznání od Descarta k Eulerovi, Leibnitzovi a Newtonovi od Platonsko-Aristotelské tradice k Nové vědě Giambattisty Vica. Mezi formami zahrnujícími radikální posun od komplexně vyvážených modelů rozumu a smyslů uplatněných v klasické evropské civilizaci se v rétorice umění daleko radikálněji začaly prosazovat symbolické formy reprezentace těžící z nově aktualizovaných vztahů emocí a dramaticky se rozvíjející abstrakce. Názornost získávala od doby konce renesance nové významy v souvislostech prožitků a představ spirituality a abstrakce, v souvislostech emancipace subjektu a jeho představivosti. V masové komunikaci to dokládá vznik a rozmach emblematicky nově spojující názornost s hromadnými sociálními funkcemi, s vírou, morálkou, ideologií, politikou. Ve snahách o nové využití vědeckého poznání pro otázky významu sociálních funkcí, především víry se prosadily koncepce nově vzniklého řádu jezuitů s takovými projekty jaké představovalo založení římského muzea Athanasia Kirchera, nebo Muzea matematiky v pražském Klementinu. Ilustrativním příkladem uplatnění rétoriky, která směřovala od reprezentace duchovních hodnot v architektuře renesance k hodnotám imaginace v rétorice baroka, představuje uplatnění a rozšíření motivu rozeklaného kladí, které nahradilo pevné formy klasické tradice, zde tektonicky jasný architráv, a na něj navazující tympanon, případně oblouk, nebo jeho segment. Oltář římského kostela Sant' Andrea al Quirinale navrženého Gianem Lorenzem Berninim je součástí dramatického scény, v níž se zjevuje Svatý Ondřej v okamžiku přechodu od pozemského utrpení k věčné spáse na nebesích. Svatý Mikuláš na Malé Straně nezaostává v ničem pozadu!

Rozeklané kladí architektonického řešení oltáře kostela sv. Ondřeje, jednoho z prvních třech jezuitských kostelů v Římě se stalo prvkem rétoriky baroka spojené s významy průlomu směřujícího z roviny zjevné přehlednosti a jistoty do roviny nové naděje a nových možností v pohledu člověka na svět, v jeho nových vědeckých zájmech a tvůrčích představách a prožitcích. Průlom do ještě jiného přístupu ke světu než byly jistoty harmonické uspořádanosti zjevného se stal tématem novověkého poznání. Zjevné, racionálně limitované se stalo součástí imaginace pronikající do nových rovin vytvořených abstrakcí. Poznání doby baroka, ve vědě, v umění a v architektuře uplatnilo své nové možnosti začleněním nových dimenzí diskurzu spojujícího konečnost dostupné skutečnosti s nekonečností božské inteligence. Aktuální

form of an excessive number of dots and shades suggesting an infinite, ever-increasing multiplicity. Music, however, was very close to Klee's heart. Not only did he come from a musical family, but he himself was an excellent violinist and considered a career of a musician. It speaks volumes for his playing qualities that he is quoted in his diaries as saying that he played with the Czech Quartet and that it was good. In fact, he did not decide to be a painter until his legendary journey to Tunisia in 1912.¹² So perhaps this picture is an oxymoron.

12 — P. Klee:
Tagesbücher 1898–1918,
DuMont Verlag 1957.
Only in April 1914
(diary entry 926 o),
overwhelmed by colours
and his work, Klee
writes 'Ich bin Maler.'
The revelatory exhibition
was Tunisreise
(Exhibition Catalogue
Münster 1986).

The challenges posed by the successive steps in the development of civilisation were fraught with both the utilisation of the knowledge of mathematics and geometry from the classical legacy and the questions that foreshadowed the emergence and application of new directions, including topology, in modern times. One of the most radical steps leading from older layers of abstraction to new dynamic forms of creative thought is the development of culture from the Renaissance to the Baroque, which can be characterised by shifts in knowledge from Descartes to Euler, Leibnitz and Newton from the Platonic-Aristotelian tradition to Giambattista Vico's New Science. Among the forms involving a radical shift away from the complexly balanced models of reason and senses employed in classical European civilisation, symbolic forms of representation, benefiting from newly updated relations of emotions and dramatically developing abstraction, began to gain ground far more radically in the rhetoric of art. From the end of the Renaissance onwards, graphicalness acquired new meanings in the context of experiences and ideas of spirituality and abstraction, in the context of the emancipation of the subject and its imagination. In mass communication, this is evidenced by the emergence and growth of emblematics, newly linking graphicalness with mass social functions, with faith, morality, ideology, politics. In the efforts to make new use of scientific knowledge for questions of the meaning of social functions, especially faith, the concepts of the newly established Jesuit order gained ground with such projects as the founding of the Roman Museum of Athanasius Kircher or the Museum of Mathematics in Prague's Klementinum. An illustrative example of the application of rhetoric, which shifted from the representation of spiritual values in the architecture of the Renaissance to the values of imagination in the rhetoric of the Baroque, is the use and expansion of the motif of split architrave, which replaced the established forms of the classical tradition, specifically the tectonically clear architrave, and the related tympanum, and/or an arch, or its segment. The altarpiece of the Roman church of Sant' Andrea al Quirinale, designed by Gian Lorenzo Bernini, is part of a dramatic scene in which Saint Andrew appears at the moment of deliverance from earthly suffering to eternal salvation in heaven. Saint Nicholas in the Lesser Town does not leg behind in any respects!

The split architrave of the architectural design of the altar of St. Andrew's Church, one of the first three Jesuit churches in Rome, became an element of the Baroque rhetoric associated with the meanings of a breakthrough shifting from the plane of apparent clarity and certainty to the plane of new hope and new possibilities in

nekonečno začalo být aktuální téma. Zajímavý detail je, že zpočátku (vlastně až do 19. století) více zajímalo scholastiky a filozofy. Matematici (až do Bolzana) se zatím spokojili s kalkulem potenciálního nekonečna.

5. Paradox

Katalyzátorem témat změn poznání, změn odehrávajících se na vzestupu zájmu o jinde nedostatečně reflektované protiklady se stala filozofie Friedricha Nietzsche. Nietzsche objevil a uplatnil *paradox* jako klíčový motiv identifikující stav a povahu myšlení moderní doby. V pojmu paradox Nietzsche aktualizoval více než strop suggestivního způsobu svého psaní, paradoxem aktivoval roli hlubokých protikladů v myšlení moderní doby a posunul je jako klíčové v souvislostech složité sociální reality. Po Nietzschech přestalo být možné spoléhat na holistické modely myšlení, kategorie pravda a omyl, dobro a zlo, potřebovaly být uchopeny jako polarity téhož, jako hodnoty přesahující filosoficky osvojené a odlišené kategorie, jako téma interakcí – funkcí mezi protiklady, (protiklady nicoty a naděje, chaosu a vzdoru subjektu odkázaného na vůli k moci). Paradox se v Nietzscheho myšlení uplatnil jako nástroj destrukce iluzivních jistot, jako prostředek nového dialogu filosofie a vědy, racionality s jejími limity jak to uplatnil v dílech posledního období své tvorby, příkladně ve *Veselé vědě*. Nietzsche ve svém díle uchopil příznačné motivy proměny myšlení moderní doby: stupňující se roli abstrakce současně s měnícími se funkcemi reference poznání ve vědě spolu s měnícím se pojmem subjektu.

Nietzscheho nové zahrnutí subjektu a jeho vztahu k chaosu do tématu racionality, jako jeden z nejzřetelnějších obrátů moderního myšlení, se stalo inspirací celé kultury moderní doby. Inspirací nejenom literatury, moderní hudby a modernímu výtvarnému umění, ale také vědě a nově se rozvíjejícím disciplínám poznání odehrávajícího se v prostoru interakcí čistě vědeckých disciplín s disciplínami humanitního poznání, jaké představují fyziologie, neurologie, psychiatrie, psychiatrie, či filozofie nově zahrnující do středu svých priorit dění mezi subjektem a skutečností osvojovanou vědou. Do kontextu středoevropského tvůrčího myšlení včetně uvedených oborů výrazně zasáhl matematik, fyzik a fyziolog Ernst Mach. V Machově vědeckém díle se aktualizovaly jak nároky na vědu, tak i potřeby revize stavu vymezeného Newtonovými kategoriemi času a prostoru, jako absolutních hodnot směřem k dynamickému pojetí fyziky jako teorie funkcí. Mach přispěl k radikální proměně fyziky, jeho objevy ocenil přede všemi autor teorie relativity Albert Einstein, Machovo úsilí o uchopení funkční závislosti lidského myšlení na počítčích se stalo velkou inspirací poznání v oblasti humanitních disciplín, zejména fyziologie smyslového vnímání, ale také v teoriích a kritice umění samotného, a to zejména v malířství a literatuře doby kolem roku 1900. Význam Machova empiriokriticizmu byl hlubší než byl módní obdiv, který vyvolal v českém, ale zejména ve vídeňském prostředí. Úsilí o spojení separovaných přístupů ve vědě a v umění oslovilo revoluční myšlenky v názorech na kulturu, ke kterým směřovala věda i umění v Evropě, ale také v předrevolučním Rusku. Rezonance Machova empiriokriticizmu, který považovali ruští intelektuálové za teorii překračující limity historicko-dialektického

man's view of the world, in its new scientific interests and creative ideas and experiences. The breakthrough to an even different approach to the world than the certainties of the harmonious orderliness of the apparent became the theme of modern knowledge. The obvious, rationally limited, became part of the imagination penetrating into new planes created by abstraction. The knowledge of the Baroque period, in science, in art and in architecture, exercised its new possibilities by incorporating new dimensions of the discourse connecting the finitude of available reality with the infinity of divine intelligence. Actual infinity began to be a topical issue. It is interesting to note that initially (actually, until the 19th century) it was more of interest to scholastics and philosophers. Mathematicians (until Bolzano) were happy with the calculus of potential infinity.

5. Paradox

The philosophy of Friedrich Nietzsche became a catalyst of the themes of changes in knowledge, with changes taking place on the rise of interest in otherwise under-reflected oppositions. Nietzsche discovered and applied *paradox* as a key motif identifying the state and nature of modern thought. In the notion of paradox, Nietzsche brought to update more than the threshold of suggestive way of his writing; with paradox he activated the role of deep oppositions in modern thought and advanced them as crucial in the context of a complex social reality. After Nietzsche, it was no longer possible to rely on holistic models of thought; the categories of truth and error, good and evil, needed to be grasped as polarities of the same, as values transcending philosophically acquired and differentiated categories, as a theme of interactions – functions between oppositions (the oppositions of nothingness and hope, of chaos and defiance of an object dependent on the will to power). The paradox was used in Nietzsche's thinking as a tool for destroying illusory certainties, as a means of a new dialogue between philosophy and science, rationality with its limits, as applied in the works of the last period of his work, for example in the *Merry Science*. In his work, Nietzsche grasped the characteristic motives of the transformation of modern thought: the increasing role of abstraction along with the changing functions of the reference of knowledge in science, as well as the changing concept of the object.

Nietzsche's new incorporation of the object and its relation to chaos into the theme of rationality, as one of the most obvious turns in modern thought, became an inspiration for the entire culture of the modern era. An inspiration not only to literature, modern music, and modern visual arts, but also to science and the newly developing disciplines of knowledge taking place in the space of interaction between purely scientific disciplines and the disciplines of humanistic knowledge, such as physiology, neurology, psychiatry, and philosophy, newly incorporating at the centre of their priorities the interactions between the object and the reality embraced by science. The context of Central European creative thinking, including the above-mentioned fields, was significantly influenced by the mathematician, physicist and physiologist Ernst Mach. Mach's scientific work brought to the fore the demands for science and the need to revise the status defined by Newton's categories of time and space



OBR. 11 Kilián Ignác Dienzenhofer, Portál kostela Neposkvrněného početí P. Marie a sv. Ignáce v Klatovech, kolem 1720, uvedeno v knize Jaromíra Neumanna, Český barok, Praha 1969, s. 111, obr. 96

FIG. 11 Kilián Ignác Dienzenhofer, Portal of the Church of the Immaculate Mother and St. Ignatius in Klatovy, about 1720, from the book by Jaromír Neumann, Český barok, Prague 1969, p. 111, ill. 96



OBR. 12 Lucio Fontana, demonstrace tématu otevření plošného a konečného prostoru z cyklu děl “Concetti Spaziale” z let 1947–1967 vzniklých v návaznosti na program Manifesto spaziale, Milano 1947

FIG. 12 Lucio Fontana, demonstration Opening flat and finite space. From “Concetti Spaziale”, 1947–1967, program Manifesto spaziale, Milano, 1947



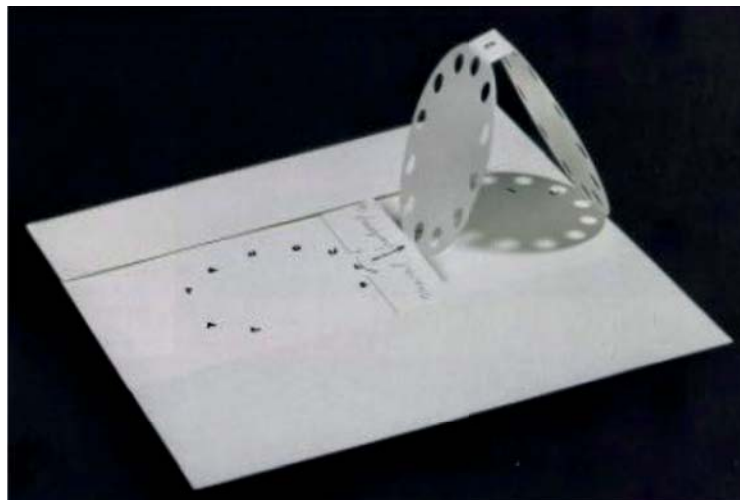
OBR. 13 Lorenzo Bernini, Kostel Svatého Ondřeje v Krivinálu, Řím, 1657–1678
FIG. 13 Lorenzo Bernini, Chiesa San Andrea al Quirinale, Rome, 1657–1678

materialismu, vyprovokovala V. I. Lenina k pokusu o kritiku Macha, „machismu“ a řady poloh tvůrčího myšlení sahajícího od Kanta až k Machovi a Avenariovi jako k projevům označeným za projevy idealismu a antagonismu. Leninova polemika s machismem, kterou Lenin začal psát již po roce 1908, předznamenala protiklad boje o politickou moc s protikladně založenými motivy tvůrčí revoluce v ruské literatuře a umění, a bezděčně poukázala na význam transcendence uprostřed protikladů poznání. Jakkoliv byly Machovy teorie neo-positivistické a anti-metafyzické, pro jejich otevřenost, jejich spojení se zájmy směřujícími od události-objektu k funkci, otevíraly prostor tvůrčích snů a vizí. Vizí a paradigmat ve kterých ke slovu přicházely znaky, zviditelňující procesy představivosti a abstrakce, percepce a imaginace, rozumu a tvůrčího vzrušení (z oblasti „zaumnosti“, tedy za modely osvojenými konvenčními způsoby racionálního poznání). Mezi nimi lze sledovat fascinující projevy prostřednictvím využití písmen-znaků a vědou inspirovaných metafor v poezii Velemira Chlebnikova, nebo prostřednictvím geometrických obrazců zaumné inteligence v díle Kazimira Maleviče.

Na rozdíl od prvků a přesahů čisté racionality, v avantgardě evropského východu často ztotožňující vědu a kreativitu, přesahů z vědy do oblastí imaginace, specifických pro ruské a sovětské avantgardní umění a literaturu, inspirace vědou v umění západní a střední Evropy se odehrávaly s většími nároky na spojení s tradičními motivy komplexnosti a zprostředkovanosti poznání. I zde se propracované cesty dotýkaly v překvapivých setkáních motivů a objevů pocházejících jak z oblasti vědy, tak z oblasti filosofie a dalších disciplín humanitního poznání, nebo z oblasti umění. Reflexe protikladů se (zjevně od obratu představovaného dílem Friedricha Nietzsche) stávala součástí diferenciací a interakcí odlišných disciplín poznání a jedním z cílů kultury spojeného s hledáním nového, dostatečně otevřeného paradigmatu. Hledání takového modelu nových možností tvůrčí představivosti ve vědě, konkrétně v matematice představuje kromě jiného důležitý impuls pro rozvoj a uplatnění topologie.

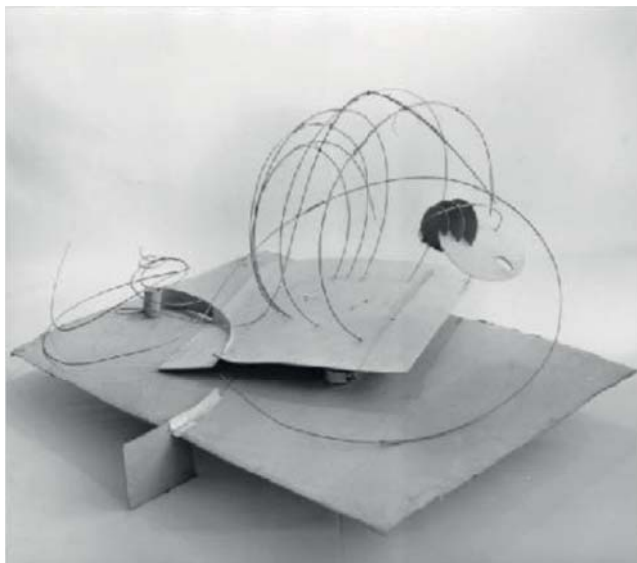
as absolute values towards a dynamic conception of physics as the theory of functions. Mach contributed to the radical transformation of physics, his discoveries were appreciated above all by the author of the theory of relativity Albert Einstein. Mach's endeavour to grasp the functional dependence of human thought on senses became a great inspiration for knowledge in the field of humanities, especially in the physiology of sensory perception, but also in the theories and criticism of art itself, especially in painting and literature of the period around 1900. The importance of Mach's empiriocriticism went further than a fashionable admiration it aroused in the Czech, but especially in the Viennese milieu. The effort to unite separate approaches in science and art appealed to revolutionary ideas in the views of culture towards which science and art were shifting in Europe, but also in pre-revolutionary Russia. The resonance of Mach's empiriocriticism, which was considered by Russian intellectuals a theory that transcended the limits of historical-dialectical materialism, provoked V. I. Lenin to attempt to write a critique of Mach, 'Machism,' and a number of creative thought positions ranging from Kant to Mach and Avenarius as manifestations of what he identified as idealism and antagonism. Lenin's polemic with Machism, which he began to write already after 1908, foreshadowed the contrast of the struggle for political power with the antithetical motives of the creative revolution in Russian literature and art, and inadvertently pointed to the importance of transcendence amidst the oppositions of knowledge. As neo-positivist and anti-metaphysical as Mach's theories were, because of their openness, their connection with interests directed from event-object to function, they opened up a space for creative dreams and visions. Visions and paradigms in which signs came to the fore, making visible the processes of imagination and abstraction, perception and imagination, reason and creative excitement (from the area of 'Zaum', i.e., beyond the models adopted by conventional modes of rational knowledge). Among them, one can observe fascinating manifestations through the use of letter-signs and science-inspired metaphors in the poetry of Velemir Khlebnikov, or through the geometric patterns of 'zaumnaya' intelligence in the work of Kazimir Malevich.

In contrast to the elements and overlaps of pure rationality, which often identified science with creativity in the avant-garde of the European East, the overlaps from science into the realms of imagination specific to Russian and Soviet avant-garde art and literature, the inspirations by science in the art of Western and Central Europe took place with greater demands on connections with traditional motifs of complexity and mediated knowledge. Here, too, elaborate paths touched in surprising encounters upon motifs and discoveries coming from the realm of science, philosophy and other disciplines of humanistic knowledge, or from the arts. The reflection of oppositions (apparently from the turn represented by the work of Friedrich Nietzsche) became part of differentiations and interactions of different disciplines of knowledge and one of the goals of the culture associated with the search for a new, sufficiently open paradigm. The search for such a model of new possibilities of creative imagination in science, namely in mathematics, represents, among other things, an important impetus for the development and application of topology.



OBR. 14 Marcel Duchamp, Hodinový číselník z profilu a kontrolor prostoru, z knihy *La Boite verte*, 1934

FIG. 14 Marcel Duchamp, *La Pendule de profil et l'inspecteur d'espace*, from the book *La Boite verte*, 1934



OBR. 15 Karel Malich, Model mraku, 1971, drát, lepenka, fotografie Tomáše Vlčka z roku 1971

FIG. 15 Karel Malich, Model of a Cloud, 1971, wire, cardboard, photo by Tomáš Vlček 1971

B. Topologie

Jak popsat jev, který v úplnosti vlastně popsat nelze. Shluky mraků, víření tekutiny, turbulence vzduchu za rychle jedoucím autem nebo letadlem. Z matematického (a fyzikálního) hlediska se jedná o obtížné a mnohdy dosud neřešené problémy. Dotýkáme se v podobných případech samotné podstaty bytí, chaosu a vlastní nedostatečnosti. To je také role náhody v umění. O tom jsme pojednali s Michelem Mendés Francem v kontextu fraktálů, mnohosti Umberta Eca a náhody v díle Francise Bacona i entropie.¹³

Topologie, topi, topos – návodná slova používána od nepaměti. V kontextu matematiky a ve významu blízkém dnešnímu užití se však slovo vyskytuje relativně nedávno (v matematice poprvé v práci Johanna Benedicta Listinga: *Vorstudien zur Topologie*, Göttingen 1848, která se týká například Möbiovy pásky a jejích zobecnění). V plné síle je pak termín používán až ve 20tém století a to jak v matematice (o čemž pojednáme níže), tak v rozličných souvislostech ve filosofii, fyzice, sociologii, uměnovědě, architektuře. Co je společným rysem těchto souvislostí? Je to možno vyjádřit snad takto: Jestliže hovoříme o umístění (bez toho, že bychom zadali přesnou polohu, souřadnice, či jinak popsali co máme konkrétního na mysli), jestliže hovoříme o souvislosti dvou věcí, které můžeme považovat za stejné po provedení jednoduchých úprav a nebo, ještě obecněji, jestliže chceme vyjádřit myšlenkovou podobnost (která se samozřejmě v detailech liší), tak v takových případech topologie je vhodný rámec našich úvah. Z nematematického hlediska je topologie axiomatizovaná, nebo dokonce jen pojmenovaná, podobnost. Je to věda o shlucích nikoliv o vzdálenosti nebo o kreslení. Krásně o shlucích a mracích filozoficky pojednává Hubert Damisch.¹⁴

Tato mlhavost a rovněž flexibilita přispívá k úspěšnosti a popularitě pojmu. Samozřejmě kromě silného matematického zázemí o kterém pojednáme v následujících oddílech. Začneme však ne nutně matematickým přístupem. Topologické uvažování je totiž vlastní současnému člověku.

13 — M. Mendés France a J. Nešetřil: *Fragment of a dialogue KAM Series MFF UK 95–308*, český překlad. Atelier 1997.

14 — H. Damisch: *Theory of clouds*, MIT 2005 (předmluva Anthony Vidler). V čase „cloudů“ (termínu započatém Googlem) je to asi nejpoužtější Damischova kniha.

B. Topology

How to describe a phenomenon that cannot actually be described in its entirety. Cloud clusters, swirling liquid, air turbulence behind a fast-moving car or plane. From a mathematical (and physical) point of view, these are difficult and often unsolved problems. In such cases, we touch on the very nature of being, chaos and our own inadequacy. This is also the role of chance in art. We have discussed this with Michel Mendés France in the context of fractals, the multiplicity of Umberto Eco and chance in the work of Francis Bacon and entropy.¹³

13 — M. Mendés France and J. Nešetřil: *Fragment of a Dialogue* KAM Series MFF UK 95–308, Czech translation. Atelier 1997.

Topology, *topi*, *topos* – instructional words used since time immemorial. However, in the context of mathematics and within the meaning close to its present usage, the word has appeared relatively recently (in mathematics, for the first time in the work of Johann Benedict Listing: *Vorstudien zur Topologie*, Göttingen 1848, which refers, for example, to the Möbius strip and its generalisations). It is only in the 20th century that the term was used in full force, both in mathematics (which will be discussed below) and in various contexts in philosophy, physics, sociology, art history, and architecture. What is the common feature of these contexts? It can perhaps be expressed as follows: When we talk about location (without specifying the exact position, coordinates, or otherwise describing what we specifically mean), when we talk about the connection between two things, which can be considered to be the same after simple adjustments or, even more generally, when we want to express a similarity of thought (which of course differs in detail), then in such cases topology is an appropriate framework for our considerations. In non-mathematical terms, topology is axiomatised, or even just named, similarity. It is a science of clusters not of distance or drawing. Hubert Damisch has a beautiful philosophical discussion of clusters and clouds.¹⁴

14 — H. Damisch: *Theory of Clouds*, MIT 2005 (Foreword by Anthony Vidler). In the age of 'clouds' (a term coined by Google); this is probably Damisch's most popular book.

This vagueness as well as flexibility contributes to the success and popularity of the concept. Of course, in addition to the strong mathematical background, which will be discussed in the following sections. However, let us start with a not necessarily mathematical approach. Indeed, topological thinking is characteristic of contemporary man.

1. Topologické uvažování

Jak k tomuto obratu došlo? Postupným vývojem během dlouhé doby. Jak je v matematice vždy obvyklé, topologické uvažování se vyvinulo při studiu konkrétních modelů a problémů vznikajících v jejich kontextu. Téměř vždy se v této souvislosti uvádí dvě práce R. Eulera. Jednu zmíníme na tomto místě a týká se vlastně hříčky *o sedmi mostech města Královce*, Euler zde zdánlivě obtížně řešitelnou otázku o procházkách ve spleti uliček a mostů v tomto nepřehledném městě, zredukoval na problém schématu – v současné terminologii grafu – o 4 vrcholech a 7 hranách! Jen si to představte: chcete projít všechny mosty ve starobylém městě Královci a nechcete po žádném mostě projít dvakrát. Toto je často používaný obrázek dobové rytiny města. Na následujícím obrázku je schematický (a veselejší) obrázek, který jsme převzali z první autorovy knihy. ¹⁵

15 — J. Nešetřil: Teorie grafů, SNTL Praha 1979, str. 17

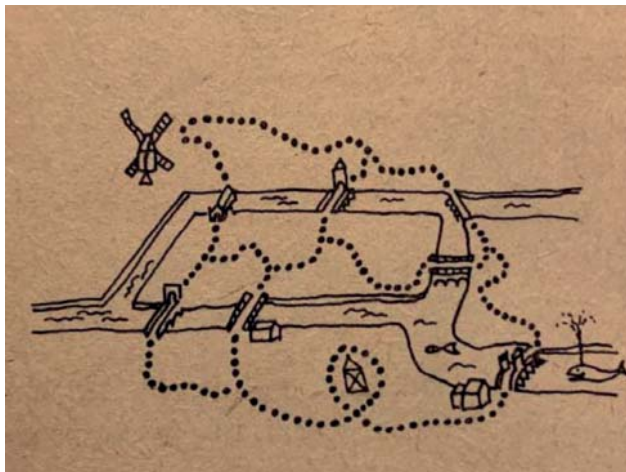
Úloha o 7 mostech je velmi názorná. Můžete ji začít řešit sami například tak, že začnete bloumat a bloudit po starém městě a jeho uličkách. Cest je však velmi mnoho a tak tento postup nikam nevede (kromě vzrůstajícího pocitu, že problém je obtížný). Protože (jak za chvíli ukážeme) má úloha záporné řešení, tak se Vám ani náhodou nemůže podařit mosty předepsaným způsobem projít. Ale je rovněž jiný (Eulerův) postup. Když odstraníte mosty, tak se město rozdělí na souvislé oblasti a z jedné oblasti do jiné se můžete dostat pouze po nějakém mostě. Na druhé straně v každé oblasti jsou všechny dvojice míst dosažitelné po vhodné cestě uvnitř oblasti. Z hlediska úlohy, je tedy jedno, ve kterém místě oblasti se nacházíte nebo jakou cestu uvnitř jedné oblasti zvolíte; všechny jsou stejně dobré.

Kolik je těchto oblastí? To je právě jádro celé úvahy: oblasti jsou pouze 4 (čtyři)! To je názorné, v daném případě jsou to oblasti Sever, Jih, Východ a Ostrov. Jaká fantastická redukce problému: místo zapeklitého nepřehledného problému jen 4 možnosti. Ty oblasti dnes nazýváme komponenty souvislosti. Každou komponentu můžeme považovat za jeden vrchol. Jsou tedy celkem 4 vrcholy a mosty tvoří hrany mezi vrcholy. Vznikne obrázek, jak naznačím níže.

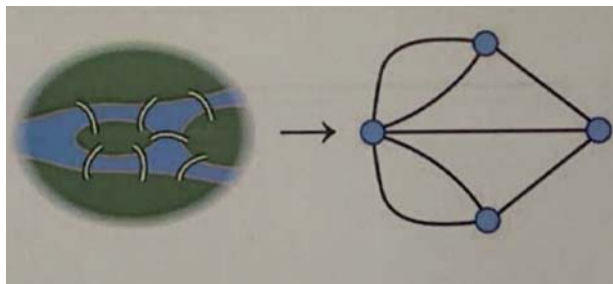
Stačí tedy úlohu vyřešit pro tento obrázek – graf. Je snadné nahlédnout, že tento obrázek nelze nakreslit „jedním tahem“. Takže odpověď na naši otázku je záporná: nejde projít všechny mosty a každý jenom jednou. To celé vypadá jako hříčka a pro dnešního poučeného čtenáře to také tak je. Ale v 18. století to bylo novum. Úvaha zahrnující „souvislost“, „komponenty“, byla neobvyklá a úplně nová. Je to kolébka topologie: složitý obrázek přetvoříme pomocí dosažitelnosti a stahování komponent na mnohem jednodušší obrázek, který však je, z hlediska našeho problému, ekvivalentní.



OBR. 16 Královec poprvé na dobové rytině
FIG. 16 Königsberg for the first time in standard old engraving

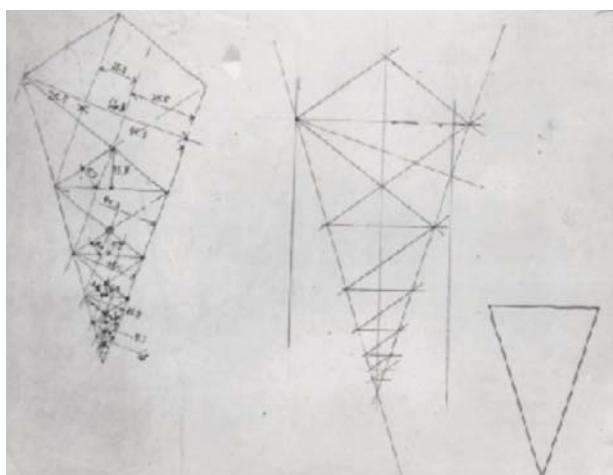


OBR. 17 Královec veselejší z knihy Jaroslava Nešetřila Teorie grafů, SNTL, Praha, 1979
FIG. 17 Königsberg more joyful from Jaroslav Nešetřil, *Graph Theory* (in Czech), SNTL, Praha, 1979



OBR. 18 Eulerova redukce

FIG. 18 Euler reduction



OBR. 19 Vojtěch Preissig, Víceúhelníky z trojúhelníků, (1920–1930), kresba tuší, Archiv Národní galerie v Praze

FIG. 19 Vojtěch Preissig, Polygons from triangles, (1920–1930), drawing, Indian ink, Archive of National Gallery in Prague

1. Topological Considerations

How did this turnabout happen? By gradual development over a long period of time. As is always usual in mathematics, topological reasoning evolved in the study of specific models and problems arising in their context. Two works by L. Euler are almost always cited in this context. The one we mention here actually concerns a *puzzle of the seven bridges of the city of Königsberg*; here Euler reduced the apparently intractable problem of walking through the tangle of streets and bridges in this chaotic city to the problem of a diagram – in contemporary graph terminology – with 4 vertices and 7 edges! Just imagine: you want to walk across all the bridges in the ancient city of Königsberg and you do not want to walk across any bridge twice. This is a frequently used picture of a period engraving of the city. The following is a schematic (and more cheerful) picture we took from the author's first book.¹⁵

15 — J. Nešetřil: Teorie grafů [Graph Theory], SNTL Praha 1979, p. 17.

The problem of seven bridges is very illustrative. You can start solving it yourself, for example, by wandering around the old town and its streets. However, there are very many paths and so this approach leads nowhere (except to an increasing feeling that the problem is difficult). Since (as we will show in a moment) the problem has a negative solution, you cannot possibly manage to cross the bridges in the prescribed way. But there is also another (Euler's) approach. If you remove the bridges, the city will be divided into continuous areas, and you can only get from one area to another via a bridge. On the other hand, in each area, all pairs of locations are reachable by a suitable path within the area. So, in terms of the assignment, it does not matter where you are in the given area or what path you choose within that area; they are all equally good.

How many areas are there? This is the crux of the whole argument: there are only 4 (four) areas! This is clear; in this case, these are North, South, East, and Island areas. What a fantastic reduction of the problem: instead of a convoluted confusing problem, only four options. We now call those areas components of a context. We can think of each component as one vertex. So, there are four vertices in total, and the bridges form the edges between the vertices. The resulting picture is outlined below.

It is therefore enough to solve the problem for this image – graph. It is easy to see that this picture cannot be drawn 'in one stroke'. So, the answer to our question is negative: you cannot cross all the bridges and each one only once. This all looks like a puzzle, and for today's informed reader it is. But it was a novelty in the 18th century. The reasoning involving 'context', 'components', was unusual and entirely new. It is the cradle of topology: we transform a complex image using reachability and contraction of components into a much simpler image, but one that is, in terms of our problem, equivalent.

Tímto činem Euler nejenom ukázal na novou (a užitečnou) matematickou strukturu, ale předložil krásný příklad aplikací matematiky a užitečnosti topologického uvažování. Teorie grafů se posléze rozrostla do velmi rozsáhlé a aktivní oblasti celé matematiky a informatiky. Nebývalý rozvoj informatiky přispěl k tomuto vývoji. Je dokonce možno říci, že je-li teorie množin jazykem matematiky je potom kombinatorika a teorie grafů jazykem informatiky.¹⁶

16 — Zmíňme zde alespoň mezinárodní učebnici J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskretní matematiky, Karolinum (několik vydání od roku 1995). Kniha je dostupná v překladu do 5 jazyků. Úloha o 7 mostech je pěkný příklad: pokud vynecháme jeden most nebo dva, potom je již odpověď kladná. To plyne rovněž snadno. Elegantnější způsob je si uvědomit, že úloha má kladné řešení právě když graf je souvislý (tedy z jednoho kusu) a buď nemá žádný nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

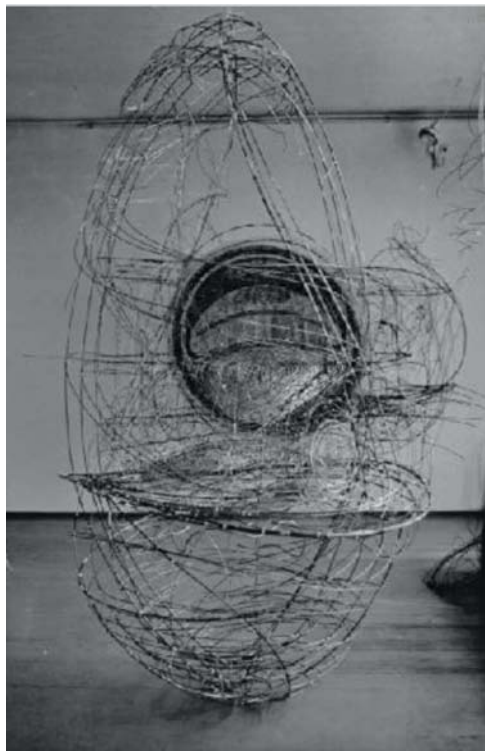
Tato jednoduchá úloha představuje intuitivní jádro topologie: dva objekty, které se zdají být naprosto odlišné, jeden je velký a druhý malý, jeden rozlehlý a nepřehledný, druhý jednoduchý, a přesto mohou být považovány za stejné. To není žádná záhada. Vzpomeňte si, jak zamotaná může být hadice na zahrádce, nebo prádelní šňůra, a kolik práce ji dá rozplést! A přitom je to, z hlediska topologie, stále stejná věc – trochu zamotaná šňůra. Když šňůru nahradíme obecnějšími objekty a transformace „rozpletení“ vhodnými zobrazeními, dostaneme se velmi blízko k matematickému pojetí topologie.

Ale to vše vlastně není třeba k topologickému uvažování. Pro intuici postačí považovat přívlastek „topologický“ za ohebnější a volněji chápaný pojem stejnosti a podobnosti. Někdy ani není třeba pojem stejnosti a podobnosti vysvětlovat. Hovoříme-li například o topologii bytí u Heideggera s pojmy jako topologické prostranství, potom je třeba tyto pojmy, jakkoliv motivované a inspirované matematikou, chápat volně jako matematickou výzvu promýšlet filozofické problémy jinak.¹⁷

17 — Viz například: Martin Nitsche: Prostranství bytí – Studie k Heideggerově topologii, vita intellectiva 2011. Maurice Merleau-Ponty: Viditelné a neviditelné (přel. M. Petříček) OIKOYMENH 2004. Jak u Heideggera tak u Merleau-Pontyho představuje topologický aspekt pozdní etapu jejich díla.

2. Topologické uvažování v matematice

Samozřejmě matematika za dlouhou dobu své existence vytvořila množství modelů pro prostorové a speciální geometrické situace. Tyto modely vycházely z konkrétních potřeb rozvoje matematiky tak, aby poskytly vhodné prostředí (ano, prostor) pro *kalkuly* v té době rozvíjené a používané. Je tak vývoj matematického pojmu prostor do značné míry vývojem matematiky. Co míníme slovem *kalkuly*? To jsou samozřejmě výpočetní postupy, ale zde tím rozumíme více abstraktně myšlenkové obraty používající dobovou síť pojmů a znalostí. Příkladem je topologický kalkul – topologické uvažování. Jak čtenář už zajisté tuší, nebo ví z předchozího textu, při tomto způsobu nezávisí na konkrétním tvaru, ale spíše závisí jen na struktuře dosažitelnosti. Jsou dovoleny deformace. Populárně se někdy říká, že topolog je člověk, který nerozlišuje mezi šálkem kávy a donatem: obojí je souvislé a má jedinou „díru“.



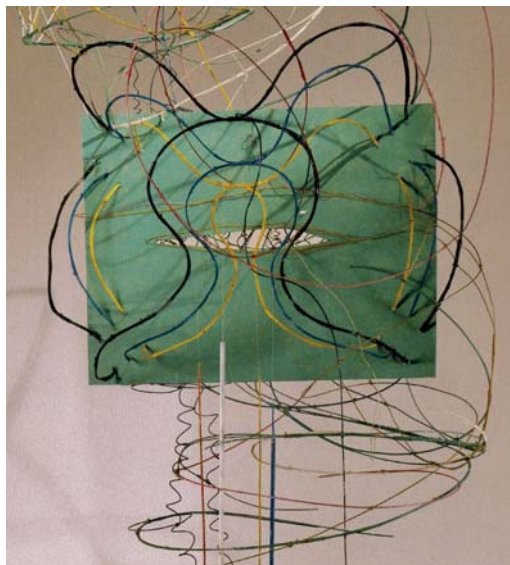
OBR. 20 Karel Malich, *Krajina v věčnem*, (1980–1985), dráty a barvy, Muzeum Kampa, Praha, fotografie Tomáše Vlčka z Malichova atelieru roku 1985

FIG. 20 Karel Malich, *Landscape with eternity*, (1980–1985), wire and paint, Kampa Museum, Prague, Photo by Tomáš Vlček from Malich's studio, 1985



OBR. 21 Topologická shoda

FIG. 21 Topological equivalence



OBR. 22 Karel Malich, Štěrbina v prostoru, detail, 1974, dráty a sololit, z knihy, Karel Srp, Karel Malich, Praha 2006, s. 282

FIG. 22 *Karel Malich*, Gap in Space, detail, 1974, wires and solicit, from the book Karel Srp, Karel Malich, Praha 2006, p. 282

In doing so, Euler not only pointed to a new (and useful) mathematical structure, but presented a beautiful example of the applications of mathematics and the usefulness of topological reasoning. Graph theory eventually grew into a very large and active area of entire mathematics and computer science. The unprecedented development of computer science contributed to this development. It can even be said that if set theory is the language of mathematics, then combinatorics and graph theory are the language of computer science.¹⁶

16 — Let us mention here at least the international textbook by J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskretní matematiky* [Chapters from Discrete Mathematics], Karolinum (several editions since 1995). The book is available in five languages. The problem of seven bridges is a nice example: If we leave out one bridge or if we allow one bridge to be crossed twice, then the answer is already positive. It also flows easily. A more elegant way is to realise that the problem has a positive solution if and only if the graph is continuous (i.e., from one piece) and either has no vertices or just two vertices of odd degree.

This simple task represents the intuitive core of topology: two objects that appear to be completely different, one big and the other small, one large and cluttered, the other simple, and yet can be considered the same. This is no mystery. Think of how tangled a garden hose or a washing line can be, and how much work it takes to untangle it! And yet, in terms of topology, it is still the same thing – a slightly tangled line. If we replace the line with more general objects and the ‘untangling’ transformations with appropriate representations, we get very close to the mathematical concept of topology.

But all this is not really necessary for topological reasoning. For the purpose of intuition, it is sufficient to consider the attribute ‘topological’ as a more flexible and loosely understood notion of sameness and similarity. Sometimes the notion of sameness and similarity does not even need to be explained. For example, if we talk about Heidegger’s topology of being with concepts such as topological locality, then these concepts, no matter how motivated and inspired by mathematics, should be understood loosely as a mathematical challenge to think about philosophical problems differently.¹⁷

17 — See for example: Martin Nitsche: *Prostranství bytí – Studie k Heideggerově topologii* [Locality of Being. A Study to Heidegger’s Topology], *vita intellectiva* 2011. Maurice Merleau-Ponty: *Viditelné a neviditelné* [The Visible and the Invisible] (translated by M. Petříček), OIKOYMENH 2004.

2. Topological Considerations in Mathematics

Of course, mathematics has produced many models for spatial and special geometric situations over its long existence. These models were based on the specific needs of the development of mathematics to provide a suitable environment (yes, space) for the *calculi* that were developed and used at the time. Thus, the development of the mathematical concept of space is to a large extent the development of mathematics. What do we mean by the word *calculi*? These are, of course, computational procedures, but here we have in mind more abstract turns of thought using the network of concepts and knowledge of that time. An example is topological calculus – topological reasoning. As the reader may already have guessed, or knows from the previous text, in this method it is not a particular shape that is important, but rather the structure of reachability. Deformations are allowed. It is sometimes popularly

Kalkuly jsou samozřejmě dobově podmíněné rozvojem intelektuálního prostředí. Matematické kalkuly v antice byly velmi odlišné od renesance, zvláště pak po objevu infinitezimálního počtu. Síla toho objevu zastínila jiné kalkuly dokonce i terminologicky (jeden z oborů matematiky, matematická analýza, je anglicky dosud nazývána calculus). Je mnoho kalkulů. V podstatě každá (rozvinutá matematická oblast má vlastní kalkul a existují rovněž disciplíny, které se věnují kalkulům těchto kalkulů. Např. teorie kategorií, teorie modelů a matematická logika. Mají totiž tyto různorodé kalkuly mnohdy mnoho společného a zvláště pak mají společný základ. Tímto základem je logika a teorie množin, nebo jim příbuzná zmíněná teorie kategorií.

To není samozřejmé a je to vlastně novum, ke kterému matematika dospěla na přelomu 19. a 20. století. Teprve tehdy byly tyto základy pojmenovány a rozvíjeny samy o sobě (i když implicitně byly součástí mnohých kalkulů již dříve). Logika jako disciplína, jako samostatný předmět zkoumání se objevuje až na konci 19. století (George Boole ale hlavně Bertrand Russell).¹⁸

18 — Na počátku 20. století představoval obor logika novum. To si lze nejlépe uvědomit na příkladu Ludwiga Wittgensteina, Franka P. Ramseye a posléze Kurta Gödela. David Hilbert, který svým výzkumem ovlivnil podstatnou část moderní matematiky také věnoval základům matematiky podstatnou část svého díla. Tato slavná historie je předmětem mnoha publikací. (Například: Pavel Pudlák Logical foundations of Mathematics and Computational Complexity – A gentle introduction, Springer 2013.) Existuje dokonce pěkný historický komiks: Apostolos Doxiadis, Christos H. Papadimitriou: Logicomix – an epic search for truth, Bloomsbury 2009.

A období intelektuálního kvasu druhé poloviny 19. století bylo rovněž dobou vzniku teorie množin. Její vznik a zvláště pak přijetí nebyly jednoduché. Je například pozoruhodné, že zatímco Cantorovy práce vyšly v roce 1904 tak první univerzitní přednášky se konaly až počátkem 20. století (1902, 1914).¹⁹ Touha po základech a výchozích principech, řekněme ontologické zkoumání, je matematice vlastní od nepaměti. Ale zhmotněna a zintenzivněna byla právě na konci 19. století. V tomto pozoruhodném okamžiku došlo rovněž k průlomům a k definici topologie jako matematického prostoru. Protože pojem topologie hraje klíčovou roli v celém článku, věnujeme vzniku topologie pozornost.

19 — Teorie množin pochází od G. Cantora, který navázal na práce B. Bolzana. O Bolzanovi zevrubně pojednává kniha Jana Šebestíka: Logique et mathématique chez B. Bolzano, Vrin 1992 a také práce J. Šebestíka: Zamyšlení Petra Vopěnky nad Bolzanem).

Matematika není hledání logických souvislostí a vytváření suchých kalkulů. Matematika hledá systémy a rovněž prostory, které umožňují práci a které ji povzbuzují při hledání a formulování, otázek, problémů a jejich řešení. Vývoj pojmu prostor je tak také odrazem vývoje matematiky samotné. Vývoje, který směřuje k rozprostraněnosti, k metodám umožňujícím uvažovat a formulovat otázky a problémy dosud spíše jen tušené. Přesto v tomto smyslu představuje topologie vývojový skok tím, jak je spojena se vznikem a uznáním teorie množin. Není náhodou, že základní kniha, která kodifikovala topologii, se jmenuje Základy teorie množin. A není také

said that a topologist is a person who does not distinguish between a cup of coffee and a donut: Both are continuous and have a single ‘cavity’. Calculi, of course, depend on the period and are conditioned by the development of the intellectual environment. Mathematical calculi in antiquity were very different from those of the Renaissance, especially after the discovery of infinitesimal calculus. The power of that discovery overshadowed other calculi even in terms of terminology (one branch of mathematics, mathematical analysis, is still called calculus in English). There are many calculi. In fact, every (developed) mathematical field has its own calculus, and there are also disciplines that deal with the calculus of these calculi. For example, category theory, model theory, and mathematical logic. Indeed, these various calculi often have much in common, and in particular have a common basis. This basis is logic and set theory, or the related category theory mentioned above.

This is not self-evident and it is in fact a novelty that mathematics arrived at at the late 19th and the beginning of the 20th centuries. It was only then that these foundations were named and developed in their own right (although they were implicitly part of many calculi before). Logic as a discipline, as an independent subject of inquiry, only appeared in the late 19th century (George Boole but mainly Bertrand Russell).¹⁸

18 — At the beginning of the 20th century, the field of logic was a novelty. This can best be seen in the examples of Ludwig Wittgenstein, Frank P. Ramsey and later Kurt Gödel. David Hilbert, whose research influenced much of modern mathematics, also devoted a substantial part of his work to the foundations of mathematics. This illustrious history has been the subject of many publications. (For example: Pavel Pudlák: Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity – A Gentle Introduction, Springer 2013.) There is even a nice historical comic book: Apostolos Doxiadis, Christos H. Papadimitriou: Logicomix – An Epic Search for Truth, Bloomsbury 2009.

And the period of intellectual boom in the second half of the 19th century was also the time of the emergence of set theory. Its emergence and especially its adoption were not easy. For example, it is noteworthy that while Cantor’s works were published in 1895, the first university lectures did not take place until the early 20th century (1902, 1914).¹⁹

19 — Set theory originates from G. Cantor, who continued the work of B. Bolzano. Bolzano is discussed in detail in Jan Šebestík’s book: Logique et Mathématique chez B. Bolzano, Vrin 1992, as well as in J. Šebestík’s work: Zamyslení Petra Vopěnky nad Bolzanem [Petr Vopěnka’s Reflections on Bolzano].

The desire for foundations and initial principles, say ontological research, has been intrinsic to mathematics since time immemorial. But it was materialised and intensified at the end of the 19th century. It was also at this remarkable moment that a breakthrough was made and topology was defined as a mathematical space. Since the concept of topology plays a key role throughout this paper, we will pay attention to the emergence of topology.

Mathematics is not about searching for logical connections and making tedious calculations. Mathematics seeks systems as well as spaces that make work possible, encouraging it in searching for and formulating questions, problems and their solutions. The development of the concept of space is thus also a reflection of the development of mathematics itself. A development that is moving towards spatiality (res extensa), towards methods that allow us to think and formulate questions and

náhodou, že topologie je vlastně první čistě abstraktní prostorový pojem, který se neopírá o žádný konkrétní model (nebo řekněme názor). Opírá se jen o teorii množin, se kterou v podstatě vzniká současně. **20**

20 — I když počátky teorie množin v díle Cantorově jsou z let 1880 první přednášky věnované tomuto oboru jsou až přednášky Zermela v Göttingen a Hausdorffa v Bonnu v počátku 20. století. Považujeme Cantora za tvůrce teorie množin. Cantor byl však velmi opatrný. Což bylo zajisté způsobeno opozicí k nové teorii. V tomto smyslu je možno potom říci, že kalkulus teorie množin byl rozvinut plně až Felixem Hausdorffem.

Existence modelu byla přitom vždy zásadního významu. Připomeňme si to příkladem Euklidova pátého postulátu: Po mnoho století byla základní otázka, zda Euklidův axiom o rovnoběžkách lze dokázat z ostatních axiomů. A problém byl vyřešen až v 19. století (Bolyai, Lobačevskij a Gauss) tím, že byly vynalezeny modely, které splňují Eukleidovy axiomy a nespĺňují axiom o rovnoběžkách. Všechny prostory uvažované v 19. století odpovídaly (někdy velmi složitým) modelům. Modely nalezené Riemannem, Frechetem a mnohými dalšími matematiky a založily celá odvětví matematiky (například funkcionální analýzu a diferenciatní topologii).

Ale teorie množin přivedla kopernikánský obrat: definice topologického prostoru nemá model, nebo lépe řečeno, má jediný model odvozený z teorie množin. Topologický prostor neodkazuje na názor na jiné prostory. Je to prostor sám o sobě, chtělo by se říci absolutní prostor. **21**

21 — Absolutní ve smyslu absence dalších omezení. Podobně jako absolutní teorie grafů Denese Königa: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Teubner 1936. Zdá se, že přívlastek absolutní měl v počátku 20tého století jiný a hlubší význam.

Topologický prostor je prostě množina a vybrané podmnožiny splňující pár axiomů. Ta množina nemá žádnou další strukturu. Navíc množina je zpravidla nekonečná a aby topologie byla zajímavá nekonečno je potřeba. Topologický prostor je zpravidla nekonečný. V tomto tvrzení je více, než se zdá na první pohled. Je sice možné, že množina prostoru je konečná, ale to je poté velmi jednoduchá situace a vznikají tak jednoduché případy. Konečné topologie odpovídají v podstatě jen relacím (uspořádání). Jenom pro nekonečné množiny dostáváme teorii v plné síle a zajímavosti.

Tato situace měla a má podstatný vliv na používání pojmu prostor. Tak říkajíc uvolnily se tím ruce a mysl matematiků. Poprvé v historii matematiky vytvořili a začali studovat pojem, který neměl jiný než model stvořený rovněž matematiky bez jakéhokoliv odkazu na reálný svět. Není divu, že teorie množin nebyla hned uznána za plnohodnotnou matematickou teorii. Z dnešního hlediska je situace s přijutím axiomu nekonečna vyjasněna. Ale přesto, nebo právě proto, se jeho použití mnohdy zmiňuje a práce bez jeho použití, t.j. práce použitím pouze teorie konečných množin, má velký význam zvláště v kontextu informatiky a teorie algoritmů. Vznik teorie množin, její přijetí a už jenom používání „množinového jazyka“ vedlo k nebývalé bohatosti pojmů a poznatků, které vyznačuje současnou matematiku. Na počátku byl však „osudový krok“ (Kalista, Vopěnka), který lze vysledovat až k Bolzanovi, krok přijutí a znepochybnění hypotézy o (aktuálním) nekonečnu. V tomto smyslu je (množinová) topologie ztělesněním absolutní geometrie a vlastně jedním z principiálních potvrzení vhodnosti a síly (nově vzniklé) teorie množin.

problems that have hitherto been more or less just suspected. Yet in this sense, topology represents a quantum leap in the way it is connected to the emergence and recognition of set theory. It is no coincidence that the seminal book that codified topology is called *Foundations of Set Theory*. And it is also no coincidence that topology is actually the first purely abstract spatial concept that does not rely on any particular model (or, say, opinion). It relies only on set theory, with which it was essentially created at the same time.²⁰

20 — Although the beginnings of set theory in Cantor's work date back to the 1880s, the first lectures devoted to the subject were given by Zermel in Göttingen and Hausdorff in Bonn in the early 20th century. We consider Cantor the founder of set theory. Cantor was, however, very cautious, which was certainly due to the opposition to the new theory. In this sense, it can then be said that the calculus of set theory was only fully developed by Felix Hausdorff.

The existence of a model has always been of fundamental importance. Let us recall the example of Euclid's fifth postulate: for many centuries the fundamental question was whether Euclid's parallel postulate could be proved from other axioms. And the problem was only solved in the 19th century (Bolyai, Lobachevsky and Gauss) by inventing models that satisfy Euclid's axioms and do not satisfy the parallel postulate. All spaces considered in the 19th century conformed to (sometimes very complex) models – the models found by Riemann, Frechet and many other mathematicians, which founded whole branches of mathematics (such as functional analysis and differential topology).

But set theory brought a Copernican turn: the definition of a topological space does not have a model, or rather, it has a single model derived from set theory. A topological space does not refer to an opinion of other spaces. It is a space in itself, one would like to say an absolute space.²¹

21 — Absolute in the sense of the absence of further restrictions. Similar to Dénes König's absolute graph theory: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Teubner 1936. The attribute 'absolute' seems to have had a different and more profound meaning in the early 20th century.

The topological space is simply a set and selected subsets satisfying a couple of axioms. The set has no other structure. Moreover, the set is usually infinite and in order to make topology interesting infinity is needed. The topological space is usually infinite. There is more to this statement than meets the eye. It is indeed possible that the set of space is finite, but this is then a very simple situation and simple cases arise. Finite topologies correspond essentially only to relations (arrangements). Only for infinite sets do we have the theory in full force and interest.

This situation has had, and still has, a substantial influence on the use of the concept of space. It freed the hands and minds of mathematicians, so to speak. For the first time in history, mathematicians created and began to study a concept that had no reference to the real world other than a model also created by mathematicians. Not surprisingly, set theory was not immediately recognised as a full-fledged mathematical theory. From today's point of view, the situation with the acceptance of the axiom of infinity is clarified. But despite this, or precisely because of this, its use is often mentioned and work without using it, i.e., work using only finite set theory, is of great importance especially in the context of computer science and algorithm theory. The emergence of set theory, its adoption, and the mere use of 'set language'

Vraťme se však ještě jednou k Eulerovi. Eulerův cit pro otázky, které bychom dnes označili jako topologicke, se projevil rovněž v jeho druhé neméně slavné práci, kdy našel číselný invariant, který platí pro libovolný mnohostěn. Jeho slavný vzorec $V - E + F = 2$ se řadí mezi perly matematiky. Vzorec lze interpretovat v teorii grafů, ale jeho význam je obecně geometrický a byl zkoumán z mnoha hledisek.²²

22 — Uvedme klasickou práci Imre Lakatos: *Proofs and refutation. The logic of mathematical discovery.* Cambridge Univ. Press 1976. Jiná populárněji zaměřená práce je D. S. Richeson: *Euler's gem (The polyhedron formula and the birth of topology)*, Princeton Univ. Press 2008.

Z obecného hlediska, nám vzorec poskytuje možnost studovat (a charakterizovat) obrázky (a geometrické útvary, zde mnohostěny) pomocí čísel (a algebraických objektů). Podivná věc: obrazy a schémata pomocí čísel a invariantů. Tento směr výzkumu vedl na konci 19. století několik matematiků (Fréchet, Betti, Poincaré) ke studiu obecnějších modelů (metrické prostory a variety) a ke vzniku topologie samotné. Henri Poincaré objevil možnosti klasifikace takových modelů pomocí lokální analýzy (lokální podobnosti Euklidovských prostorů) a pomocí kombinatorické aproximace pomocí simplexů a komplexů (což jsou opět zobecněné grafy – graf je 1-dimenzionální komplex). Tento přístup (který v mnohém svou názorností připomíná metodu kubismu a lze jen spekulovat zda se jedná o pouhou náhodu) se ukázal jako mimořádně plodný a vedl ke vzniku algebraické topologie (původně nazývané kombinatorická) topologie.

Je zajímavé, že kubismus se v dějinách umění spojuje s problematikou čtvrté dimenze a dokonce s vlivem Einsteiny. Vliv Henriho Poincarého je nezpochybnitelný (zatímco Einsteinův vliv je legenda, viz ²³) ale tento vliv se omezuje vesměs na problematiku čtvrté dimenze a neeukleidovských geometrií. Vliv nově vznikající kombinatorické (později algebraické) topologie se opomíjí. A to i přes názornou podobnost a aktivitu stejných osob.

23 — O problematice čtvrté dimenze v umění viz rozsáhlou práci Linda Dalrympe Henderson: *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press 1983. Problematika Einsteina a umění je zevrubně pojednána (a vyvrácena) v L. H. Henderson: *Four dimensional Space or Space-Time? The emergence of the Cubism-Relativity Myth in New York in the 1940 s.* In: *Visual Mind* (Michele Emmer ed.) MIT Press 2005, 349–397. Tato práce detailně popisuje rané zdroje mimo jiné práce knihy Moholy-Nagy. Filozofičtější přístup k jedné Moholyho fotografii (Berlínská Radio věž) je obsažen v práci Miroslav Petříček, Jaroslav Nešetřil: *Outside in inside out.* In: *(Mathematics on a single snapshot).* In: *Art in the life of mathematicians* (Anna Kepes Szemerédi, ed.), Amer. Math. Soc 2015, 232–247. Kniha *Visual Mind II* (ed. M. Emmer), MIT Press 2005 obsahuje několik příspěvků týkajících se problematiky prostoru ve výtvarném umění (a také filmu). Například článek Capi Corrales Rodríguez: *Local/Global in Mathematics and Painting*, *Visual Mind II*, 273–307. Tento příspěvek je avšak jediný z celé knihy, který odkazuje na práci Felixe Haudorffa. Topologie je samozřejmě zmíněna neboť kniha obsahuje článek Giuseppa Di Cristina: *Poetry in Curves: The Guggenheim Museum in Bilbao.* In: *Visual Mind* (Michele Emmer ed.) MIT Press 2005, 159–186. Topologie je dokonce zde zmíněna pouze okrajově jako 'topological image of the original functional model'.

has led to an unprecedented richness of concepts and knowledge that characterises contemporary mathematics. At the beginning, however, there was a ‘crucial step’ (Kalista, Vopěnka), which can be traced back to Bolzano, the step of accepting and not questioning the hypothesis of (actual) infinity. In this sense, (point-set) topology is the embodiment of absolute geometry and, in fact, one of the principal confirmations of the suitability and power of (the newly emerging) set theory.

But let us return once more to Euler. Euler’s sensitivity for questions that would nowadays be described as topological questions was also evident in his second equally famous work, where he found a numerical invariant that applies to any polyhedron. His famous formula $V - E + F = 2$ ranks among the pearls of mathematics. The formula can be interpreted in graph theory, but its importance is generally geometric and has been studied from many points of view.²²

22 — Let us cite the classic work of Imre Lakatos: *Proofs and Refutation. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge Univ. Press 1976. Another more popular work is D. S. Richeson: *Euler’s Gem (The Polyhedron Formula and the Birth of Topology)*, Princeton Univ. Press 2008.

In general terms, the formula gives us the opportunity to study (and describe) images (and geometric figures, here polyhedra) using numbers (and algebraic objects). A strange thing: pictures and diagrams using numbers and invariants. In the late 19th century, this line of research led several mathematicians (Frechet, Betti, Poincaré) to study more general models (metric spaces and varieties) and to the emergence of topology itself. Henri Poincaré discovered the possibilities of classifying such models by local analysis (local similarity to Euclidean spaces) and with the help of combinatorial approximation using simplexes and complexes (which are again generalised graphs - a graph is a 1-dimensional complex). This approach (which in many ways resembles the method of Cubism due to its illustrative nature, and one can only speculate whether it is mere coincidence) proved to be extremely fruitful and led to the emergence of algebraic (originally called combinatorial) topology.

It is interesting that cubism is associated in art history with the fourth dimension and even with Einstein’s influence. Henri Poincaré’s influence is indisputable (while Einstein’s influence is a legend, see²³) but this influence is mostly limited to the fourth dimension and non-Euclidean geometries. The influence of the emerging combinatorial (later algebraic) topology is neglected. This is despite the illustrative similarity and activity of the same persons.

23 — On the fourth dimension in art, see the extensive work by Linda Dalrympe Henderson: *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press 1983. The topic of Einstein and art is thoroughly discussed (and refuted) in L. H. Henderson: *Four-Dimensional Space or Space-Time? The Emergence of the Cubism-Relativity Myth in New York in the 1940s*. In: *Visual Mind* (Michele Emmer ed.) MIT Press 2005, pp. 349–397. This work describes in detail the early sources, among other works of Moholy-Nagy. A more philosophical approach to one of Moholy’s photographs (Berlin Radio Tower) is contained in Miroslav Petříček, Jaroslav Nešetřil: *Outside In Inside Out*. In: *(Mathematics on a Single Snapshot)*. In: *Art in the Life of Mathematicians* (Anna Kepes Szemerédi, ed.), Amer. Math. Soc 2015, pp. 232–247. The book *Visual Mind II* (ed. M. Emmer), MIT Press 2005, contains several papers dealing with the topic of space in visual arts (and also film). For example, the article by Capi Corrales Rodríguez: *Local/Global in Mathematics and Painting*, *Visual Mind II*, pp. 273–307. This paper, however, is the only one in the entire book that refers to the work of Felix Haudorff. Topology is of course mentioned as the book includes an article by Giuseppe Di Cristina: *Poetry in Curves*: The Guggenheim Museum in Bilbao. In: *Visual Mind II* (Michele Emmer ed.) MIT Press 2005, pp. 159–186. Topology is only marginally mentioned here as a ‘topological image of the original functional model’.



OBR. 23 Bohumil Kubišta, Polibek smrti, 1912, olej na plátně, Oblastní galerie Liberec, from the catalogue, Aktuální nekonečno, GHMP, 2000, s. 15

FIG. 23 Bohumil Kubišta, Kiss of Death, 1912, oil on canvas, Regional Gallery Liberec, from the catalogue, Actual infinity, City Gallery Prague, 2000, p. 15

With all these beautiful contexts (and realisations), it is still about an exploration of specific (however general) models (for example, spaces of functions or spaces (called varieties) that are locally similar to Euclidean spaces). Thus, in our classification, it is about working in a framework, without attempts to grasp the universal absolute space. The development of early algebraic geometry was largely disjunct from efforts to find a universal space.

Poincaré himself was also not a great supporter of set theory. Here is his (pessimistic) comment on the possibility of introducing an absolute space: *'It is impossible to picture empty space. All our efforts to imagine pure space from which the changing images of material objects are excluded can only result in a representation in which highly-coloured surfaces, for instance, are replaced by lines of slight colouration, and if we continued in this direction to the end, everything would disappear and end in nothing. Hence arises the irreducible relativity of space.'* H. Poincaré *Science et methode*, Flammarion 1908, p. 95.

Yes, the space for Poincaré must be filled with the qualities that make it a full-fledged space that is worth studying and also has real contexts. Perhaps this commentary also discouraged contemporary artists from topology, which they found less comprehensible than the idea of the fourth dimension (which was actually based on traditional geometry). Yet the boldness and generality of the structures set the stage for the emergence of topology as we know it today.²⁴

24 — The basic work is H. Poincaré: *Analysis Situs*, J. de l'École Polytech, Ser.(2)1(1895), 1–123. This work has five sequels, the last of which was published only in 1904. The conjecture of the exceptional uniqueness of the sphere is also formulated here. This Poincaré's conjecture (and its analogy in larger dimensions) became one of the driving forces of mathematics throughout the 20th century. It was not fully resolved until 2006. For the history of algebraic topology and 'low-dimensional topology', see Mahine R. Adhikari: *Basic Algebraic Topology and its Applications*, Springer 2016, pp. 547–568. An introduction is also provided in the book A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge 2002. The topic also includes the study of meanders and nodes (which we mentioned in the introduction of this chapter and which have many applications in physics and theoretical computer science, see e.g., Sergei K. Lando, Alexander K. Zvonkin: *Graphs on Surfaces and their Applications*, Springer 2004.

3. Absolute (Point-Set) Topology

Let us go back to sets again. From today's point of view, there are many topologies in mathematics and elsewhere. In fact, every mathematical discipline has a separate part that is denoted by the adjective topological: topological group theory, topological graph theory (this is actually nonsense, since a graph itself is a topological concept. However, it is understood that graphs are studied with added topology, i.e., for example, drawing graphs on surfaces.) And another example is topological dynamics or network topology and various types of topological analyses. But these are mostly topology-type areas plus something. And that something usually comes with a model. So that was discussed in the previous section.

But what is topology itself? We have already touched upon this problem: topology itself can be called absolute topology, and today the most common name is point-set topology, or general topology. As we already know, this is what topology is: nothing

Při všech těchto krásných souvislostech (a realizacích) to stále je zkoumání konkrétních (jakkoliv obecných) modelů (například prostorů funkcí nebo prostorů (zvaných variety), které jsou lokálně podobné euklidovským prostorům). Tedy v naší klasifikaci se jedná o práci v rámci, bez snahy o uchopení univerzálního absolutního prostoru. Vývoj rané algebraické geometrie byl do značné míry disjunktní od snah po nalezení univerzálního prostoru.

Poincaré sám také nebyl velkým příznivcem teorie množin. Zde je jeho (pesimistický) komentář o možnosti zavedení absolutního prostoru: „*Je zcela nemožné zobrazit prázdný prostor. Veškeré naše úsilí, představit si čistý prostor, ze kterého jsou vyloučena proměnlivá zobrazení hmotných objektů, může pouze vyústit v zobrazení ve kterém například bohatě barevně zářící povrchy jsou nahrazeny lehce zbarvenými liniemi. Když budeme tímto způsobem pokračovat všechno se rozplyne do nekonečné nicoty. Z toho vyplývá neredukovatelná relativita prostoru.*“ H. Poincaré Science et methode, Flammarion 1908, s. 95.

Ano, prostor pro Poincarého musí být naplněn vlastnostmi, které ho tvoří plnohodnotným prostorem, který má cenu studovat a který má také reálné souvislosti. Možná i tento komentář odrazoval soudobé umělce od topologie, která jim připadala méně srozumitelná než problematika čtvrté dimenze (která vlastně vycházela z tradiční geometrie). Přesto smělost a obecnost konstrukcí připravovala půdu pro vznik topologie, jak ji známe dnes.²⁴

24 — Základní práce je H. Poincaré: Analysis situs, J. de l'Ecole Polytech, Ser.(2)1(1895), 1–123. Tato práce má 5 pokračování z nichž poslední vyšlo až v roce 1904. Zde je také formulována domněnka o výjimečné jednoznačnosti sféry. Tato Poincarého domněnka (a její analogie ve větších dimenzích) se stala jedním z hnacích motorů matematiky celého 20ého století. V úplnosti byla vyřešena až v roce 2006. Pro historii algebraické topologie a 'low-dimensional topology' viz Mahine R. Adhikari: Basic Algebraic Topology and its Applications, Springer 2016, pp 547 – 568. Úvod poskytuje rovněž kniha A. Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge 2002. Problematika zahrnuje rovněž studium meandrů a uzlů (které jsme zmínili v úvodu této kapitoly, které mají mnohé použití ve fyzice i teoretické informatice viz např. Sergej K. Lando, Alexander K. Zvonkin: Graphs on surfaces and their Applications, Springer 2004.

3. Absolutní (množinová) topologie

Vraťme se opět k množinám. Z dnešního hlediska je mnoho topologií v matematice i jinde. V podstatě každá matematická disciplína má osamocenou část, která se označuje přívlastkem topologický (-á): topologická teorie grup, topologická teorie grafů (to je vlastně nesmysl, protože graf sám o sobě je topologický pojem. Myslí se to však tak, že se studují grafy s přidanou topologií, tedy například kreslení grafů na plochách.) A jiným příkladem je například topologická dynamika nebo topologie sítí a různé druhy topologických analýz. Ale to jsou vesměs oblasti typu topologie plus něco. A to něco zpravidla přichází spolu s modelem. O to jsme tedy pojednali v předchozí části.

Co je však topologie sama o sobě? Tohoto problému jsme se již také dotkli: topologie sama o sobě se dá označit jako absolutní topologie a dnes se nejčastěji používá název množinová topologie, nebo též obecná topologie. Jak již víme to také topologie je: nic jiného než množina a systém podmnožin splňujících pár pravidel (axiomů).

but a set and a system of subsets satisfying a few rules (axioms). So, no model with shining surfaces, just an empty set (without properties), in fact nothing (see Poincaré's quote above).

This was a radical act in the history of mathematics. Space itself without a 'meaningful' model. The road to this step was long, but today the emergence of point-set topology is associated with Felix Hausdorff and his book *Grundzüge der Mengenlehre* from 1914. It is rare that the emergence of an entire mathematical discipline can be pinpointed by a single work with a single author.²⁵

25 — It is a rare phenomenon across the sciences. Another example of the same is Gregor Mendel and genetics.

Notice the title first of all – Fundamentals of Set Theory. Hausdorff primarily develops the calculus of set theory. And he develops it in the context of mathematical models that do not require many other conditions. These are relations, orderings, set systems and topologies. Topology here acts as an abstract geometry, as an absolute space, not as a model of 'something'. How did Hausdorff arrive at this very abstract notion? The situation is never simple. Hausdorff himself was a highly cultured man with extraordinarily broad interests, including philosophy and literature, where he published under the name Paul Mongré. It also seems that it was through his experience with philosophy, and especially the philosophy of Friedrich Nietzsche (in his time very influential) that Hausdorff became interested in set theory. In 1898, Paul Mongré publishes his book *Chaos der Kosmische Auslese* [*Chaos in Cosmic Selection*], where he comes to terms with the influence of Nietzsche and at the same time draws from him (and the situation of the time) the courage to make a change, to take a new turn.

For Hausdorff, the cosmos is the totality of experiences of each individual, while chaos is the world itself, the domain of metaphysics. Our world of experience, which is ordered by the laws of nature, is a product of our consciousness. It thus selects our cosmos from the transcendental chaos. Metaphysical relations cannot be empirically compared. Mongré himself formulates the conclusion of his book as follows: *'So let us cast aside the cosmocentric superstition just like we cast aside the geocentric and anthropocentric superstition before; let us realize that there are myriads of cosmic worlds spun into the chaos – each of them appearing to its inhabitants as the sole and only real world and misleading them to assign its qualitative and particular characteristics to the transcendental core of the world.'* A page later, Hausdorff concludes his reasoning: *'As a result, the bridges between chaos and cosmos are destroyed and the end of metaphysics is declared.'*²⁶

26 — Quoted from E. Eichhorn: In Memoriam Felix Hausdorff (1868–1942) in the almanac *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*, Helderermann Verlag Berlin 1994.

Tedy žádný model se zářícími plochami, jen vyprázdněná množina (bez vlastností), vlastně nic (viz. výše uvedený citát Poincarého).

To byl v historii matematiky radikální čin. Prostor sám o sobě bez „smysluplného“ modelu. Cesta k tomuto kroku byla dlouhá, ale dnes je vznik množinové topologie spojován s Felixem Hausdorffem a jeho knihou „*Grundzüge der Mengenlehre*“ z roku 1914. Jen málokdy se stane, že vznik celé matematické disciplíny je možno přesně určit jednou prací s jedním autorem.²⁵

25 — Je to řídký jev napříč vědami. Jako jiný příklad téhož se nabízí Gregor Mendel a genetika.

Všimněte si hned názvu – Základy teorie množin. Hausdorff primárně rozvíjí kalkulus teorie množin. A rozvíjí ho v kontextu matematických modelů nevyžadujících mnoho dalších podmínek. Jsou to relace, uspořádání, systémy množin a topologie. Topologie zde vystupuje jako abstraktní geometrie, jako absolutní prostor, nikoliv jako model „něčeho“. Jak k tomuto velmi abstraktnímu pojmu Hausdorff došel? Situace není nikdy jednoduchá. Hausdorff sám byl velmi kultivovaný člověk mimořádně širokých zájmů včetně filozofie a literatury, kde publikoval pod jménem *Paul Mongré*. Zdá se také, že k zájmu o teorii množin se Hausdorff dostal právě přes zkušenost s filozofií a zvláště pak přes (ve své době velmi vlivnou) filozofii Friedricha Nietzscheho. V roce 1898 vydává Paul Mongré knihu „*Chaos der Kosmische Auslese*“ (Chaos v kosmickém výběru), kde se vyrovnává s vlivem Nietzscheho a současně z něj (a dobové situace) čerpá odvalu ke změně, k novému obratu.

Kosmos pro Hausdorffa znamená celek zkušeností a zážitků každého jedince, zatímco chaos je svět sám doména metafyziky. Náš svět zkušeností, který je uspořádaný přírodními zákony je produkt našeho vědomí. Vybírá tak náš kosmos z transcendentálního chaosu. Metafyzické vztahy se nedají empiricky porovnat. Mongré sám formuluje facit své knihy takto: „*Jestliže dáme stejnou možnost kosmocentrickému uvažování jako předtím uvažování geocentrickému a antropocentrickému, potom zjistíme, že v (transcendentálním) chaosu je vetknuta nespočetná množina kosmických světů. Tyto světy se jedincům jeví jako jediný a jedinečný skutečný svět a tak se dále snažíme, kvalitativní znaky a zvláštnosti (tohoto našeho kosmu) připisovat transcendentálnímu jádru světa*“. O stránku dál Hausdorff uzavírá svou úvahu: „*Tímto jsou přerušeny všechny mosty přerušeny chaosem a kosmem. Je to konec metafyziky*“.²⁶

26 — Citováno podle E. Eichhorn: In memoriam Felix Hausdorff (1868–1942) ve sborníku *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*, Heldermann Verlag Berlin 1994.

Není jasné jak Hausdorff myslí „unzählbare“ možná obrazně nespočítatelné, možná i nespočetné (což jsou v matematice rozdílné věci). Nekonečnou množinu v každém případě. Je ale nepochybné, že jeho radikální příspěvek k teorii poznání je

It is not clear what Hausdorff means by ‘unzählbare’, perhaps figuratively uncountable or even countless (which are different things in mathematics). An infinite set in any case. But there is no doubt that his radical contribution to the theory of knowledge is formulated in the context of set theory.

Reflections on the totality of knowledge and sets led Hausdorff to become interested in Cantor’s set theory, which was very new at the time and was not widely accepted.

With a little exaggeration, it can be said that Hausdorff came close to one of the possible definitions of actual infinity (i.e., the set of truths in the mind of God), in the context of the atheistic Nietzsche. On the actual infinity (i.e., a concept discussed at that time as much as today), Hausdorff subsequently built a comprehensive theory of (point-set) topology.²⁷

One would almost like to say that the calculus of point-set topology is Hausdorff’s reaction to the loss of metaphysics, to the attempts to win another part of chaos into our cosmos after all. We know from history how difficult the process of creation of the idea of actual infinity was and how it has been (and still is) received with reservations. Nevertheless, Hausdorff’s path to set theory is remarkable, resembling B. Bolzano’s path in its sincerity and depth of thought.²⁸

In his seminal publication, Hausdorff went even further. Set theory is not only a convenient language for him, but here he fully develops the calculus of set theory and uses set theory as the basis for the entire mathematics, as a possible underlying model for mathematical structures and for geometric structures in particular. He reserved the name topology for this absolute geometry. Hausdorff probably could not have foreseen the influence his work would have.²⁹

Of course, the problem of the perception of the world has been the subject of human thought since time immemorial, and the words ‘chaos’ and ‘cosmos’ originated and were used in antiquity. In a more modern context, it is also the basis of the

27 — At that time, Mongré-Hausdorff’s philosophical book did not attract attention. Interestingly, one of the few reviews came from George Steiner. Later, Max Bense referred to the book. But even today the book is difficult to find. It was republished by Max Bense in 1976 under the title *Zwischen Chaos und Kosmos oder Vom Ende der Metaphysik Das Chaos in kosmischer Auslese*. The book is available in the collected writings of Hausdorff, published by the University of Bonn.

28 — Many publications are devoted to the life and work of F. Hausdorff. In the Czech literature, there is a very nice recent work by L. Koudela, J. Veselý: *Felix Hausdorff (1868–1942) on the 150th anniversary of his birth, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie [Advances of Mathematics, Physics and Astronomy] vol. 63 (2018), 108–124*. In 2000–2018, the Springer publishing house published a comprehensive work of Hausdorff (with a number of additional comments). The Hausdorff Center for Mathematics was founded at the University of Bonn, which provides facilities for many conferences and offers study stays. It also publishes works related to Hausdorff’s legacy, e.g., W. Purkert: *Felix Hausdorff – Paul Mongré, Mathematician-Philosopher-Man of Letters*, Bonn 2013.

29 — The book ‘Grundzüge der Mengenlehre’ and later with the revised title ‘Mengenlehre’ was published three times already during Hausdorff’s lifetime (by the Veit publishing house and then twice by de Gruyter). The book has been repeatedly published up to the present day (in German and in translations).

formulován v kontextu teorie množin. Úvahy o totalitě poznání a celku Hausdorffa přivedly k zájmu o Cantorovu teorii množin, která ve své době byla velmi nová a nebyla široce přijata. S trochou nadsázky je možno říci, jakoby se Hausdorff přiblížil jedné z možných definic aktuálního nekonečna (tj. množina pravd v myslí boží) a to v kontextu ateistického Nietzscheho. Na aktuálním nekonečnu (tj. na pojmu diskutovaném tehdy stejně jako dnes) vybudoval Hausdorff posléze ucelenou teorii (množinové) topologie. **27**

Chtělo by se skoro říci, že kalkulus množinové topologie je Hausdorffova odpověď za ztrátu metafyziky, za snahu si přece jen vydobýt další část chaosu do našeho kosmu. Víme z historie, jak obtížně se rodila myšlenka aktuálního nekonečna a jak byla (a dosud je) přijímána s výhradami. Přesto je pozoruhodná Hausdorffova cesta k teorii množin, která svou opravdovostí a myšlenkovou hloubkou připomíná cestu B. Bolzana. **28**

Ve své klíčové publikaci Hausdorff pokročil ještě dále. Teorie množin mu není pouze vhodným jazykem, ale rozvíjí zde plně kalkulus teorie množin a používá teorii množin jako základ celé matematiky, jako možný základní model pro matematické struktury a pro geometrické struktury zvláště. Pro tuto absolutní geometrii vyhradil název topologie. Hausdorff asi nemohl tušit jaký vliv jeho práce bude mít. **29**

Samozřejmě problematika vnímání světa byla předmětem lidského uvažování od nepaměti a slova chaos a kosmos pocházejí a byla používána v antice. V modernějším kontextu je rovněž základem přístupu autorů Gilles Deleuze a Felix Guattari ve známé a podnětné knize *Co je filozofie*. **30**

Autoři opakovaně hovoří o zápase s chaosem. Z mimořádně podnětného a pro naši práci relevantního textu, připomínáme: „*Myšlení, tři velké formy myšlení – umění, vědu a filosofii – , tedy vždy definuje to, že čelí chaosu, rozvrhují rovinu, že chaos protínají rovinou. Filosofie však dokáže zachránit nekonečno tím, že mu dává konzistenci: rýsuje rovinu imanence, která působením pojmových osob otevírá konzistentní události či pojmy pro nekonečno. Věda se naopak nekonečna vzdává, aby*

27 — Ve své době filozofická kniha Mongrého-Hausdorffa nezbudila pozornost. Je zajímavé, že jedna z mála recenzí pochází od George Steinera. Později na knihu odkazuje Max Bense. Ale i dnes je kniha obtížně dostupná. Knihu znovu vydal Max Bense v roce 1976 pod názvem *Zwischen Chaos und Kosmos oder Vom Ende der Metaphysik Das Chaos in kosmischer Auslese*. Kniha je dostupná v sebraných spisech Hausdorffa, kterou vydala universita v Bonnu.

28 — Životu i dílu F. Hausdorffa jsou věnovány mnohé publikace. V české literatuře je velmi pěkná nedávná práce L. Koudela, J. Veselý: *Felix Hausdorff (1868–1942) ke 150. výročí narození, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie vol. 63(2018), 108–124*. Nakladatelství Springer v letech 2000–2018 vydalo souhrnné Hausdorffovo dílo (s řadou doplňujících komentářů). Při univerzitě v Bonnu bylo založeno Hausdorffovo Matematické Centrum, které poskytuje zázemí pro mnoho konferencí a nabízí studijní pobyty. Vydává rovněž práce související s odkazem F. Hausdorffa, např. W. Purkert: *Felix Hausdorff – Paul Mongré, mathematician-philosopher-man of letters*, Bonn 2013.

29 — Kniha „*Grundzüge der Mengenlehre*“ a posléze s upraveným titulem „*Mengenlehre*“ byla vydána 3× již za Hausdorffova života (nakladatelstvím Veit a posléze dvakrát de Gruyter). Kniha se opakovaně vydává až do dnešních dnů (německy i v překladech).

30 — G. Deleuze, F. Guattari: *Co je filosofie*, Oikoymenth 2001, Přeložil M. Petříček. Analýza vzniku topologie (která v knize není diskutována) je relevantní a snad i podnětná v této souvislosti.

approach of the authors Gilles Deleuze and Felix Guattari in their well-known and thought-provoking book *What is Philosophy?*³⁰

30 — G. Deleuze, F. Guattari: Co je filosofie [What is Philosophy?], Oikoymenh 2001, Translated by M. Petříček. The analysis of the emergence of topology (which is not discussed in the book) is relevant and perhaps stimulating in this context.

The authors repeatedly speak about a struggle with chaos. From an extremely stimulating and relevant text for our work, we recall: *‘What defines thought in its three great forms – art, science, and philosophy – is always confronting chaos, laying out a plane, throwing a plane over chaos. But philosophy wants to save the infinite by giving it consistency: it lays out a plane of immanence that, through the action of conceptual personae, takes events or consistent concepts to infinity. Science, on the other hand, relinquishes the infinite in order to gain reference: it lays out a plane of simply undefined coordinates that each time, through the action of partial observers, defines states of affairs, functions, or referential propositions. Art wants to create the finite that restores the infinite: it lays out a plane of composition that, in turn, through the action of aesthetic figures, bears monuments or composite sensations. Damisch has analyzed accurately Klee’s picture “Equals Infinity.”*

The analysis of the origin of topology (which is not discussed in the book) is relevant and stimulating in that context. Without exaggeration, topology became one of the most influential directions in 20th century mathematics. This concept underlies many areas of contemporary mathematics: virtually every mathematical discipline has a topological aspect. For example, topological group theory studies groups of continuous transformations of some topological space. And with all this usage, mathematicians do not feel that the term is overused. As a rule, its use goes to the heart of the matter. But mathematics does not have a monopoly on topology. We also use it to refer to various aspects of our thinking in ordinary speech and in various fields. In fields ranging from physics and neuroscience to architecture and philosophy.³¹

31 — For architecture and urbanism see e.g., Topology (Ch. Girot, A. Freytag, A. Kirchendienst, D. Richter, eds.) Jovis Verlag 2013. The Nobel Prize in Physics was awarded in 2016 to a trio of physicists David Thouless, Duncan Haldane and Michael Kosterlitz for the exotic properties of solids that only change step-wise, which the authors explained using topology.

4. Existence of a Model, a Model without a Framework?

Let us reflect once again on the above-mentioned quote by H. Poincaré: *‘It is impossible to picture empty space. All our efforts to imagine pure space from which the changing images of material objects are excluded can only result in a representation in which highly-coloured surfaces, for instance, are replaced by lines of slight colouration, and if we continued in this direction to the end, everything would disappear and end in nothing. Hence arises the irreducible relativity of space.’*

An empty space, or rather a framework in our conception... Not an empty set, but the emptiness of a relationship and the absence of ‘changing representations of material objects’. The emptiness dissolves into an uncontrolled infinite nothingness. On the other hand, if we try to find a universal space, or a space that would encompass all

získala referenci: rozvrhuje rovinu alespoň neurčitých souřadnic, která působením částečných pozorovatelů vždy definuje stavy věcí, funkce či referenční výroky. Umění chce tvořit konečnost, která vrací nekonečno: vytyčuje rovinu kompozice, jež působením estetických figur nese monumenty či složené počítky. Damisch velmi přesně analyzoval Kleeův obraz „Vyrovnej se nekonečnu“.

Bez nadsázky se topologie stala jednou z nejvlivnějších směrů matematiky 20. století. Tento pojem je v pozadí mnoha oblastí současné matematiky: v podstatě každá matematická disciplína má topologickou stránku. Tak např. topologická teorie grup zkoumá grupy spojitých transformací nějakého topologického prostoru. A při všem tomto používání nemají matematikové pocit, že je pojem nadužívaný. Zpravidla jeho použití jde k jádru věci. Ale matematika nemá monopol na topologii. Označujeme tak v běžné mluvě i v rozličných oblastech také různé aspekty našeho uvažování. V nejrůznějších oblastech od fyziky a neurologii, přes architekturu po filozofii.³¹

31 — Pro architekturu a urbanismus viz např. Topology (Ch. Girot, A. Freytag, A. Kirchendienst, D. Richter, eds.) Jovis Verlag 2013. Nobelova cena za fyziku byla udělena v roce 2016 trojici fyziků David Thouless, Duncan Haldane a Michael Kosterlitz za exotické a skokově se měnící vlastnosti pevných látek, které autoři vysvětlili pomocí topologie.

4. Existence modelu, model bez rámce?

Zastavme se ještě jednou u výše zmíněného citátu H. Poincarého: „*Je zcela nemožné zobrazit prázdný prostor. Veškeré naše úsilí, představit si čistý prostor, ze kterého jsou vyloučena proměnlivá zobrazení hmotných objektů, může pouze vyústit v zobrazení ve kterém například bohatě barevně zářící povrchy jsou nabrzeny lehce zbarvenými liniemi. Když budeme tímto způsobem pokračovat všechno se rozplyne do nekonečné nicoty. Z toho vyplývá neredukovatelná relativita prostoru.*“

Prázdný prostor nebo spíše rámec v našem pojetí... Nikoliv prázdná množina, ale prázdnota vztahu a absence „proměnlivých zobrazení hmotných objektů“. Prázdnota se rozplyne do nekontrolované nekonečné nicoty. Na druhé straně, jestliže se pokoušíme najít univerzální prostor, nebo prostor, který by zahrnoval všechny možné prostory, potom vidíme, že vlastnosti takového prostoru musí být nutně málo specifické a vyprázdněné od jakýchkoliv zvláštností a specifických jevů. Vyprázdnění, bez vlastností, jen množina (jako abstrakce „něčeho“). Jak takový prostor může vypadat? Před takovou otázkou asi Hausdorff stál. Nespočítatelně kosmosů v chaosu bez vlastností. Pojem množiny a rozvinutí Cantorovy práce přišlo jako na zavolanou. Topologický prostor, definovaný pouze pomocí nestruturovaných množin „bez vlastností“ Poskytl rámec, který dřívějším generacím unikal. Množinová topologie je oním střechovým pojmem pro abstraktní prostor, který se hledal po dlouhou dobu (zajisté již od B. Riemanna).

Ale každá věc má svou cenu: vnitřní struktura prostorů založených jenom na teorii množin je prázdná, stejně jako vlastnosti množin samotných. Navíc, protože

possible spaces, then we see that the properties of such a space must necessarily be less specific and emptied of any peculiarities and specific phenomena. An emptying, without properties, just a set (as an abstraction of ‘something’). What can such a space look like? This is the question Hausdorff was probably facing. Countless cosmoses in chaos without properties. The concept of a set and the development of Cantor’s work came just in the nick of time. A topological space defined only by unstructured sets ‘without properties’ provided a framework that earlier generations failed to notice. Point-set topology is that umbrella term for an abstract space that has been sought for a long time (certainly since B. Riemann’s time).

But each thing has its value: the internal structure of spaces based only on set theory is empty, as are the properties of sets themselves. Moreover, because topological spaces refer per se only to sets, and because one must require that these sets be infinite (because otherwise we do not get a full-fledged theory), in other words we need actual infinite sets. But this brings us back to the beginning, to the question of whether we should allow this step.

From this scepticism, Structure Theory (as a set with added information) developed in the 1950s and became an influential and intensively researched mathematical direction. So let us turn our attention to philosophy and art. How topology manifests itself there.

C. The Inside and Outside of Abstraction

When in 1975 Michel Foucault in an interview for *Nouvelles littéraires* said: *‘I am a cartographer’* (*Nouvelles littéraires*, 17 March 1975), he named the complex process of layering the planes in which we see the world. When we have been trying to understand him in a new way since the mid-1960s until today, we can say that it appears to us as a set of surfaces. In these planes of surfaces, events and things appear in the form of a diagram of forces.³²

32 — ‘The forces appear in “every relation from one point to another: a diagram is a map, or rather several superimposed maps”. And from one diagram to the next, new maps are drawn. Thus, there is no diagram that does not also include, besides the points which it connects up, certain relatively free or unbound points, points of creativity, change and resistance, and it is perhaps with these that we ought to begin in order to understand the whole picture.’ (Deleuze G., *Od Archivu k diagramu* [From Archive to Diagram], in Gilles Deleuze, Foucault, Hermann a synové, Praha, 1996, pp. 67–68)

To understand an image, according to Deleuze, is to think *of the line of the outside*, which is without beginning and end, a line that passes through all the points of resistance, that rumbles with the collisions of diagrams, one against the other. This is how the theme of an image appears in general today. In a study dedicated to Foucault, Deleuze focused on 1968. *‘And what a strange twist of the line was 1968, the line with a thousand aberrations! From this we can get the triple definition of writing: to write is to struggle and resist: to write is to become; to write is to draw a map.’*³³ We can broadly compare the poetics of

33 — Ibid.

topologické prostory se per se odkazují pouze na množiny a protože se musí požadovat, aby tyto množiny byly nekonečné (protože jinak nedostaneme plnohodnotnou teorii), jinak řečeno potřebujeme aktuální nekonečné množiny. Ale tím se zase dostáváme na začátek k otázce zda tento krok máme připustit.

Z této skepse se v 50tých letech vyvinula Teorie Struktur (jako množin s přidáním informací), která se stala vlivným a intenzivně zkoumaným matematickým směrem. Obrátme tedy pozornost k filozofii a umění. Jak se topologie projevuje zde.

C. Vnějšek a vnitřek abstrakce.

1. události roku 1968 a téma: myslet jinak.

Když roku 1975 Michel Foucault řekl v rozhovoru pro *Nouvelles littéraires*, „*Jsem kartograf*“ (*Nouvelles littéraires*, 17. 3. 1975) pojmenoval složitý proces vrstvení rovin, ve kterých se nám svět jeví. Když se mu od poloviny šedesátých let dodnes pokoušíme nově porozumět, můžeme říct, že se nám naskýtá jako množina povrchů. V těchto rovinách povrchů se události a věci jeví v podobě diagramu sil.³²

32 — Síly se objevují v „každém vztahu jednoho bodu k druhému: diagram je mapa, nebo spíš několik na sebe položených map. A od jednoho k druhému se kreslí mapy nové. Neexistuje diagram, který by sám vedle bodů, které spojuje nezahrnoval určité relativně volné, nespoutané body, body tvořivosti, změny a odporu.; a snad právě těmi bychom měli začít chceme-li porozumět celému obrazu“. (Deleuze G., *Od Archivu k diagramu*, in Gilles Deleuze, Foucault, Hermann a synové, Praha, 1996, s. 67–68)

Porozumění obrazu podle Deleuze znamená přemýšlet o *linii vnějšku*, která je bez začátku a konce, o linii, která prochází všemi body odporu, která burácí srážkami diagramů, jednoho proti druhému. Tak se dnes téma obrazu jeví obecně. Deleuze se v studii věnované Foucaultovi soustředil na rok 1968. „*Jak podivným zákrutem této linie byl rok 1968, linie s tisíci odchylek! Můžeme od ní odvodit trojí definici psaní: psát znamená bojovat a klást odpor.; psát znamená stávat se.; psát znamená kreslit mapu.*“³³ Poetiku výtvarného umění můžeme rámcově srovnat s literárním psaním, pokud bereme v úvahu nepřevoditelnost textu a obrazu. Mapy, kterými se události výtvarného tvoření podobají literatuře jsou vyobrazeními trajektorií vedoucích od někde, někudy, někam v podobách a hranicích věčného návratu. Umělecká díla mapují svět, do kterého jsme se narodili, aniž bychom měli možnost získat představu o jeho skutečných hranicích, máme jen modely našeho vnímání dílčích pozicí a událostí. V roce 1968, jsme se setkali s rozsáhlou destrukcí dříve platných modelů (obdobně jak to předznamenaly události v desátých letech dvacátého století) ve prospěch zjevení „tisíců odchylek“. To, co se odehrálo roku 1968 byl souběh událostí ve veřejném životě, v politice, v myšlení obecně, ve filosofii a v umění, v objevování nových možností přistupovat

33 — (tamtéž)

visual arts with literary writing if we take into account the non-transferability of text and image. The maps that make the events of visual art creation resemble literature are depictions of trajectories leading from somewhere, through somewhere, to somewhere in the forms and boundaries of eternal return. Works of art map the world into which we are born, without us being able to know its real limits; we only have models of our perception of partial positions and events. In 1968, we witnessed a large-scale destruction of previously valid models (similarly to that foreshadowed by the events of the 1910s) in favour of the emergence of *'a thousand aberrations'*. In 1968 there was a confluence of events in public life, politics, thought in general, philosophy and art, in discovering new possibilities to approach complex topics of thought different from those represented by the dominant discourse. The nature of the situation was depicted by the concurrence of the contradictory meanings of public life at that time. While in politics, attitudes and opinions were heated in relation to the Prague Spring, culminating in the occupation of Czechoslovakia in August, while students in Paris were taking revolutionary stances, causing a revolutionary storm of opinions, and students in Yugoslavia were demonstrating their interest in extricating Yugoslavia from Soviet influence, and events such as the anti-Semitic campaign in Poland and the assassinations of Robert Kennedy and Martin Luther King intervened in the seemingly stable relations of the world's divided society, while the decisive battles were being fought in the Vietnam War and the struggle for regional independence of French-speaking society was being unleashed in Quebec, Canada, in art and philosophy, a process of fundamental change had been underway since the 1950s. Among the most important were apparently the spread of conceptual principles in visual arts, including (or along with) happenings, semiotics, primary structures, land and body art. The poetics of art in the 1960s saw the emergence of tendencies with a different focus than the external practice based on the legacy of the dominant trends of modernism and avant-garde. Instead of the style preferences of the fading functionalism and surrealism, experimentation came into play, reaching into the realms of mentality, the object, social reality, and systems of communication. A new role was played by the happening environment of the city and landscape. Such works and attitudes as represented by Jack Kerouac's prose *On the Road*, or Robert Smithson's exploration of the meaning of a bird's eye view of an airport, which he saw as a diagram, a passage, or an escape into another culture, became indicators of the new art. Through the efforts to interact with the landscape, more profound themes of perception and imagination of the happening world than its aesthetic conventions came to the fore. Reflections on the world ceased to be a matter of proven models of representation and aesthetic contemplation, and became much more a part of an epistemological experiment, part of an action.

Today, we understand this shift in attention and motivations better, as the entire horizon of our lives has shifted from an elaborate system of relations of sensuality and abstraction in classical manifestations of art to the virtual landscape of computer-generated data mediating the interaction of sensory and abstract data of thought with the demands for a far more complex mode. In 1968 it was different, to make the invisible visible, to draw extra-artistic reality into art in a new way, to find the inside

ke komplexním tématům jiného myšlení, než představoval převládající diskurz.. Povahu situace ukazoval souběh protikladných významů tehdejšího veřejného života. Zatímco v politice se hrotily postoje a názory ve vztahu k pražskému jaru ústící s srpnovou okupací Československa, zatím co studenti v Paříži zaujali revoluční postoje a způsobili revoluční názorovou bouři a studenti v Jugoslávii demonstrovali své zájmy vymanit Jugoslávii ze Sovětského vlivu, a do zdánlivě stabilních vztahů rozdělené společnosti světa zasáhly události, jakými byla antisemitská kampaň v Polsku, vraždy Roberta Kennedyho a Martina Luthera Kinga, zatím co probíhaly rozhodující boje ve Vietnamské válce a v kanadském Quebecu se rozpoutal boj o regionální samostatnost francouzsky mluvící společnost, v umění a ve filosofii již od padesátých let probíhal proces fundamentálních změn. Mezi ty nejdůležitější zjevně patřilo rozšíření konceptuálních principů ve výtvarném umění, včetně a nebo spolu s happeningy, sémiotikou, primárními strukturami, s land artem a body artem. V obrazech poetiky umění šedesátých let přicházely ke slovu tendence jinak zaměřeného umění, než byla vnější praxe vycházející z dědictví dominantních směrů moderny a avantgardy. Místo stylových preferencí dozrívajícího funkcionalismu a surrealismu ke slovu přicházel experiment, zasahující do oblastí mentality, do oblasti subjektu, do oblasti sociální skutečnosti, do systémů komunikace. Novou roli zde sehrálo dějící se prostředí města a krajiny. Ukazatelem nového umění se staly taková díla a postoje jaké představovala próza Jacka Kerouaca *On the Road*, či objevování významu pohledu Roberta Smithsona na letiště, které z ptáčích perspektiv vnímal jako diagram, přechodu, či útěku do jiné kultury. Povrchem úsilí o interakci s krajinou přicházely ke slovu hlubší motivy vnímání a představ dějícího se světa než byly jeho estetické konvence. Reflexe světa přestala být záležitostí ověřených modelů reprezentace a estetické kontemplace, ale stala se daleko více součástí epistemologického experimentu, součástí akce.

Dnes tomuto přesunu pozornosti a motivací lépe rozumíme, neboť celý horizont našeho života se posunul od vypracované soustavy vztahů smyslovosti a abstrakce v klasických projevech umění do virtuální krajiny počítačově generovaných dat zprostředkovávajících interakce smyslových a abstraktních dat myšlení s nároky daleko komplexnější modus. V roce 1968 tomu bylo jinak, činit neviditelné viditelným, nově vtáhnout mimoměleckou skutečnost do umění, nalézt ve vnějšku vnitřek se zdálo být, málo srozumitelným pouze jen odvážným apelem. A to i navzdory tomu, že myšlení nově otevřené do nekonečna, či při nejmenším do „tisíce plošin“ hledalo své nové způsoby orientace, nové mapy a nové kartografy. Souhrnně tento stav za celou generaci označil Deleuze názvy kapitol o Foucaultovi, *Topologie: „Myslet jinak“*. Velmi bychom celou situaci obratu v myšlení, který se odehrál v šedesátých letech zkreslili, kdybychom řekli, že cestou k jinému myšlení se v případě topologie stala abstrakce v konvenčním slova smyslu. V topologii nejde o redukci dat, a jejich sjednocování a transformaci v rámci uzavřené cesty od všemu k rozumu, ale o mnohem komplexnější proces mapování, ověřování, experimentu spočívajícího v událostech a akcích utváření diagramů a modelů a jejich vrhání zpět do nekonečně členitého dění života. Toto konstatování nemění nic na skutečnosti, že základní rolí topologie je ověřování možností abstrakce, možností nárokováných v komplexním významu, ve vztahu viditelného k neviditelnému, rozlišitelného k nerozlišitelnému, konečného k nekonečnému.

in the outside seemed to be little comprehensible, only a bold appeal. And this despite the fact that thinking, newly open to infinity, or at least to a 'thousand plateaus', was looking for new ways of orientation, new maps and new cartographers. Deleuze summarised this state of affairs for the entire generation in the names of his chapters on Foucault: Topology, 'Thinking Otherwise.'³⁴

34 — Deleuze, G., Topology: Thinking Otherwise, *ibid.*

We would greatly misrepresent the whole situation of the turn in thinking that took place in the 1960s if we said that the path to a different way of thinking in topology was abstraction in the conventional sense. Topology is not about data reduction and their unification and transformation within a closed path from perception to reason, but about a much more complex process of mapping, verification, experimentation consisting of events and actions of forming diagrams and models and their throwing back into the infinitely varied events of life. This statement cannot change the fact that the fundamental role of topology is to verify the possibilities of abstraction, the possibilities claimed in a complex meaning, in the relationship between the visible and the invisible, the distinguishable and the indistinguishable, the finite and the infinite.

The events of 1968 took many seemingly disconnected forms, and their relevance was affected by processes that until then had remained outside the mainstream preferences. They came into play in different places and in different activations of creative thought, but they can be summarised under Deleuze's notion of 'stratum or historical formation.' In this stratum of historical formation, a new mapping and discovering of previously insufficiently recognised motifs of creative thinking took place, some of which can now be seen as topological.

These events that come to the fore in the discussions of the Interdisciplinary Seminar of Topological Studies of Art, Landscape and Architecture, especially in close collaboration between the mathematician Jaroslav Nešetřil and the art historian Tomáš Vlček, includes the actions and reflections carried out by Tomáš Vlček in 1968 and in 1969. In 1968, a retrospective exhibition of Vojtěch Preissig's work was held at the Špála Gallery curated by Jindřich Chaloupecký³⁵, and in 1968 Vlček's land art actions took place, updating the themes of interactions between distinguishability and indistinguishability, polymorphism and symmetry.

35 — The exhibition was prepared by Tomáš Vlček at the Špála Gallery (and the New Hall), a gallery run by Jindřich Chaloupecký. The exhibition catalogue was published by Památník národního písemnictví [Museum of National Literature], Praha 1968. Vlček's actions are partially documented in the exhibition catalogue Tomáš Vlček, *Akce a fotografie* [Action and Photography], 1967–1971, Dům umění [House of Art] České Budějovice, 13. 8.–14. 9. 2008, exhibition curator Michal Škoda, the introductory study of the exhibition catalogue Jiří Valoch.

Události roku 1968 měly mnoho zdánlivě nesouvislých podob a do jejich významu se promítly procesy, které do té doby zůstávaly stranou většinově platných preferencí. Přicházely ke slovu na různých místech a v různých aktivacích tvůrčího myšlení, nicméně můžeme je shrnout pod Deleuzův pojem „Strata neboli historická formace“.³⁴ V této vrstvě historické formace došlo k novému mapování a objevování do té doby nedostatečně rozpoznávaných motivů tvůrčího myšlení, z nichž některé podstatné můžeme dnes chápat jako topologické.

Jedněmi z takových událostí, které přicházejí ke slovu v diskusích Interdisciplinárního semináře topologických studií umění, krajiny a architektury, zejména v užší spolupráci matematika Jaroslava Nešetřila a historika umění Tomáše Vlčka, jsou akce a reflexe uskutečněné Tomášem Vlčkem roku 1968, a roku 1969. V roce 1968 se uskutečnila retrospektivní výstava díla Vojtěcha Preissiga, ve Špálově galerii kurátorované Jindřichem Chalupěckým, roku 1968 se uskutečnily Vlčkovy land artové akce aktualizující motivy interakcí rozlišitelnosti a nerozlišitelnosti, polymorfismu a symetrie.³⁵

2. Zapomenutá vykročení k topologii.

Preissigova retrospektivní výstava roku 1968 měla široký ohlas a umožnila zahrnout do diskurzu dílo zdánlivě nesouvislých motivů, žánrů, forem přítomných v Preissigově díle. Preissig byl najednou pochopen jako někdo, kdo otevřel cestu k jinému umění, k jinému myšlení. (To bylo také důvodem proč sochař Stanislav Kolíbal, který se podílel na podobě a koncepci časopisu Výtvarné umění, dal Vojtěcha Preissiga na první místo v prezentaci dvou významných osobností českého umění, Františka Kupky a Vojtěcha Preissiga).³⁶

Výstava přispěla k obratu v umění konce šedesátých let, aniž by byl jasný vztah Preissiga k matematice nebo dokonce k topologii. Jedna z nejvýstižnějších recenzí výstavy napsaná Miroslavem Lamačem do Literárních novin byla nazvána, vzhledem k osudu Preissigova díla, jako *privatissimum*.³⁷

³⁴ — (Deleuze, G., Topologie: „Myslet jinak“ tamtéž).

³⁵ — Výstavu připravil Tomáš Vlček, ve Šalívě galerii (a Nové síni), v galerii řízené Jindřichem Chalupěckým. Katalog k výstavě vydal Památník národního písemnictví, Praha 1968. Vlčkovy akce částečně dokumentovány v katalogu výstavy „Tomáš Vlček, Akce a fotografie, 1967–1971, Dům umění České Budějovice, 13. 8. – 14. 9. 2008, kurátor výstavy Michal Škoda, úvodní studie katalogu výstavy Jiří Valoch

³⁶ — Výtvarné umění 1969, č. 7).

³⁷ — Lamač, M., Preissigovo *privatissimum*, Výtvarná práce, 1968)

2. Forgotten Start towards Topology

Preissig's retrospective exhibition in 1968 had a wide response and made it possible to include in the discourse the work of seemingly unrelated motifs, genres and forms present in Preissig's work. Preissig was suddenly seen as someone who opened the way to a different art, to a different way of thinking. (This was also the reason why the sculptor Stanislav Kolíbal, who was involved in the shaping and conceiving the *Výtvarné umění* [Fine Arts] magazine, put Vojtěch Preissig first when presenting important figures of Czech art, František Kupka and Vojtěch Preissig.)³⁶

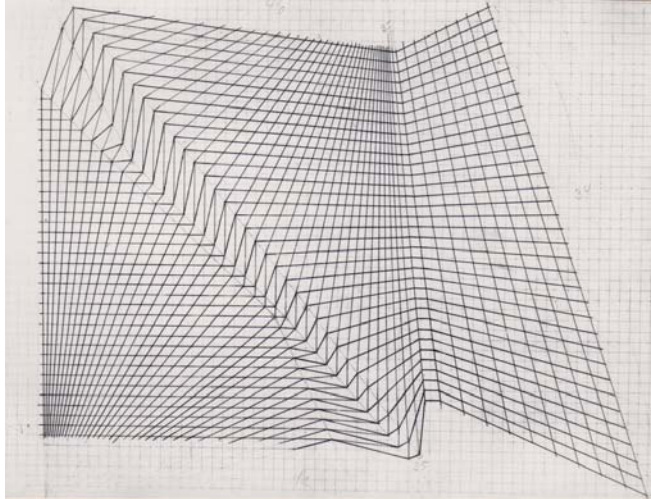
36 — *Výtvarné umění* 1969, No. 7.

The exhibition contributed to the turn in the art of the late 1960s, without making clear Preissig's relationship to mathematics or even topology. One of the most succinct reviews of the exhibition, written by Miroslav Lamač for *Literární noviny* [The Literary Newspaper], was described, due to the fate of Preissig's work, as *privatissimum*.³⁷

37 — Lamač, M., Preissig's *Privatissimum*, *Výtvarná práce* 1968).

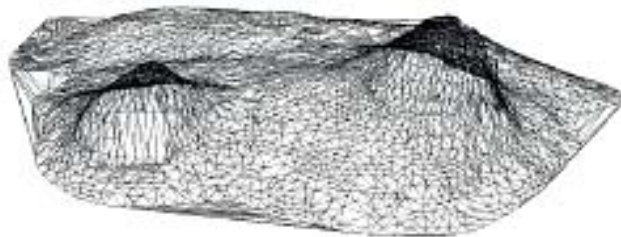
The first recognition of a more general importance of Preissig's work in the context of science came from the legendary director of London's Tate Gallery, Michael Compton. When he saw Preissig's works in the 1970s, thanks to Jiří Kotalík and Tomáš Vlček, he said: 'This is topology'. Preissig belonged to the generation born in the 1870s, a generation that played its part between the Impressionists and Cubists. The artists and theoreticians of this generation were newly trying to understand art in the context of science, whether they were Pointillists, Nabists, or others looking for relationships between thought, art and nature. Preissig was involved in visual art culture in Bohemia, France and the United States in the decades from the 1890s until his death in the Dachau concentration camp in 1944. Preissig, who was well-familiar with contemporary themes not only in art but also in science, had engaged in graphic design in the context of contemporary motifs of non-Euclidean geometry since his student days.

Based on his studies of natural structures, he considered graphic design to be a topic of interactions between what is geometric, what is in planar space and what differentiates or transcends geometry in multidimensional space. Already before 1900, he saw the surface and its elements as opportunities for transitions from nature to culture through the torsion of what occurs as a surface and what is expanded in the so-called three-dimensional space. In the circle of artists of the Stieglitz Gallery 291 on the 5th Avenue in New York City and in collaboration with Arthur W. Dow, the Dean of the Columbia University Teachers College, he developed his work as a reflection on the fourth dimension and in the context of Dow's search for a universal language of visual art. One piece of art from Preissig's rich production, which included photography along with graphic design and free graphics, is the project of



OBR. 24 Vojtěch Preissig, Zlomy a záhyby plošné struktury, (1932), kresba tuší na čtverečkováném papíře, soukromá sbírka

FIG. 24 Vojtěch Preissig, Fractures and Folds of Plane Structure, (1932), ink drawing on square paper, private collection



OBR. 25 Triangulace povrchu

FIG. 25 Surface triangulation (Wikipedia common)

the book titled *The House*, for which he designed his own typeface in 1914, notable for its use of a triangular form as the basis of a 'cubist' typeface, analogously to Poincaré's transfer of the representation of the terrain surface by means of an elementary triangular form. The triangle remained one of the elements of Preissig's use of structure as a subject for his drawings and graphics.

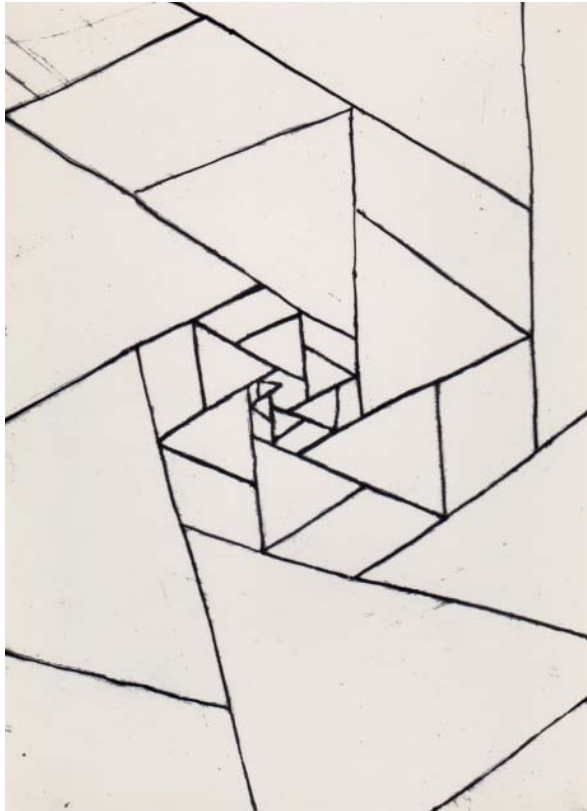
The relationship between element and system, calculus and chance, surface and space remained at the centre of Preissig's interest and resulted in the elaboration of topological motifs in works created both in the United States and in Prague, where he returned in 1931. It was a wide variety of alternatives ranging from the representation of a figure through the application of products of nature in collages and photographs, to a new conceptual evaluation of the elements of graphic expression, evaluation of the role of a point in the space of an almost immeasurable number of points and lines, used both in abstract graphic prints and in the theme of emotions and sets used in the illustrations of Verlaine's women in the years before 1935. At that time Preissig, as an active member of the Czechoslovak Academy of Sciences, was probably at least roughly acquainted with the new tendencies in mathematics spearheaded by Eduard Čech. Preissig always used all stimuli in his own way, regardless of convention and the resulting possibilities of understanding his efforts in the artistic discourse of the time, in which he described himself as a fanatic of independence. Of course, this also applied to the events of the time, even before his anti-fascist resistance, in terms of reflected trends in visual arts and art theory, which were in the spotlight in Prague at the time. It was Surrealism, with its dominant interest in the sexually motivated unconscious; it was approaches to a new concept of mass, flow, structures and vectors of creative movement, as presented by the tendencies towards the informal, and as suggested by theoretical interests in qualifying the role of the style of painting and sculpture in art history of Vojtěch Volavka. Efforts to understand and apply the plurality of phenomena in artistic creation, which took place in Prague in a manner similar to that of the then centre of artistic culture in Paris, were supported by the publication of Henri Focillon's book, *The Life of Forms*, which revived attention to Bergsonian duration, to the flow of forms without the convention of traditional constraints by the separate categories of time and space.³⁸

38 — Focillon, H., *La vie de la forme*, Paris 1934, in Czech *Život tvarů* [Life of Forms], S.V.U. Mánes, Praha 1935. The changes in science and worldview that took place in the second half of the nineteenth century in response to the critique of Newtonian solid-state physics contributed to the understanding of the theme of shape flow. In 1868 and 1871, Ernst Mach gave two lectures in Prague, published under the title *Die Gestalten der Flüssigkeit: Die Symmetrie*, published in book form in Prague in 1872. Ernst Mach then developed his knowledge of the relationship between physics and perception, emphasising the role of events, functions. See Marie Bayerová and Tomáš Vlček, *Kubismus, věda, filosofie: Korelace a inspirace*, [Cubism, Science and Philosophy – Relations and Inspirations] *Český kubismus* [Czech Cubism], Hatje, 1991, ed. J. Švestka and T. Vlček. The inspiration for creative thinking in Bohemia was the publication of Henri Bergson's works and the inclusion of Bergson's philosophy in the sources of Cubism, see Rudolf Procházka, *O podstatné proměně povahy naší doby* [On the Substantial Change in the Spirit of Our Time], *Umělecký měsíčník* [Artistic Monthly], I. and II. 1911 and 1912, pp. 80–83, 131–135, 212–218, 241–247. Procházka placed Bergson's philosophy among the three fundamental sources of the transformation of philosophical thought in modern times, alongside Nietzsche's negation of metaphysics and James's pragmatism.

První rozpoznání obecnějšího významu Preissigova díla v souvislostech s vědou učinil legendární kurátor londýnské Tate Gallery Michael Compton, když v sedmdesátých letech viděl díky Jiřímu Kotalíkovi a Tomáši Vlčkovi Preissigova díla, prohlásil „to je topologie“. Preissig patřil do generace narozené v sedmdesátých letech 19. století, generace která sehrála svou roli mezi generací impresionistů a generací kubistů. Umělci a teoretici této generace nově hledali porozumění umění v souvislostech vědy, ať už to byli pointilisté, nabisté, nebo další hledající vztahy mezi myšlením, uměním a přírodou. Preissig se zapojil do výtvarné kultury v Čechách, ve Francii a ve Spojených státech amerických v desetiletích sahajících od devadesátých let 19. století až do své smrti v koncentračním táboře v Dachau roku 1944. Preissig, který byl dostatečně obeznámen s dobovými tématy nejen umění, ale také vědy, již od doby svých studií se zabýval grafickým designem v souvislostech s dobovými motivy neukleidovské geometrie.

Na základě studií přírodních struktur vnímal grafický design jako téma interakcí toho, co je geometrické, co je v plošném prostoru a co geometrii odlišuje, či přesahuje ve více dimenzionálním prostoru. Již před rokem 1900 vnímal plochu a s ní její prvky jako příležitosti přechodů od přírody ke kultuře prostřednictvím torze toho, co se vyskytuje jako plocha s tím co je rozprostraněno v takzvaném třídimenzionálním prostoru. V okruhu umělců Stieglitzovy galerie 291 na 5. Avenue v New Yorku a ve spolupráci s děkanem Učitelké koleje Kolumbijské univerzity Arthurem W. Dowem pak rozvinul své dílo v duchu reflexi čtvrté dimenze a v souvislostech Dowova hledání univerzálního jazyka výtvarného umění. Jedním z děl bohaté produkce Preissigovy tvorby zahrnující vedla grafického designu také fotografii, volnou grafiku je projekt knihy *The House*, pro kterou v roce 1914 navrhl vlastní písmo pozoruhodné využitím trojúhelníkové formy jako základu „kubistického“ řešení písma analogicky Poincarově převodu zobrazení povrchu terénu prostřednictvím elementární trojúhelníkové formy. Trojúhelník zůstal jedním z prvků Preissigova uplatnění struktury jako tématu jeho kreseb a grafik.

Vztah prvku a systému, kalkulu a náhody, plochy a prostoru zůstal ve středu Preissigova zájmu a vyústil v rozpracování topologických motivů jak v dílech vzniklých ve Spojených státech tak v Praze, kam se vrátil roku 1931. Byla to široká varieta alternativ sahající od zobrazení figury až k uplatnění přírodnin v kolážích, ve fotografiích, a dále až k novému konceptuálnímu hodnocování prvků grafického projevu, zhodnocování role bodu v prostoru téměř nezměrného množství bodů a linií, využitých jak v abstraktních grafikách tak v tématu emocí a množin uplatněných v ilustracích Verlainových žen v letech před rokem 1935. V té době Preissig jako aktivní člen Československá akademie věd byl pravděpodobně alespoň orientačně seznámen s novými tendencemi v matematice, v jejichž čele stál Eduard Čech. Preissig vždy všechny podněty uplatnil po svém, bez ohledu na konvence a z toho vyplývající možnosti pochopení jeho úsilí v dobovém uměleckém diskurzu, ve kterém sám sebe označoval za fanatika neodvislosti. To se samozřejmě týkalo i toho, co bylo tehdy, ještě před jeho protifašistickým odbojem z hlediska reflektovaných trendů výtvarného umění a teorie umění, které se tehdy dostaly v Praze do středu pozornosti. Byl to surrealismus



OBR. 26 Vojtěch Preissig, Spirálové zavíjení trojúhelníků, (1914–1924), kresba tuší na papíře, soukromý archiv fotodokumentace Preissigova díla

FIG. 26 Vojtěch Preissig, Spiral Coiling Triangles, (1914–1924), ink drawing on paper, private archive photo documentation of Preissig's work

s dominantním zájmem o sexuálně motivované podvědomí, byly to přístupy k novému pojetí hromadnosti, k plynutí, strukturám a vektorům tvořivého pohybu, jak to prezentovaly tendence směřující k informelu a jak to naznačovaly teoretické zájmy o kvalifikování role rukopisu malby a sochy v uměnovědném díle Vojtěch Volavka. Snahy o pochopení a uplatnění plurality jevů ve výtvarném tvoření, ke kterým docházelo v Praze obdobně jako v tehdejšímu centru výtvarné kultury v Paříži, byly podpořeny vydáním knihy Henri Focillona, *Život tvarů*, která aktualizovala pozornost k bersonovskému trvání, k plynutí forem bez konvencí tradičního omezení oddělenými kategoriemi času a prostoru.³⁸

Navzdory těmto předznamenáním nových tendencí tvůrčího myšlení politické události tvrdě zasáhly do vývoje kultury v meziválečném Československu a Preissig se stal jejich obětí, nejen sám o sobě, ale s ním také jeho dílo. Po řadu desetiletí chybělo k jeho dostatečnému pochopení a uchování uplatnění topologických motivů, které ve své tvorbě objevoval. Prvním krokem k novému pochopení Preissiga jako představitele jiného myšlení znamenala retrospektiva Preissigova díla připravená kurátorem Památníku národního písemnictví v Praze roku 1968. Preissig patřil do širokého společenství umělců a teoretiků, kteří usilovali o nové využití a spojení vědeckého poznání s uměleckou praxí a to zejména prostřednictvím stupňujícího se podílu abstrakce na utváření forem a významů abstraktního umění. V této tendenci sehrálo významnou roli umění a teorie umění střední Evropy. V této souvislosti je třeba připomenout dílo rakouského historika umění Aloise Riegla, uměnovědce, který analyzoval proces abstrakce ve výtvarném umění.³⁹

Roku 1899 rok po Preissigově přesídlení do Paříže Alois Riegl publikoval slavný článek o ladění jako novém obsahu moderního umění, ve kterém definoval změny ve vztazích mezi uměním a vědou v moderní době.⁴⁰ Riegl přispěl k převratnému rozpoznání role abstrakce ve vývoji tvůrčího, specificky

38 — Focillon, H., *La vie de la forme*, Paris 1934, česky *Život tvarů*, S.V.U. Mánes, Praha 1935 K chápání tématu tvarového plynutí přispěly změny ve vědě a světovém názoru, které se v druhé polovině 19. století odehrávaly na téma kritiky newtonovské fyziky pevných těles. Roku 1868 a roku 1871 Ernst Mach přednesl v Praze dvě přednášky publikované pod titulem *Die Gestalten der Flüssigkeit: Die Symmetrie*, knižně vydané v Praze roku 1872. Ernst Mach pak rozvinul své poznání vztahů fyziky a vnímání se zdůrazněním role dění, funkcí. Viz Marie Bayerová, a Tomáš Vlček, *Kubismus, věda, filosofie: Korelace a inspirace, Český kubismus*, Hatje, 1991, ed. J.Švestka a T.Vlček, *Inspirací pro tvůrčí myšlení v Čechách* znamenalo vydávání děl Henri Bergsona a zařazení Bergsonovy filosofie do pramenů kubismu, viz Rudolf Procházka, *O podstatné proměně povahy naší doby*, *Umělecký měsíčník*, I. a II. 1911 a 1912, s.80–83, 131–135, 212–218, 241–247. Procházka zařadil Bergsonovu filosofii mezi tři základní zdroje proměny filosofického myšlení moderní doby vedle Nietzscheovy negace metafyziky a Jamesova pragmatismu.

39 — Vojtěch Preissig, návrh ilustrací ke sbírce básní Paul Verlaina, *ŽENY*, (1932) Fotodokumentace Preissigova díla, soukromý archiv

40 — Riegl, A. *Stimmung als Inhalt der modernen Kunst*, *Graphische Künste XXII*, 1899, s. 47 a dále. Podle Riegla vztahy umění a vědy se v moderní době neodehrávají jen na bázi kontemplace, ale jsou záležitostí kombinací umění, vědeckého poznání spolu s psychicky založenými afekty. Svým pojetím umění jako procesu vyrovnávání zdánlivě nespojitelné inspiroval nejen své současníky, ale anticipoval proměny a způsoby tvůrčího myšlení daleko do budoucnosti. Neboť jak k Rieglově spisu *Spätromische Kunstindustrie* poznamenal Walter Benjamin, „...každý velký vědecký objev znamená revoluci v metodě“

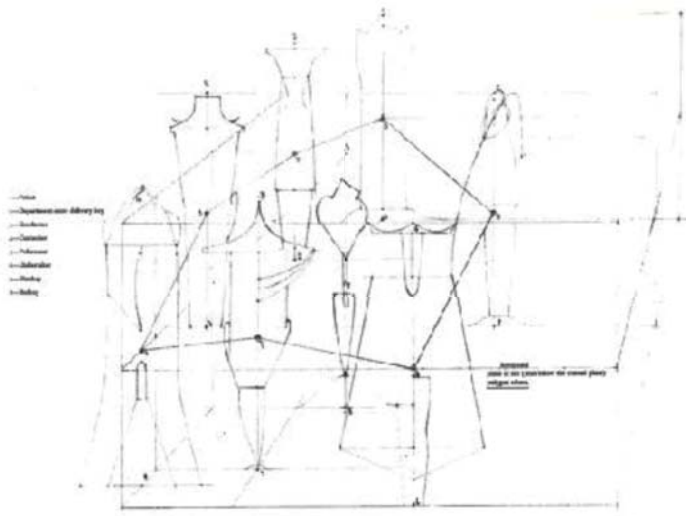
Despite these harbingers of new tendencies in creative thinking, the political events hit hard at the development of culture in interwar Czechoslovakia, and Preissig became their victim – not only himself but also his work. It took many decades before he was rightly understood, and the topological motifs he explored in his work were applied and maintained. The first step towards a new understanding of Preissig as a representative of a different mindset was the retrospective exhibition of Preissig's work prepared by the curator of the Museum of National Literature in Prague in 1968. Preissig belonged to a broad community of artists and theoreticians who sought to make new use of and connect scientific knowledge with artistic practice, especially through the increasing proportion of abstraction in the shaping of the forms and meanings of abstract art. Central European art and art theory played a significant role in this tendency. In this context, the work of the Austrian art historian and art scholar Alois Riegl, who analysed the process of abstraction in visual arts, should be mentioned. ³⁹

39 — Vojtěch Preissig, illustrations proposed for Paul Verlain's collection of poems, *WOMEN*, (1932) Photo documentation of Preissig's work, private archive.

In 1899, a year after Preissig moved to Paris, Alois Riegl published his famous article on attunement as a new content of modern art, in which he defined changes in the relationship between art and science in modern times.⁴⁰ Riegl contributed to the revolutionary recognition of the role of abstraction in the development of creative, specifically artistic thinking. He defined principles within which changes in style in visual arts took place, contributing to the emancipation of the phenomenon of surface (optical – abstractly higher versus haptic – abstractly lower), to overcoming fragmentation through the concept of attunement and the perception of the multiplicity of phenomena. According to Riegl, in groups, individual phenomena come to the level of opinion, 'they become uncluttered.' Riegl's *Das holländische Gruppenporträt*⁴¹ represents one of the outcomes of Riegl's concept of a group as a theoretically justified approach to society as a set of its members. Riegl's concept is so thorough that it consequently opens up the theme of an image, as a theme of transcendence defined by the individual depicted persons, and opens up the perception of an image as a perception of a social reality that transcends the given representation within the defined frame of the image.

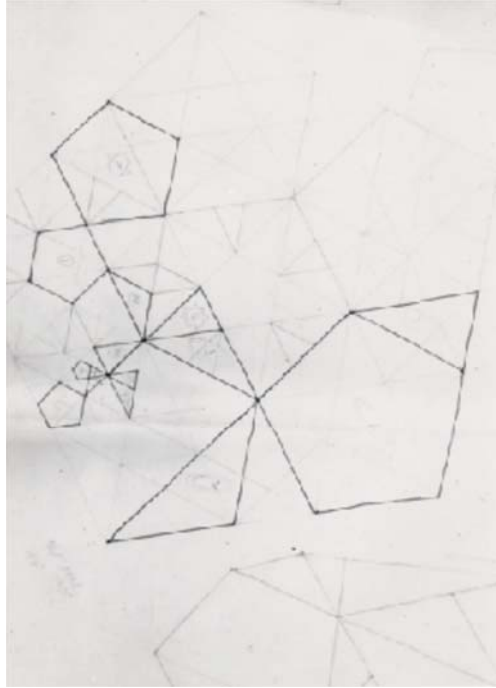
40 — Riegl, A. *Stimmung als Inhalt der modernen Kunst*, *Graphische Künste* XXII, 1899, p. 47 and onwards. According to Riegl, the relations between art and science in modern times do not take place only on the basis of contemplation, but are more about combining art, scientific knowledge together with psychologically-based emotions. With his conception of art as a process of balancing the seemingly incompatible, he not only inspired his contemporaries but anticipated transformations and modes of creative thought far into the future. As Walter Benjamin commented on Riegl's *Spätromische Kunstindustrie*: '...every great scholarly discovery portends a revolution in method.'

41 — Riegl, A., *Das holländische Gruppenporträt*, *Jahrbuch der allerhöchsten Keisserhauses* 22, (1902), pp. 71–278.



OBR. 27 Marcel Duchamp, Cimetiere des uniformes et Livres, 1913, publikováno v knize La Boite verte, 1934

FIG. 27 Marcel Duchamp, Cimetiere des Uniformes et Livres, 1913, published in the book La Boîte verte, 1934



OBR. 28 Vojtěch Preissig, Rozklad a sklad trojúhelníkové a pětiúhelníkové struktury (1922–1932), kresba tuší, snímek ze soukromého archivu díla Vojtěcha Preissiga

FIG. 28 Vojtěch Preissig, Analysis and synthesis of triangular and pentagonal structure (1922–1932), Indian ink, print from private archive of Vojtěch Preissig's work

uměleckého myšlení. Definoval principy, mezi kterými se uskutečnily proměny stylu ve výtvarném umění, při čemž přispěl k emancipaci fenoménu plochy (optické – abstraktně vyšší versus haptické abstraktně nižší), k překonání fragmentárnosti pojetím ladění a vnímáním hromadnosti jevů, Podle Riegla, v grupách se jednotlivé jevy dostávají do roviny názoru, „stávají se přehlednými“ Rieglův spis *Das holländische Gruppenporträt*⁴¹ představuje jedno z vyústění Rieglova pojetí grupy jako teoreticky zdůvodněného přístupu ke společnosti jako k množině jejich členů. Rieglovo pojetí je tak důkladné, že konsekventně otevřelo téma obrazu, jako téma překročení vymezené jednotlivými zobrazenými osobami a otevírá vnímání obrazu jako vnímání sociální skutečnosti, která překračuje dané zobrazení ve vymezeném rámu obrazu.

41 — Riegl, A., *Das holländische Gruppenporträt*, Jahrbuch der allerhöchsten Kaiserhauses 22, (1902), s. 71–278

Riegl uplatnil neobyčejný cit pro aktuální otázky umění jako klíčové disciplíny kultury a poznání. Jestliže formalistická estetika střední Evropy století soustředila pozornost na roli abstraktního tvaru, Riegl definoval proces abstrakce ve vztahu k tématu překonávání fragmentů na cestě k uplatnění harmonického ladění. Počítky, na které se soustředila pozornost fyziologie by nemohly nově otevírat téma umění, kdy nebyly promítány do roviny událostí definovaných novým poznáním a jeho teoreticky, abstraktně definovanou strukturou. Alois Riegl jako příklad začlenění fragmentu do struktury uměleckého vyjádření uvedl dobové malby Maxe Liebermanna uplatňující barevnou skvrnu jako prostředek výrazu ve vztahu k významově názornému „ladění“ celého obrazového pole a potažmo k souvislostem psychické interakce s celou skutečností. Instrument ladění, který Riegl uvedl do teorie umění kolem roku 1900 byl analogií výrazného uplatnění fenoménu „ladění“ přesahujícího výtvarnou tvorbu samotnou a to především v hudbě a s hudbou související poezie symbolismu.

Strukturální analýza takového magického díla symbolistní poezie jaké představuje básnická tvorba českého literáta a kritika umění Karla Hlaváčka pak vyzdvihla, jak tomu bylo v studii Jana Mukařovského o Karlu Hlaváčovi⁴² roli fonémů spojených s hláskami l, jako základního prvku struktury výrazu a geneze významu jeho jedinečné poezie. Role interakcí fragmentu a celku sice patří k základům poetiky každého uměleckého vyjádření, ale její nová aktualizace v moderním umění otevírá problematiku nového pohledu na skutečnost, zahrnující do vidění a vnímání bezprostředně názorného zejména to, co se zjevuje a působí v rovině abstrakce. Definování teorie pole a uplatnění

42 — (Jan Mukařovský... citováno podle Vlček, T, *Velká lyra českého symbolistního básníka, proletáře Karla Hlaváčka*, Umění, roč. XXIII 1975, s. 311)

Riegl showed an extraordinary sensitivity to the then issues of art as a key discipline of culture and knowledge. If the formalist aesthetics of Central Europe focused its attention on the role of abstract form, Riegl defined the process of abstraction in relation to the theme of overcoming fragments on the way to the application of harmonious attunement. The sensations on which physiology focused its attention could not newly open the subject of art as they were not projected onto the plane of events defined by the new knowledge and its theoretically, abstractly defined structure. As an example of the incorporation of a fragment into the structure of artistic expression, Alois Riegl cited the period paintings of Max Liebermann, using a colour stain as a means of expression in relation to the meaningfully illustrative 'attunement' of the entire image field and thus to the context of psychological interaction with the entire reality. The instrument of attunement, which Riegl introduced into art theory around 1900, was analogous to the distinctive application of the phenomenon of 'attunement' that goes beyond visual arts, especially in music and the music-related poetry of symbolism.

The structural analysis of such a magical work of symbolist poetry as represented by the poetic work of the Czech writer and art critic Karel Hlaváček then highlighted, as in Jan Mukařovský's study of Karel Hlaváček,⁴² the role of phonemes associated with l sounds as a basic element of the structure of expression and the genesis of the importance of his unique poetry. Although the role of interaction between the fragment and the whole belongs to the foundations of the poetics of any artistic expression, its new revival in modern art opens up the problem of a new perspective of reality, including in the vision and perception of the immediately visible especially that which appears and acts in the plane of abstraction. Defining field theory and applying the elements and principles of topology in postmodern discourse allows for a deeper understanding of the newly manifested and applied contexts in the fields and disciplines of creative cognition usually appearing as isolated to the theory of art. The motifs behind such efforts to update the contexts manifested by combinations of art, science and emotions, as defined by Riegl in connection with the theme of attunement, are among the fundamental motifs of modern and post-modern art. Reduced elements in the works of poetry, where phonemes become graphemes in figurative attunement, are represented, for example, by the German writer Christian Morgenstern's poem 'Fish's Night Song' and many other manifestations in which, based on the formation of an abstract plane, a plane of attunement, the visual, linguistic or acoustic elements are applied, creating interactions of new possibilities of artistic message in the plane of abstraction.

42 — Jan Mukařovský, cited by Vlček, T. *Velká lyra českého symbolistního básníka, proletáře Karla Hlaváčka*, *Umění*, vol. XXIII, 1975, p. 311.

prvků a principů topologie v postmoderním diskurzu umožňuje prohloubit porozumění nově se projevujícím a uplatňujícím souvislostem v oblastech a disciplínách tvůrčího poznání většinou se teorií umění naskýtajících jako izolované. Motivy takových snah o aktualizaci souvislostí projevujících se kombinacemi umění, vědy a afektů, jak je definoval Riegl v souvislostech s tématem ladění, patří k základním motivům moderního a postmoderního umění. Redukované prvky v dílech poesie, kdy se v obrazném ladění z fonémů stávají grafémy například představuje báseň německého literáta Christiana Morgensterna Noční rybí zpěv a řada dalších projevů, ve kterých na základě utváření abstraktní roviny, roviny ladění dochází k uplatnění vizuálních, jazykových nebo akustických prvků vytvářejících v rovině abstrakce interakce nových možností uměleckého sdělení.

3. Abstraktní kartografie a další podněty land-artu.

Vrátíme-li se zpět k roku 1968 pak by neměla být přehlédnutá programová studie napsaná Robertem Smithsonem publikovaná v Artforu roku 1968.⁴³ Smithson v roce 1968 charakterizoval proměnu poetiky umění, která představovala otevření diskurzu do nových dimenzí, ve kterých tvůrčí myšlení se obrátilo k řadě oblastí poznání v šíři, v mnohém podobné cestám abstrakce aktualizované topologií.

43 — Smithson, R., 'A Sedimentation of the Mind. Earth Project, Artforum, September 1968, na dnešní aktuálnost Smithsonova díla a textu se soustředila výstava uskutečněná v Newyorské Mariaan Goodman Gallery, otevřená ve dnech 24. 6.–20. 8. 2021 pod názvem Robert Smithson, Abstract Cartography.

V úvodu své studie Smithson napsal: *The earth's surface and the figments of the mind have a way of disintegrating into discrete regions of art. Various agents, both fictional and real, somehow trade places with each other – one cannot avoid muddy thinking when it comes to earth projects, or what I will call 'abstract geology.' One's mind and the earth are in a constant state of erosion, mental rivers wear away abstract banks, brain waves undermine cliffs of thought, ideas decompose into stones of unknowing, and conceptual crystallizations break apart into deposits of gritty reason. Vast moving faculties occur in this geological miasma, and they move in the most physical way. This movement seems motionless, yet it crushes the landscape of logic under glacial reveries. This slow flowage makes one conscious of the turbidity of thinking. Slump, debris slides, avalanches all take place within the cracking limits of the brain. The entire body is pulled into the cerebral sediment, where particles and fragments make themselves known as solid consciousness. A bleached and fractured world surrounds the artist. To organize this mess of corrosion into patterns, grids, and subdivisions is an esthetic process that has scarcely been touched.*

3. Abstract Cartography and Other Landart Initiatives

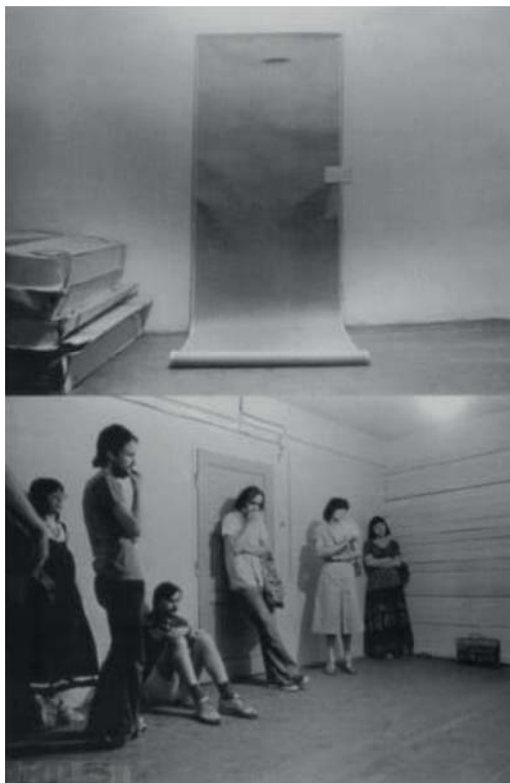
Going back to 1968, the programmatic study written by Robert Smithson and published in *Artforum* in 1968 should not be overlooked.⁴³ In 1968, Smithson characterised the transformation of the poetics of art, and it opened the discourse to new dimensions in which creative thinking addressed a whole range of areas of knowledge in such a breadth that was in many ways similar to the paths of abstraction revived by topology.

43 — Smithson, R.,
A Sedimentation of the Mind. Earth
Project, *Artforum*, September
1968. The contemporary relevance
of Smithson's work and text is
the focus of an exhibition at New
York Marian Goodman Gallery,
opened 24 June – 20 August 2021
entitled Robert Smithson, *Abstract
Cartography*.

In the introduction to his study, Smithson wrote: The earth's surface and the figments of the mind have a way of disintegrating into discrete regions of art. Various agents, both fictional and real, somehow trade places with each other – one cannot avoid muddy thinking when it comes to earth projects, or what I will call 'abstract geology.' One's mind and the earth are in a constant state of erosion, mental rivers wear away abstract banks, brain waves undermine cliffs of thought, ideas decompose into stones of unknowing, and conceptual crystallizations break apart into deposits of gritty reason. Vast moving faculties occur in this geological miasma, and they move in the most physical way. This movement seems motionless, yet it crushes the landscape of logic under glacial reveries. This slow flowage makes one conscious of the turbidity of thinking. Slump, debris slides, avalanches all take place within the cracking limits of the brain. The entire body is pulled into the cerebral sediment, where particles and fragments make themselves known as solid consciousness. A bleached and fractured world surrounds the artist. To organize this mess of corrosion into patterns, grids, and subdivisions is an esthetic process that has scarcely been touched.

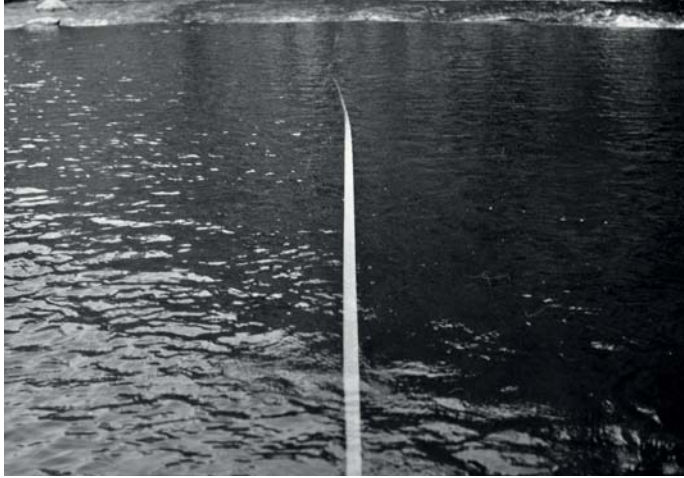
Smithson introduced motifs of such art that aimed at newly applying free interactions of themes, methods and modes of expression, going beyond the categories created in the history of art and their art-historical reflection. In his text, Smithson not only included the tendencies and works of other land-artists, especially Michael Heizer, Walter de Maria, Dennis Oppenheim and others, but attempted to include in the totality of art such disparate elements and systems as the confrontation of geometry and biological decomposition, linguistic analysis, and the meaning of the finitude of individual human existence. He argued for a parallax perspective combining views from different perspectives in which natural materials and substances become maps and diagrams with anti-illusory landscape objects.

Smithson's programmatic text made his principles of 'abstract cartography' relevant against the background of both, on the basis of criticism of existing concepts of modern art and the motifs coming into the creative discourse from other disciplines, especially psychology. *A Sedimentation of the Mind* picked up on the motifs of projections depicting and analysing brain functions as topological maps. The United States, where land art originated, was and remains an environment where



OBR. 29 Karel Miler, Koncert C. Santany Welcome, Praha 31. 5. 1979, fotografie z archivu umělce, doplněná přípisem: „V malé místnosti, oddělené od publika rolí hladkého papíru visícího na dveřích jako závěs, jsem přehrál z magnetofonového záznamu třikrát za sebou nahranou skladbu C. Santany Welcome. Během celé přehrávky jsem stříhal bankovky na tenké proužky a vyhazoval je ven štěrbínou v závěsu“, Karel Miler

FIG. 29 Karel Miler, Carlos Santana concert 'Welcome', Prague 31. 5. 1979, photo from authors archive ecompanied by commentary: 'In a small room, separated from public by a paper roll hanging on door as a curtain, I played Carlos Santana tape "Welcome", while cutting banknotes on narrow strips and pushing them throw narrow hole in the courtain', (Karel Miler)



OBR. 30 Tomáš Vlček, Akce vyznačování osy nerozlišitelného vlnění na povrchu říčního toku. Srpen, 1969. Pruh osvětleného filmového svitku unášený proudem vody. Jez na řece Malši před korytem náhonu Kozákova mlýna

FIG. 30 Tomáš Vlček, The action of marking the axis of indistinguishable waves on the surface of a river flow. August, 1969. A strip of an illuminated film roll carried by the water current. Weir on the river Malša in front of the riverbed of the Kozák's Mill

Smithson uvedl motivy umění, které směřovalo k novému uplatnění svobodných interakcí námětů, metod a způsobů vyjadřování přesahujících kategorie vytvořené v dějinách umění a jejich umělecko-historickou reflexí. Smithson nejen zahrnul do svého textu tendence a díla dalších land-artistů přede všemi Michaela Heizera, Waltera de Maria, Dennise Oppenheima a dalších, ale pokusil se zahrnout do celistvosti umění tak odlišné prvky a systémy jaké představují konfrontace geometrie a biologického rozkladu, jazykové analýzy a význam konečnosti individuální lidské existence. Argumentoval paralaktickou perspektivou kombinující pohledy z různých hledisek, ve kterých se přírodní hmoty a materiály stávají mapami a diagramy se stávají antiiluzivními krajinnými objekty.

Smithsonův programový text činil jeho principy „abstraktní kartografie“ aktuálními na pozadí obojího, na základě kritiky existujících konceptů moderního umění a na základě motivů přicházejících do tvůrčího diskurzu z jiných disciplín, zejména ze strany psychologie. Sedimentace myslí navázala na motivy projekcí znázorňujících a analyzujících mozkové funkce jako topologické mapy. Spojené státy, ve kterých land art vznikl, byly a zůstaly prostředím, kde akademicko-terapeutické iniciativy evropského původu se staly pragmaticky rozvinutou kulturní praxí. Hromadnost a vztahy individuální lidské existence k prostředí masové společnosti uvedly do života první pokusy o interpretace jejich sociálních vazeb a tendencí na základě topologie.

4. Topologická psychologie Kurta Lewina.

S rozvojem psychologie přicházely ke slovu výsledky, které už nebyly srozumitelné v rámci světonázoru zahrnujícího do jednoho celku exaktní vědy s metafyzikou, ale na základě experimentu otevírajícího cestu k prvkům a principům nově se rozvíjejícího myšlení v rovině interakcí experimentálně získaných poznatků.⁴⁴

44 — Tento proces měl začátky pokud se humanitních studií týkalo v experimentální psychologii ve výzkumech fyzika Ernsta Heinricha Webera, psychologa Gustava Fechnera a Wilhema Wundta. Měřitelné prvky fyziologických vjemů a rozhodování znamenaly posílení vědy jako cesty k poznání významů jednotlivých stavů a událostí, ale záhy byly doprovázeny snahami o podstatnější zakotvení experimentálně získaných dat v struktuře nového poznání psychiky jako autoregulativního procesu. Takovým krokem, který zdůraznil neznámý potenciál nově získávaných dat v nových souvislostech se stala tvarová psychologie, jejíž možnosti předznamenaly výzkumy počítačové fyziologie Ernsta Macha.

Vztahy vědeckého poznání z oblastí matematiky a teoretické fyziky rozvinul ve svém díle věnovaném psychologii přede všemi německo-americký psycholog, gestaltista, Kurt Lewin. Lewin charakterizoval chování a myšlení člověka jako vektorové aktivity v dynamickém poli interakčních napětí a spojů. Lewin spojoval témata psychologie s terminologií pocházejících z nových objevů vědy, z teorie relativity, teorie množin a topologie.⁴⁵

45 — Lewin K., Principles of Topological Psychology, New York, 1936.

academic and therapeutic initiatives of European origin became a pragmatically developed cultural practice. The mass scale and relations of an individual human existence to the mass society environment brought to life the first attempts to interpret its social ties and tendencies on the basis of topology.

4. Kurt Lewin's Topological Psychology

With the development of psychology, results came to the fore that were no longer comprehensible within the worldview that combined exact sciences and metaphysics, but based on experimentation that opened the way to the elements and principles of newly developing thinking in terms of the interaction of experimentally acquired knowledge.⁴⁴

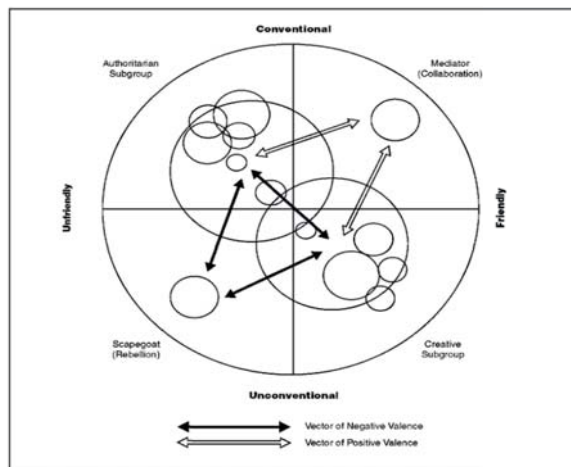
44 — As far as the humanities were concerned, this process had its beginnings in experimental psychology in the research of the physicist Ernst Heinrich Weber, the psychologist Gustav Fechner and Wilhem Wundt. The measurable elements of physiological perceptions and decision-making meant the reinforcement of science as a way of learning about the meanings of particular states and events, but were soon accompanied by efforts to embed more substantially experimentally obtained data in the structure of new knowledge of the psyche as a self-regulatory process. Such a step, which emphasised the unknown potential of newly acquired data in new contexts, was shape psychology, the possibilities of which foreshadowed Ernst Mach's research into sensory physiology.

The relations of scientific knowledge from the fields of mathematics and theoretical physics were developed primarily by the German-American psychologist, gestaltist, Kurt Lewin in his work devoted to psychology. Lewin described human behaviour and thought as vector activities in the dynamic field of interacting tensions and connections. Lewin combined the themes of psychology with terminology derived from new scientific discoveries, from theory of relativity, set theory and topology.⁴⁵

45 — Lewin K., *Principles of Topological Psychology*, New York, 1936.

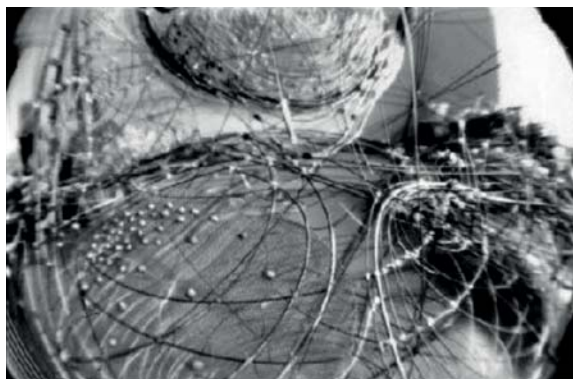
Topology and some of the motives of quantum physics allowed Lewin to see and evaluate human behaviour as actions in the field of interacting particles, as shown in Lewin's diagram from his *Field Theory in Social Science: Selected Theoretical Papers*, Harpers 1951. The psychology of shapes, specifically reflected in Lewin's topological psychology, was not the only theory that penetrated from a static understanding of the meanings of phenomena and their motivations to their recognition and evaluation in dynamic processes of perception and thought, but it fundamentally contributed to a new understanding of individual actions and thinking in the environment of mass society.⁴⁶

46 — The relations of the phenomenon and the environment, the shape and the background, brought attention to the theme of the field, to the notions of psychological environment, psychological regions, their internal dynamics and boundaries in the topological sense, i.e., with the definition of the changing nature of situations in this environment. In *Topological Psychology*, Lewin described the states of the changing environment with concepts such as fluidity, elasticity, plasticity. See. Chapter XIV. Structural Changes and Chapter XV. The Life Space as Finally Structured Space.



OBR. 31 Topologie a některé motivy kvantové fyziky umožnily Lewinovi vnímat a hodnotit jednání člověka jako dění v poli interakcí částic, jak to charakterizuje Lewinův diagram z jeho práce Field theory in social science: selected theoretical papers, Harpers 1951.

FIG. 31 Topology and some of the motives of quantum physics enabled Lewin to perceive and evaluate human action as occurring in a field of interacting particles, as characterized by Lewin's diagram from his Field theory in social science: selected theoretical papers, Harpers 1951.



OBR. 32 Karel Malich: detail drátěné plastiky Krajina s věčnem, 1980–1985 (fotografie T. Vlček)

FIG. 32 Karel Malich: wire sculpture Landscape with Eternity, 1980–1985 (photo T. Vlček)

5. Between the Inside and Outside of Abstraction

The changes in science or in the poetics of art, which foreshadowed the topological turn to a different way of thinking described here as references to the situation around 1968 and to the preceding and following years or decades, should also be seen in the context of the emergence and impact of structuralism, especially in the already mentioned work of Jan Mukařovský. It is primarily his concept of structure as an interaction of functions which, according to the nature of expression in which they are mutually applied, suppress and reinforce each other in the creation and development of the possibilities of artistic message. The legacy of structuralism was particularly impressive where culture was situated in an environment where knowledge and thought came in conflict with power, and structuralism became one of the theoretical pillars of resistance to political power and power narratives. This was, for example, the case of Czechoslovakia after 1968. However, the role of structuralism, especially the role of post-structuralism, the role of perception, mapping and evaluation of functions, was used in other forms of resistance against the forces limiting the freedom of thought. When Deleuze analysed Foucault's path to the topological turn, he introduced descriptions of the world made of overlapping surfaces, archives, strata and ruptures: 'We are going from one stratum to another, from one zone to another, passing through surfaces, images, curves; following rupture and trying to get to the centre of the world...but at the same time we are trying to leave the strata to come to the atmospheric element, a non-stratified substance.'⁴⁷

47 — Ibid, p. 173.

In this figurative description of the topological thinking of space, a certain emptiness emerges, which is not an emptiness, but a fold of the outside into the inside, a zone of a free object. The depths of the psyche, in which the purely rational concept of geometry is applied as much as in science itself, were recalled by Blaise Pascal in his *Pensées* [Thoughts]; and the void between a fleeting moment and eternity was discussed by Charles Baudelaire in his poems and essays. Emptiness was not attractive only because of the absence of material substance, but because of something that was yet inexplicable, that was between its elements. An opportunity, an event, Mallarmé's *A Throw of the Dice*, the possibilities unfettered by experience, and imagination unlimited by experience and knowledge. The year 1968 mentioned as crucial here, was part of the time of change, at least in terms of introducing new motifs of topological abstraction that went beyond the limiting 'stratified substance', motifs that manifested themselves by a new interest in the emptiness of surfaces, cracks and ruptures. From the long series of expressions preoccupied with the hope of emptiness connected with silence, white colour, silence between tones, one can mention, among other works, the *Writing Degree Zero* by Roland Barthes, the *ZERO*

Tvarová psychologie se specifickým výústěním v Lewinově topologické psychologii nebyla jedinou teorií, která pronikala ze statického chápání významů jevů a jejich motivací k jejich rozpoznání a hodnocení v dynamických procesech vnímání a myšlení, ale zásadně přispěla k novému porozumění jednání a myšlení jedince v prostředí masové společnosti.⁴⁶

46 — Vztahy fenoménu a prostředí, tvaru a pozadí vedly pozornost k tématu pole, k pojmům psychologického prostředí, psychologických regionů, jeho vnitřní dynamiky a hranic v topologickém slova smyslu, tedy s definováním proměnlivé povahy situací v tomto prostředí. Lewin v knize Topologická psychologie charakterizoval stavy proměňujícího se prostředí prostředím pojmy, jako je tekutost, elasticita, plasticita. Viz Kapitola XIV. Structural Changes a kapitola XV. The Life Space as Finally Structured Space.

5. Mezi vnějškem a vnitřkem abstrakce

Změny ve vědě, či v poetice umění, které předznamenaly topologický obrat k jinému myšlení, jenž zde sledujeme v náznaku situace z doby kolem roku 1968 a předcházejících a následujících letech, či desetiletích, je rovněž třeba brát v souvislostech vzniku a působení strukturalismu, zejména již zmíněného díla Jana Mukařovského. Jde především o jeho pojetí struktury jako interakcí funkcí, které se podle povahy projevu, ve kterém se vzájemně uplatňují, potlačují a posilují při vytváření a rozvíjení možností vzniku uměleckého sdělení. Dědictví strukturalismu bylo zejména tam působivé, kde se kultura nalézala v prostředí, v němž poznání a myšlení se dostávalo do konfliktů s mocí a strukturalismus se stal jednou z teoretických opor rezistence vůči politické mocí a mocenským narativům. Tak tomu bylo například po roce 1968 v Československu. Nicméně role strukturalismu, zejména role post-strukturalismu, role vnímání, mapování a vyhodnocování funkcí se uplatnila v jiných a dalších podobách rezistence proti silám omezujícím svobodu myšlení. Když Deleuze analyzoval Foucaultovu cestu k topologickému obratu uvedl deskriptce světa složeného z převrstvených povrchů, archivů, strat a trhlin: „Hroužíme se z jednoho strata do jiného, z pásma do pásma, procházíme skrz povrchy, obrazy křivky, sledujeme trhlinu a pokoušíme se proniknout dovnitř světa.... ale současně se také pokoušíme vystoupit nad strata, abychom vystoupili vně k atmosférickému živlu, k nějaké „nestratifikované substanci“.“⁴⁷

47 — Tamtéž, s. 173

V této obrazné deskriptce topologického myšlení prostoru se vynořuje jakési prázdno, které není prázdnom, ale záhybem vnějšku ve vnitřek, zónou svobodného subjektu. Hloubky psychiky, ve kterých se čistě racionální koncept geometrie uplatňuje stejně jako ve vědě samotné připomenul ve svých Myšlenkách Blaise Pascal, do prázdna mezi prchavým okamžikem a věčností se obracel ve svých verších a esejích Charles Baudelaire. Prázdno se nestávalo přitažlivým jen absencí hmotné substance, ale čímisi zatím nevysvětlitelným, co je mezi jejími prvky. Příležitost, pro událost, pro



OBR. 33 Milan Grygar, Hmatová kresba, záznam akce z roku 1969 (Akce spočívala v Grygarově prostoupení roviny utvářené kresby a v postupném nanášení barvy prsty obou ruk. Vytvořená kresba se stala tématem úplného vytržení kresby z plochy papíru.)

FIG. 33 Milan Grygar, Tactile Drawing, a record of an action from 1969 (The action consisted in Grygar's penetrating the plane of the formed drawing and gradually applying paint with the fingers of both hands. The created drawing became the subject of a complete removal of the drawing from the surface of the paper.)



OBR. 34 Milan Grygar: Hmatová kresba – závěrečná fáze 1969–1980
FIG. 34 Milan Grygar: Tactile drawing – final possibility 1969–1980

movement, the tensions discovered between the systems and planes of movements, shapes, sounds and signs, especially in the music of John Cage, or in the acoustic motifs of Milan Grygar's artwork. Grygar's 1969 performance

was one of the examples of the need to use an abstract surface for the genesis of shapes as a medium for sign-functions of painting, sculpture, musical composition or environment represented by the artistic and literary work of the Czech sculptor and painter Karel Malich. In Malich's work, the theme of the field as a field of events of artistic expression appeared at the beginning of the crystallisation of his work, graphically as the theme of geometric and proto-geometric patterns in the cycle of drawings titled *Tracks and Traces*. The sculptor, who studied graphics at the Academy, perceived very intensely the relations between surface and incision in graphic techniques and used surface throughout his life's work as a fundamental carrier of artistic (and above all dynamically harmonious) powers of his work. *Tracks and Traces* shows the transformation of perceptions of movements in the landscape, in motion, in flight and in the tracks of animals and plants in the context of the reflection of reality based on the findings of modern science, especially on interactions, relationships and events discovered and presented in field theory, probability theory and quantum physics. The transitions between the surface and other dimensions had their genesis in Malich's work, which included depressions, protrusions, perforations and shapes extending into space in its corridors from 1966 and beyond. Karel Malich expressed the crack in space thematically in his texts and a wire sculpture from 1974.

The crack between the strata of the surfaces of reality became one of the distinctive motifs of that Czech art of the second half of the 20th century, which was close to the motifs of topology. The new meanings of the role of emptiness showed expressions of longing for freedom, for liberation from dependence on the political and power discourse of the time, in knowledge and in emotions, in science and in aesthetics, in all areas conforming to power.

Mallarmeův Vrh kostek, pro možnosti nespoutané zkušeností, a také představou nelimitovanou zkušeností a poznáním. Rok 1968, který jsme připomněli jako zlomový, byl součástí doby obratu, při nejmenším pokud se týče uvedení nových motivů topologické abstrakce přesahujících limitující „stratifikované substance“, motivů, které se projevíly novým zájmem o prázdno ploch, štěrbin a trhlin. Z té dlouhé řady projevů zaujatých nadějí prázdna spojeného s mlčením, s bílou barvou, tichem mezi tóny, je možné připomenout, kromě dalších děl Nulový stupeň rukopisu Rolanda Barthese, hnutí Zero, napětí, které objevovali mezi systémy a rovinami pohybů, tvarů, zvuků, znaků přede všemi hubě John Cage, nebo v akustických motivech výtvarného díla Milana Grygara. Grygarova akce z roku 1969.

Jedním z příkladů potřeby uplatnit abstraktní plochu pro genezi tvarů jako media znakových funkcí obrazu, sochy, hudební skladby, či prostředí představuje výtvarné a literární tvorbě českého sochaře a malíře Karla Malicha. V Malichově díle se téma pole jako pole událostí uměleckého vyjádření objevilo na začátku krystalizace jeho tvorby, názorně jako téma geometrických a protogeometrických vzorů v cyklu kreseb Stopy a dráhy. Sochař, který vystudoval na Akademii grafiku vnímal velmi intenzivně vztahy plochy a vrypu v grafických technikách, aby pak v celém svém životním díle se plocha uplatnila jako základní nositel uměleckých a to především dynamicky harmonických potencií jeho díla. Stopy a dráhy ukazují transformaci vjemů pohybů v krajině, v pohybu, v letu a ve stopách živočichů a rostlin do souvislosti reflexe skutečnosti opřené o poznatky moderní vědy, především o interakce, vztahy a události objevované a prezentované v teorii pole, v teorii pravděpodobnosti a kvantové fyzice. Přejechy mezi plochou a dalšími rozměry měly u Malich svou genezi, do které se zapsaly prohlubně, výstupky, perforace a do prostoru vybíhající formy v jeho koridorech z let 1966 a dalších. Štěrbinu v prostoru Karel Malich námětově vyjádřil v textech a v drátěné plastice z roku z roku 1974.

Štěrbinu mezi stratami povrchů skutečnosti se stala jedním z výrazných motivů toho českého umění druhé poloviny 20. století, které bylo blízko motivům topologie. V aktualizacích role prázdna se projevíly touhy po svobodě, po osvobození ze závislosti na dobovém politickém a mocenském diskurzu, v poznání i v emocích, ve vědě i v estetice, ve všech oblastech přízpůsobujících se moci.

Prostor, topologie a pár poznámek o bezbodové topologii

Aleš Pultr

Space, Topology and a Few Remarks on Pointfree Topology

Aleš Pultr

Intuitivní chápání prostoru

Slovo „prostor“ je jistě každému běžné a každý o něm má nějakou představu. Ale i když taková představa obvykle dává jakýsi dobrý intuitivní smysl, a i když různost těchto intuitivních představ sotva vede v běžném rozhovoru k nepříjemným nedorozuměním, jistě vidíte, že za různých okolností to i pro jednu osobu může znamenat různé věci. Třeba něco jako prostředí, ve kterém se něco děje nebo je něco umožněno. Nebo něco, co nám chybí pro nějaký účel (nemám v místnosti dost místa pro novou skříň). Nebo něco, co nějak přebývá (co když o nějaké nedokonalosti řekneme, že „ponechává prostor k přání“?). Nebo se nám v něčem „otevřel nový prostor“ (míníme: „nové možnosti“).

To, o čem si budeme povídat, je nejbližší představě prostředí, v němž se něco děje nebo má (nebo může) být – při dobré vůli ostatně jistě uvidíme, že mnohé z těch jiných představ se do takto vymezeného pojmu vejdu (mimochodem, všimněte si, jak je naše myšlení ovlivněno prostorovými představami: aniž bych chtěl dávat další příklad, automaticky jsem o *představách* mluvil, jako by to byly věci, které se vejdu či nevejdu do nějaké krabice). Takové prostředí může být prostě obecně „prostor kolem nás“, nebo jeho přesně nebo méně přesně vymezená část (tady si všimněte toho, že nám hodně záleží na tom, jestli je něco blízko nebo daleko). Jiný příklad je nějaká soustava čísel užívaná k popisu nějaké skutečnosti (třeba teploty – opět tu máme otázku blízkosti: je o hodně tepleji nebo jen o trochu, nebo je rozdíl zanedbatelný?). Hodně odlišný je příklad systémů barev: třeba duhy viditelného spektra, nebo systému smíšených barev, nebo jen barev z nějakého vzorníku (a zas nás hodně zajímá blízkost, podobnost, která nemusí být a obvykle není, nijak číselně vyjádřená; u tohoto příkladu si všimněte ještě dalších nápadně prostorových aspektů: první, duha čistých barev je něco jako přímka, druhý, smíšené barvy jak je vidíme, tvoří jakýsi trojúhelník s křivými stranami). Podobně prostor tónů, kde nás zajímá blízkost a odlišnost ve výšce, ale také v tzv. barvě.

Euklidovská geometrie

Jak je to s prostorem kolem nás, jak to známe ze školy? Tam jsme se učili euklidovskou geometrii. Co vlastně? Byli jsme seznámeni s jistým axiomatickým systémem týkajícím se konstrukcí s jakýmižto prvky, kterým se říkalo *body* a *přímky* (a později, ve stereometrii, přibýly *roviny*) a *kružnice*, z čehož pak vyplývaly složitější vlastnosti týkající se mnohem složitějších (a zajímavějších) útvarů. A možná byl brzy užíván i pojem „euklidovský prostor“ a snad bylo

1 — Možná jste byli také informováni o tzv. neeuklidovské geometrii (Bolyai, Gauss, Lobačevskij, v abecedním pořadí), která trochu mění axiomatiku (z dobrého důvodu). Její studium je velmi důležitá a zajímavá kapitola v historii geometrie a v otázkách axiomatiky obecně. Když se ale někdy říká, že její význam je v tom, že naše prostředí je spíš takto neeuklidovské než euklidovské, je to zavádějící (může za to trochu nešťastně z historie přejatý termín „нееuklidovská“ pro geometrii, která je prostě o trochu jiná než euklidovská, ale stejně speciální; prosím nesměšovat s „nikoli euklidovská“): fyzikální prostředí kolem nás ve velkých vzdálenostech není úplně euklidovské, ale není žádný důvod považovat ho za globálně „нееuklidovské“ ve zmíněném pozměněném axiomatickém smyslu. Gravitace ho pokrývá mnohem složitějším způsobem.

The idea of space

The common usage of the word ‘space’ hardly ever creates confusion in everyday talk. The intuition behind it is usually (sometimes helped by context) well understood. Nevertheless, the ideas expressed can certainly vary, even for the same speaker, with context and changing circumstances. We can have in mind something like surroundings in which something happens. Or something missing for some goal (‘I have no space for a new piece of furniture’) – or, contrarywise, unexpectedly open possibilities and remaining time (‘We have still some space for discussing this or that’). Or ‘outer space’ as opposed to the inside of a cosmic laboratory.

What we will discuss here is closest to the idea of surroundings enabling something to happen; in fact, after all, we will see that other ‘space ideas’ can fit into thus specified one (note how our thinking is influenced by the spatial intuition: without intending to give another example I have automatically spoken of *ideas* as of objects that can or cannot fit into a box). Such a space can be simply the environment we live in, or some of its more or less precisely delimited parts (note that we are often concerned with the question whether something is close or far). Another example is a system of numbers used as values characterizing a state (say, temperature; again, we have here the idea of close vs. far: is something much colder than something else, or just a little colder, or is the difference negligible?). A different example is the space of colors, say those of the rainbow spectrum, or a system of all mixed colors as perceived, or those of a sampler (also here we are interested in closeness, similarity, which need not be – and usually it is not – expressed as a distance using a number). In this example also note other strikingly spacelike qualities: the space of pure colors is something like a segment, that of perceived mixed colors something like a triangle with curved sides). Also think of the space of tones where we are interested in the differences in pitch, quality (timbre) and volume – and their closeness.

Euclidean geometry

How about the space we know from elementary school? There we went through the Euclidean geometry. What, actually, was discussed? We were presented a certain axiomatic system concerning constructions with some objects called *points* and *lines* (later there were also *planes*), and *circles*, from which there were derived more complicated facts concerning much more complicated (and more interesting) figures. Perhaps the teacher also spoke of the ‘Euclidean space’ as of the surroundings in which

1 — Maybe you have been also informed about the so-called non-Euclidean geometry (Bolyai, Gauss, Lobačevskij, in the alphabetic order) with slightly changed axiomatics. Its study has good historical reasons, and is an important and interesting chapter in the development of geometry, and generally in understanding axiomatic systems. You may sometimes hear that its importance is in the fact that our actual surroundings are non-Euclidean in this sense rather than Euclidean. This is misleading; it is caused by a not very lucky terminology: for historical reasons one has adopted the term ‘non-Euclidean’ for a geometry which only just a bit differs from the Euclidean one, but which is equally special. One should not mistake ‘non-Euclidean’ for ‘not Euclidean’: our physical surroundings are not in large distances quite Euclidean, but there is no reason for taking them for non-Euclidean in the sense mentioned above: it is influenced by gravitation in a much more complicated way.

i vysvětleno, že jde o prostředí, ve kterém mají pojmy euklidovské geometrie dobrý smysl a ve kterém jsou konstrukce ze zavedených axiomů opravdu možné; a taky jsme se dozvěděli, že prostředí kolem nás je snad (a rozhodně v dobrém přiblížení, pokud se nejedná o kosmické vzdálenosti) takové.

Všimněte si také toho, že představa přímky jako něčeho rovného, tj. nezakřiveného, nebo podobně představa, že rovina je dokonale rovná (placatá), není přímo v euklidovské axiomatice. Poučka „úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů“ (a tedy rovná, protože zakřivení by zvyšovalo délku) už předpokládá, že ty body jsou někde a že mezi nimi jsou nějaké spojnice (co to vlastně jsou? a jak to, že je jich hodně, a co jsou jejich délky?).

Překračování euklidovského rámce

Do jisté míry je možno říci, že až do novověku se ve vědách s představou prostoru jako euklidovského prostředí většinou docela dobře vystačilo. Ale jen do jisté míry. Již ve starém Řecku byli praktičtí geometři (filozofičtí čistí geometři se o nich posměšně vyjadřovali jako o „napínačích provazů“), kteří znali hodně užitečných přibližných konstrukcí a postupů, které se do axiomatické teorie tak úplně nevešly, a které ovšem implicitně říkaly mnoho nového o podstatě prostředí kolem nich. Ale též ve vznešenější geometrii se objevily postupy založené na aproximacích („vyčerpávající metoda“ obsahu rovinných obrazců: Eudoxos a další). Za zvláštní zmínku stojí geniální Archimedovo odvození vzorce pro obsah jehlanu pomocí aproximací; teprve ve 20. století bylo dokázáno, že to jinak (tj. pomocí *konečných* rozkladů krychle na tělesa se srozumitelnými vztahy mezi objemy) nejde! A samozřejmě můžeme také jen těžko pochybovat o tom, že také mimo úzkou oblast geometrie lidé aspoň implicitně mysleli v prostorových představách (podobnost jako blízkost).

Změna pohledu: analytická geometrie

Podstatný myšlenkový zlom přišel s tím, čemu dnes říkáme analytická geometrie. Zavedení souřadnicových systémů dává chápání prostředí do nové perspektivy. Tak třeba základní dvojrozměrná euklidovská geometrie (body, přímky, kružnice) vypadá nyní takto (používám dnešní výrazy, poprvé také slovo množina – nebojte se, nic z teorie množin nebude, jen jde o šikovné slovo pro „skupina, systém, soubor prvků, a priori chápaná jako amorfní, dokud se tam nějaká struktura nevnutí“): vezmeme množinu dvojic reálných čísel, řekneme, které podmnožiny jsou přímky či kružnice (za body vezmeme přímo prvky naší množiny), a dokážeme, že tyto útvary splňují euklidovy axiomy. Potom už můžeme pracovat s těmito útvary.

Máme tady zase euklidovskou geometrii (nebo, chcete-li, její model). Všimněte si však dvou nových, velmi podstatných, aspektů: Prostředí pro naši geometrii, totiž tu množinu dvojic, zde máme od začátku, a jasně vymezené: už to není nějaké

the concepts of Euclidean geometry made good sense and in which the constructions introduced by the axioms were really feasible; and we were also informed that the actual surroundings in which we live are (probably, and certainly if we do not think in terms of cosmic distances) such.

Also note that the idea of a *line (segment)* as of something straight, that is, not curved, or similarly the idea of a *plane* as of something perfectly flat, is not explicitly included in the Euclidean axioms. The statement that the segment is the shortest path connecting two points (and hence a straight one, because bending would increase the length) is intuitively sound, but assumes that the points are somewhere, and that there are paths connecting them (what, precisely, are they? and what are their lengths to be compared?).

Transcending the Euclidean scope

One can say that until the late Middle Ages people (and sciences) got along quite well with the intuition of space as a sort of Euclidean environment. But only to some extent. Already in the ancient Greece there were practical geometers (mockingly called ‘stretchers of ropes’) who knew a lot of useful approximative constructions and procedures which would not quite fit into the axiomatic theory, and which implicitly said a lot of new facts of the nature of their surroundings. But also, in the more philosophically minded society there appeared procedures based on approximations (‘exhaustion method’ for planar areas: Eudoxos and others). In particular we have to mention the brilliant Archimedes’ proof of the formula for the volume of the pyramid deduced by approximations; it took more than two millennia to prove that it is impossible to do it by finite methods (finite decompositions of bricks with transparent relations between the volumes)! And of course, we can hardly doubt that people thought also outside the narrow realm of geometry, at least implicitly, in spatial terms (and thought of similarity as of a sort of closeness).

A change of perspective: analytic geometry

A substantial turn of thinking of space came with what we now call analytical geometry. The introduction of a system of coordinates introduces a new perspective for understanding surroundings. Thus for instance the basic two-dimensional Euclidean geometry (points, lines, circles) now comes as follows (I will use contemporary terms, first time also the word ‘set’ – fear not, there will be no set theory; it is just an expedient expression for ‘a system of some elements, a priory understood amorphous as long as we do not impose a structure according to our liking’): We take the set of (ordered) pairs of real numbers, tell which of the subsets will be taken for lines resp. circles (for points we take the elements of the set) and prove that these figures satisfy the Euclid’s axioms; then we can work with these figures.

mlhavé něco, v němž se ta geometrie nějak děje. Za druhé, můžeme zde používat původní struktury reálných čísel také k jiným účelům než k důkazu, že model funguje: tak třeba můžeme definovat pomocí operací útvary mnohem obecnější než kružnice a přímky, třeba algebraické křivky libovolných řádů (tady bych chtěl poznamenat, že tvrzení, že Descartes je otec analytické geometrie bez dalších dodatků, je vlastně trochu křivda; Descartes vybuodoval, kromě spousty jiných věcí, bohatou teorii algebraických křivek, a je tedy otcem mnohem bohatší algebraické geometrie, [3]).

Struktura jako dodatečná informace na množině

Přístup, který jsme právě popsali, se stal v matematice běžným. Objekty, které se v té které teorii studují, jsou reprezentovány jako nějaké množiny, které by samy o sobě byly amorfni, a které jsou opatřeny strukturou pro danou teorii zajímavou. V algebře dodáváme informace o operacích s prvky a o tom, jaké výsledky dostaneme, když do operací dosadíme předepsané prvky; jde-li o uspořádání, dodáme informaci, který prvek je před kterým jiným (o prostorech si z tohoto hlediska budeme povídat podrobněji dále). Tak třeba přirozená čísla \mathbb{N} jen tak jako množina žádnou strukturu nemají. Běžnou aritmetiku dostaneme, když k tomuto základu dodáme informaci v podobě dvou zobrazení²

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

(sčítání a násobení). Běžnou uspořádanou množinu přirozených čísel dostaneme dodáním informace ve formě (binární) relace

$$\leq \text{ podmnožina } \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(promiňte užívání symbolu $X \times Y$; není-li zcela běžný, jedná se o množinu všech dvojic (x, y) kde x je v X a y je v Y).

2 — Zapamatujte si symbol $f: X \rightarrow Y$, který budeme často užívat. Značka před dvojtečkou, zde f , je jméno, které jsme zobrazení – jednoznačnému přiřazení prvků z Y prvkům z X – dali, X před šipkou je objekt (množina, strukturovaná množina), ze kterého zobrazujeme, Y za šipkou je objekt, do kterého zobrazujeme; je-li pak $x \in X$, označujeme $f(x)$ ten prvek z Y , který je mu přiřazen.

Thus, we obtain (again) the Euclidean geometry (or, if you wish, a model of such geometry). But note the following two new, important aspects. From the very beginning we have here well-defined surroundings (namely the set of pairs): it is not any more a nebulous something in which geometry is somehow possible. Secondly, we can recall the original structure of the real numbers and use it also for other aims than just the proof that the model works: thus for instance we can use the operations for defining figures much more general than the original lines and circles, for instance the algebraic curves of arbitrary degrees (here it should be noted that the usual statement that Descartes is the father of analytic geometry, without further explanation, is in fact an iniquity: he developed – besides a lot of other things – a complete theory of algebraic curves, and hence is the father of the much richer algebraic geometry, [3]).

Structure as a supplementary information on a set

The approach we have just described has become standard in contemporary mathematics. The objects studied in that or other theory are viewed as sets that would be on their own amorphous, and that are endowed with an extra structure of interest for the given theory. Eg., in algebra we add the information about specific operations and about the results obtained when we fill in elements into the operations. Studying order we endow a set with the information which element precedes another one. Spaces will be discussed from this point of view in detail below. Thus, natural numbers \mathbb{N} just as a set do not have any structure. The standard arithmetic is obtained adding an information consisting of two operations²

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

(addition and multiplication). The ordered set of natural numbers is obtained by adding the information in the form of a binary relation

$$\leq \text{ subset of } \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(excuse the symbol $X \times Y$ if it is not quite standard; it is the set of all pairs (x, y) where x is in X and y is in Y).

2 — Remember the expression $f: X \rightarrow Y$ which will be often used. The symbol before the colon, here f , is the name given a mapping – an assignment of elements of Y to the elements of X –, the X in front of the arrow is an object (a set, or a structured set) from which we map, the Y behind the arrow is the object into which we map; if in such situation $x \in X$ (x is in X) we denote by $f(x)$ the assigned element of Y .

Metrické prostory

Vraťme se k prostorům. Analytická geometrie v dvojicích resp. trojicích reálných čísel (v dimenzi dvě a tři) na nějakou dobu vystačila a nebyl žádný problém ani s rozšířením na vyšší dimenze, což umožnilo rozvoj diferenciálního počtu v obecných dimenzích. Ale brzy se ukázalo, že by přece jen bylo potřeba větší obecnosti. Připomeneme-li si příklady z prvních odstavců, vidíme, že prostorové představy často souvisí s rozdílem mezi blízkým, ne tak blízkým a vzdáleným (podobným, méně podobným a nepodobným, podobným v různé míře). To, spolu samozřejmě s různými měřeními, velikostmi, obsahy a objemy, úkoly, které zde byly odedávna, vedlo k soustředění na *vzdálenost* jako strukturu výhodně obohacující množinu, a tedy k pojmu metrického prostoru. To je množina X opatřená informací o vzdálenosti mezi jejími prvky

$$d: X \times X \rightarrow R$$

(to jest, ke každým dvěma prvkům (bodům prostoru) $x, y \in X$ je přiřazeno reálné číslo $d(x, y)$, jejich vzdálenost; vzdálenosti d se obvykle říká metrika, odtud název takových prostorů). Od vzdálenosti se obvykle požaduje splnění následujících pravidel:

- $d(x, x) = 0$ a $d(x, y) > 0$ pro $x \neq y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, a
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Uvědomte si, jak přirozená a názorná ta pravidla jsou: chceme, aby různá místa měla kladnou vzdálenost, aby cesta z místa x do místa y byla stejně dlouhá jako cesta z y do x ;³ zejména si všimněte posledního pravidla, tzv. trojúhelníkové nerovnosti, která vyjadřuje fakt, že cesta z místa x do místa z se může požadavkem, abychom během ní navštívili místo y , pouze prodloužit, rozhodně ne zkrátit.

3 — Namítnete asi, že toto není úplně realistické (cesta do kopce a z kopce, vzdálenosti ve městě s jednosměrnými ulicemi), ale to, o co v teorii metrických prostorů jde, na tom moc nezáleží, a úpravy typu že neomezené přibližování zůstane neomezeným přibližováním, když ho počítáme v opačném pořadí bodů, je jen technická nepříjemnost, která ničemu moc nepomůže.

V bouřlivém rozvoji matematické analýzy sehrály metrické prostory skvělou roli. Kdejaká soustava matematických objektů má v sobě přirozenou vzdálenost (často i více podstatně různých a přesto přirozených). Dovolte mi příklad. Vezměme množinu reálných funkcí f na nějakém intervalu J . Udělejme to názorněji: ten interval bude třeba červen tohoto roku, a funkce $f_A(t)$ bude teplota v místě A v okamžiku t (představte si to jako graf, takové grafy jistě znáte). Ke srovnání klimatické situace mezi místy A a B může posloužit vzdálenost $d(f_A, f_B) = \max |f_A(t) - f_B(t)|$ (namalujte si obrázek se dvěma grafy, uvidíte to jako nejmenší šířku stužky, do které se oba grafy vejdu). Ale také může mnoho vypovídat jiná vzdálenost $\int_J |f_A(t) - f_B(t)|$ (nelekněte se toho integrálu, je to obsah plochy vymezené našimi grafy); zatímco první bude vyjadřovat spíš rozdíly v krátkodobých výkyvech teplot, druhá porovná teplotní situace v A a B celkově.

Metric spaces

Back to spaces. Analytic geometry based on pairs or triples of real numbers was quite satisfactory for some time, and there was also no problem in extending it to higher dimensions and using it to develop differential calculus. But, nonetheless, after some time the need for more generality was becoming increasingly apparent.

Recalling the example from the first paragraph we see that the space intuition is often connected with the difference between close, not so close, or distant (similar, less similar, or not similar at all; various degrees of similarity). This, of course together with measuring lengths, sizes, areas and volumes, tasks people met since ever, led to focusing to the *distance* as a structure suitably enriching a set to obtain a basis for such aims. Thus, one naturally arrived at the concept of *metric space*. This is a set X endowed with the information on the distance between its elements

$$d: X \times X \rightarrow R$$

Thus, any two points x, y are assigned a number $d(x, y)$ telling how far apart they are; this distance function d is usually called metric, hence the name of the resulting spaces. One usually assumes that

- $d(x, x) = 0$ and $d(x, y) > 0$ for $x \neq y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, and
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Realize how natural these rules are: we wish that distinct places have non-zero distance, that the distance from x to y be the same as that from y to x .³ In particular note the last rule, the so-called triangular inequality, expressing the fact that a travel from x to z can be made by requiring visiting y on the way only longer, certainly not shorter.

3 — You may remonstrate that this is not quite realistic (uphill and downhill, distance in a town with one-way streets), but it is not quite so important. For standard purposes, mostly involving unlimitedly close approaching, it does quite well.

In the flourishing development of mathematical analysis, metric spaces played an excellent role. Many mathematical objects involve a sort of distance (often more than one, and all of them natural). Take for instance the set of real functions f on an interval J . We will be more concrete: the interval will be, say, this June, and $f_A(t)$ will be the temperature in the town A in the time t (imagine a graph of temperature changes; you certainly know such pictures). Comparing the climatic situation in A and B can be done using the distance $d(f_A, f_B) = \max|f_A(t) - f_B(t)|$ (draw a picture with two graphs; the distance will be the width of the thinnest band containing both graphs). But much can be expressed by another distance, the $\int_J |f_A(t) - f_B(t)| dt$. (do not get scared by the integral: it is the area of the figure delimited by the two graphs); while the first expresses the differences in short time variation of temperature, the latter compares the overall temperature situation in A and B .

Prostory takto vzniklé jsou velmi důležité a užitečné (v teorii i praxi) a nedají se vždy vyjádřit jako do té doby běžné euklidovské prostory ani jejich části. Třeba prostor(y) v příkladě o srovnávání teplot by měly něco jako nekonečnou dimenzi, a proto se do žádného euklidovského prostoru nevejdou; ale to bylo jen tak to první, co člověka napadne: metrických prostorů, které pod klasické euklidovské situace (z nejrůznějších důvodů) nespadají, je spousta, a spousta z nich nachází uplatnění.

Spojitosť

Teď budu čtenáře prosit, i když ho obecně matematika moc nezajímá, o ochotu seznámit se s jedním pojmem (možná nejdůležitějším pro chápání toho, o co v prostorových představách jde), totiž s pojmem *spojitosti*. Napřed trochu formálně. Máme dva metrické prostory (X, d) , (Y, d') a zobrazení $f: X \rightarrow Y$ (zopakujme si, co je to zobrazení: ke každému bodu $x \in X$ máme jednoznačně určen bod $f(x) \in Y$, třeba aritmetickou formuli, jako když k reálnému číslu x přiřadíme jeho kvadrát x^2 . Ale také třeba ani žádnou hezkou formuli nemáme, jen je nutné, aby ke kterémukoli prvku z X bylo něco z Y jednoznačně určeno). Zobrazení f je spojité, jestliže libovolně předepsané omezení chyby ve výsledku $f(x)$ (třeba: „ $f(x)$ musí být přesné na tři desetinná místa“) můžeme zaručit omezením možné chyby x (třeba: „ x bude určeno na pět desetinných míst“). Ještě trochu formálněji (a přesněji):

Ke každému bodu x z X a k libovolně malému $\epsilon > 0$ existuje dostatečně malé $\delta > 0$ takové, že pokud $d(x, y) < \delta$ bude $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Pravděpodobně to stejně znáte, a v tom případě se omlouvám za opakování, ale pokud ne, párkrát si to radši přeříkejte.

Ilustrujme si důležitost pojmu spojitosti na velmi speciálním případě řešení rovnic. Vezměme třeba hledání druhé odmocniny ze dvou, tj. řešení rovnice

$$x^2 = 2.$$

Tvrdíme-li, že výsledek je $x = 1.4$, není to pravda, stejně jako kdybychom tvrdili, že je $x = 25$. Přesto je první přijatelnější než druhé. Druhou odmocninu ze dvou, označme ji a , sice jako desetinný výraz napsat nemůžeme, ale protože zobrazení $f(x) = x^2$ je spojité, můžeme si být jisti, že dohodneme-li se na nějaké přijatelné toleranci, potom desetinné výrazy x dost blízké k a (něco z výrazů 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... s dostatečně mnoha desetinnými místy) bude přijatelné řešení, tj. x^2 je v rámci naší tolerance jakoby 2 (tj., skutečně dobrá náhrada požadovaného výsledku 2). Kdyby ale byla funkce f v rovnici

$$f(x) = A$$

The spaces obtained this way are important and useful (both in theory and applications) and often cannot be represented as standard Euclidean spaces or any of their parts. E.g., the temperature spaces above are such: they do not fit into any Euclidean space because of the dimension (which is here infinite). But it is just a simple case, the first reason that may cross one's mind. Metric spaces that do not fit into the classical Euclidean situations are plenty, for plenty of reasons, and a lot of them are particularly useful.

Continuity, continuous maps

I assume that the reader may not be particularly interested in mathematics. Still, I will venture to ask for willingness to get acquainted with a special concept (perhaps the most important one for understanding what spaces are about), namely that of *continuity*. First, not quite formally: Take two metric spaces (X, d) , (Y, d') and a mapping $f: X \rightarrow Y$ (recall that it means that for each point $x \in X$ we have a uniquely determined $f(x) \in Y$, say, by an arithmetic formula, for instance assigning to x its square x^2 . But we may have no nice formula; it is only necessary to have for each element from X something uniquely determined in Y). The mapping f is continuous if an arbitrary required bound of error in the result $f(x)$ (say: ' $f(x)$ has to be precise at least in three digits') can be guaranteed by keeping the possible error in the argument x in some bounds (say: ' x will be correct in the first five digits'). Now, more formally (and precisely):

For every x from X and for any $\epsilon > 0$ there exists a sufficiently small $\delta > 0$ such that if $d(x, y) < \delta$ we will have $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

You probably know it well anyway, and in that case, I apologize for the pedantry, but if not, please repeat it for yourself a few times to digest it.

Let us illustrate the importance of the concept on the very special case of solving equations. Take for instance the search for the square root of two, that is, solving the equation

$$x^2 = 2.$$

Stating that $x = 1.4$ is not true, same as starting that $x = 25$. Yet, the former is more acceptable than the latter. The square root a of two cannot be expressed as a finite decadic expression, but since the mapping $f(x) = x^2$ is continuous, we can be sure that if we agree on a tolerance of error then decadic expressions x sufficiently close to a (a sufficiently long expression x from the sequence 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...) will be an acceptable solution, that is, the x^2 will be, within our limits of tolerance, practically 2 (a good substitute of the required result 2). If, however, the function f in the equation

$$f(x) = A$$

nespojité v bodě a , který ji opravdu řeší, ale nejde napsat v dané číselné symbolice, nebylo by nám žádné přibližné řešení nic platné: od jisté požadované přesnosti $\pm \epsilon$ se $f(x)$ nemůže považovat za vhodnou náhradu požadovaného výsledku A , ať už je x ke skutečnému řešení a jakkoli blízko.

Několik důvodů, proč bylo potřeba strukturu prostoru rozšířit

Jak jsme viděli, struktura metrického prostoru umožňuje spojitost velmi snadno popsat a velmi dobře s ní pracovat a metrické prostory stále hrají zásadní roli v geometrii, analýze i jinde v matematice. To, o čem teď budeme mluvit, neznámá, že bychom jimi měli pohrdnout a úplně se jich vzdát. Přesto ale metrická struktura nemusí být z různých důvodů a pro různé účely uspokojivá. Tak třeba

- snadno vidíme, že nám, i když pracujeme v metrickém prostoru, často na konkrétní vzdálenosti vůbec nezáleží (například ani v tom tak základním pojmu spojitosti, i když v definici nahoře jsme vzdáleností užívali; možná budete překvapeni, jak snadno se to dá – ekvivalentně – popsat jinak), dokonce by povinnost se ji pevně držet byla přítěží;
- někdy máme dost jasno (viz příklady s barvami) co to znamená „blízko“ nebo „daleko“, nebo o dobré aproximaci, nebo o tom, že se něco k něčemu neomezeně blíží, aniž bychom to nějak číselně vyjadřovali;
- a třebaže v některých takových případech je možno (a třeba i s jistými výhodami) číselnou vzdálenost zavést, někdy to z principiálních důvodů vůbec nejde;
- a někdy metrická struktura nedovoluje některé potřebné konstrukce (součiny objektů, jako čtverec součin dvou úseček, krychle součin tří úseček atd., jsou velmi potřebné konstrukce, a někdy je potřeba užít součin nekonečně mnoha útvarů; to s metrickými prostory obecně udělat nejde).

To nutně vedlo ke snaze pojem prostoru nějak rozšířit (a vlastně také zjednodušit).

is not continuous in a point a which is a correct solution, but which cannot be expressed in the given number system, an approximation x of the a is of no use: if a precision requirement is demanding (if $\pm \epsilon$ is small), no $f(x)$ can be taken for a satisfactory substitution for A , however close the x to the a is.

Several reasons why the concept of space needs to be extended

We have seen that the metric structure provides a simple description of continuity, and it is also easy to work with. Metric spaces do play a fundamental role in geometry, analysis, and in other areas of mathematics. What we will discuss now does not mean that we should disdain them, or stop using the concept. Nevertheless, the metric structure may be for some uses, for various reasons, unsatisfactory. Thus for instance

- often, even if we work in a metric space, the concrete distance is not quite that important (for instance not even in the fundamental notion of continuity – although we did use the distance in the definition above; the reader will perhaps be surprised how we can characterize continuity otherwise, see below); in fact, keeping it fixed might be an encumbrance;
- sometimes we have a clear intuition (see the examples with colors) about what is ‘close’ or ‘far’, or on a good approximation, or that some procedure well approaches a result, without expressing it using numerical values;
- although in some of such cases we can (also to advantage) introduce a numerical distance function, in many other cases it is impossible, for principal reasons;
- sometimes the metric structure does not allow a construction one might need (recall how expedient it is to see the square as a product of two segments, or the cube as a product of three ones; sometimes one needs an infinite product, and it cannot be metrically done).

This led to tendencies to extend (and even perhaps simplify) the concept of space.

Konečně topologie: Hausdorff a okolí bodů

Pokusy, jak to udělat, byly různé, ale skutečný zlom přišel v Hausdorffově geniálním knize „Grundzüge der Mengenlehre“ [5] z roku 1914. Za základ prostorového myšlení zde byl zvolen pojem, který je jasný každému malému dítěti, totiž pochopení rozdílu mezi tím, jsem-li nějakou částí prostoru obklopen, nebo jsem jen na jejím kraji, rozdíl situace loďky, která odrazila od břehu a je obklopena vodou ze všech stran, a loďky, která přistála, je sice ve vodě, ale obklopená není, nebo, prozaičtěji, rozdíl mezi tím, když důkladně šlápnu do louže, a když s mnohem méně dramatickými následky projdu po okraji.

Struktura na množině X , která z ní dělá prostor, jak ji Hausdorff zavedl, a které dnes (v různých modifikacích, zejména v jedné, o které bude řeč za chvíli) říkáme *topologie* (a mluvíme o *topologickém prostoru*), spočívá v rozlišení, zda bod $x \in X$, který leží v podmnožině $U \subseteq X$, je touto podmnožinou obklopen, nebo ne; v prvním případě říkáme, že U je *okolí* bodu x .

Dovolím si zase trochu formálnější popis. Označme $\mathfrak{P}(X)$ množinu všech podmnožin množiny X . Topologií na množině X rozumíme přiřazení neprázdných systémů $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathfrak{P}(X)$ k bodům x (systémů okolí těch bodů) splňujících následující jednoduché požadavky:

- pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ je $x \in U$ (množina nemůže obklopit bod, který v ní neleží),
- je-li $U \in \mathcal{U}(x)$ a $U \subseteq V$, je $V \in \mathcal{U}(x)$ (obklopuje-li podmnožina nějaký bod, pak každá větší ho obklopuje též),
- jsou-li U a $V \in \mathcal{U}(x)$, je i $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$ (obklopují-li bod dvě množiny, pak jejich průnik ho obklopí také),
- pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $V \in \mathcal{U}(x)$ taková, že $U \in \mathcal{U}(y)$ pro všechna $y \in V$ (okolí bodu obklopuje též všechny body k němu dostatečně blízké).

(Hausdorff požadoval ještě jeden axiom. Prostory, které jsou jím vymezeny, jsou dnes zkoumány jako speciální případ. Je to případ velmi významný a ve studiu prostorů stejně běžný, jako kdy byl⁴, ale pro potřeby dnešní matematiky často potřebujeme prostory v uvedené větší obecnosti.)

4 — Jde o požadavek, aby kterékoli dva body měly disjunktní okolí (v takovém případě mluvíme o Hausdorffovy; prostoru). Uvědomte si, že třeba všechny metrické prostory jsou Hausdorffovy; ale to je jen velmi malá část třídy těchto prostorů.

Každý metrický prostor nese přirozenou topologii, totiž tu, kterou dostaneme, když prohlásíme U obsahující bod x za jeho okolí, pokud pro nějaké kladné číslo ϵ obsahuje též všechny body y , pro které $d(x, y) < \epsilon$, jinak řečeno, spolu s x obsahuje též všechny body k němu dostatečně blízké. Jeden z motivů pro rozšíření pojmu prostoru, o kterém jsme se na jednom místě dříve zmínili, bylo to, že i když pracujeme v metrickém prostoru, často nám na konkrétních vzdálenostech nezáleží. Ted' to mohu vyjádřit trochu lépe: velmi mnoho úvah je možno provést v řeči okolí a jejich vztahu, bez d a epsilonů.

Topology at last: Hausdorff and neighborhoods of points

There were several suggestions how to do it, but the real break came with the brilliant Hausdorff's book 'Grundzüge der Mengenlehre' (1914, [5]). The author chose to base the space intuition on the idea of the natural distinction of a set surrounding a point as opposed to one just including it: think of a ship in the middle of the lake as opposed to one landed on the pier (but still in water), or, less poetically, stepping into the middle of a puddle compared with a less dramatic careful walking on the brink.

The structure on a set X that makes it to a space as introduced by Hausdorff, and called today (in various modifications one of which will be discussed shortly) a *topology*, consists of distinguishing, for any $x \in X$ and any subset $U \subseteq X$ containing x , whether the point is surrounded by the subset or not.

Allow me to be slightly more technical. Denote by $\mathfrak{P}(X)$ the set of all subsets of X . A *topology* on X consists of associating with the elements (points) x of X non-empty systems $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathfrak{P}(X)$ (the systems of neighborhood) satisfying the following simple requirements:

- $x \in U$ for every $U \in \mathcal{U}(x)$ (a set cannot surround a point it does not contain);
- if $U \in \mathcal{U}(x)$ and $U \subseteq V$, then $V \in \mathcal{U}(x)$ (if a set surrounds a point, then every larger one does as well);
- if U and V are in $\mathcal{U}(x)$ then also $U \cap V$ is in $\mathcal{U}(x)$ (if two sets surround a point then so does their intersection);
- for each $U \in \mathcal{U}(x)$ there is a $V \in \mathcal{U}(x)$ such that $U \in \mathcal{U}(y)$ for all $y \in V$ (a neighborhood of x surrounds also all points sufficiently close to x).

(Hausdorff assumed one more axiom. The spaces characterized by that requirement are today considered as a special case. It is still very important⁴, but contemporary applications often need the space in the generality as introduced above.)

⁴ — It is assumed that any two distinct points have disjoint neighborhoods (in such case we speak of a Hausdorff space). For instance, all the metric spaces are Hausdorff; but they constitute only a very small part of the class of such spaces.

Every metric space carries a natural topology obtained by declaring a U a neighborhood of x whenever there is a positive ϵ such that all the y with $d(x, y) < \epsilon$ are in U . We have said above that even if we work in a metric space, the concrete distances often do not matter. Now we can state this better: much reasoning can be done in the language of neighborhoods, without the d and epsilons.

Modifikace: otevřené množiny

Nechceme zde zavádět příliš mnoho terminologie, ale něco přece jen potřebujeme. Řekneme, že

podmnožina $U \subseteq X$ je *otevřená*, je-li okolím každého svého bodu.

Tento pojem je velmi názorný, zejména mluvíme-li o podmnožinách prvků charakterizovaných nějakou vlastností („prvek velmi podobný prvku se zkoumanou vlastností tu vlastnost také ještě má“): třeba v již několikrát používaném prostoru barev, barva hodně podobná barvě nepochybně zelené je také ještě zelená. A také je technicky velmi výhodný, přinejmenším formální postupy jsou snadnější.⁵

5 — Ztráta názornosti, kterou by mohl někdo namítat – jistě nepopírám, že myšlení v okolích je velmi názorné, – je jen zdánlivá. Záleží na úhlu pohledu: vyjdeme-li z bezbodových představ, o nichž bude řeč dále, jsou otevřené množiny velmi přirozené.

Tak tedy, máme-li na množině X topologii definovanou v řeči okolí, máme na ní též dānu soustavu otevřených množin, označme ji třeba τ . Tato podmnožina $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$ (z důvodů, které budou patrné za chvíli, se také této soustavě, a ostatně dnes především této soustavě, říká *topologie na X*) má následující vlastnosti:

- \emptyset a X jsou v τ ,
- jsou-li U, V v τ , je $U \cap V$ v τ , a
- jsou-li $U_i, i \in J$ v τ , je $\bigcup_{i \in J} U_i$ v τ

(to snadno ověříte, a asi je užitečné cvičení to opravdu udělat). Takto popsaná *topologie na X* je struktura s velmi snadno zapamatovatelnými vlastnostmi: je to prostě podmnožina množiny všech podmnožin $\mathfrak{P}(X)$, která je uzavřená na všechna sjednocení a konečné průniky (a se sjednoceními a průniky množin byl snad každý v nějaké formě někdy seznámen). Názornost pohledu na prostor se možná nyní na chvíli trochu ztrácí, ale to později napravíme.

Musíme ale vysvětlit, jak je možné, že jsme si najednou mohli dovolit používat slovo „topologie“⁶ pro něco jiného než dříve. Právě popsané struktury jsou totiž ekvivalentní v následujícím smyslu: Podobně jako jsme mohli v řeči okolí definovat otevřenou množinu, máme-li pro začátek dānu soustavu otevřených množin (splňující požadavky (ot1), (ot2) a (ot3)), můžeme definovat

6 — Na tomto místě je asi dobře upozornit, že slovo „topologie“ se ostatně tak jako tak užívá ve více smyslech. Zatímco zde mluvíme o specifické struktuře, která z beztvaré množiny dělá prostor, asi jste ho slyšeli používat ve významu „ta část matematiky, která se zabývá topologickými a případně i jinými prostory“. Tak to budeme dále užívat také; čtenář se jistě vždy snadno zorientuje a bude vědět, o co zrovna jde.

okolí bodu x jako takovou množinu $U \subseteq X$, která obsahuje nějakou otevřenou V takovou, že $x \in V \subseteq U$

A modification: open sets

We do not wish to introduce too much new terminology, but we do need some more:

A subset $U \subseteq X$ is said to be *open* if it is a neighborhood of each of its points.

This concept is fairly lucid, in particular when we speak of subsets characterized by a property ('an element very similar to an element with the property in question still has the property'), for instance in the several times mentioned space of colors, a color similar to markedly green is still green. And it is technically of great advantage and some formal reasonings are simpler.⁵

5 — One may complain of a certain loss of transparency – undoubtedly thinking in neighborhoods can be more intuitive – but this will change with another perspective. If we accept a point-free view (to be introduced later), open sets will be most natural.

Hence, if we have on a set a topology defined in the language of neighborhoods, we have also specified the system of associated open sets; denote it by τ . This subset τ of $\mathfrak{P}(X)$ (for reasons which will be apparent shortly, this system is also called a *topology* – in fact, nowadays this usage prevails) has the following properties

- \emptyset and X are in τ ,
- if U, V are in τ then $U \cap V$ is in τ , and
- if $U_i, i \in J$ are in τ then $\bigcup_{i \in J} U_i$ is in τ

(it is easy to check, and it is a useful exercise to really do it). Note that topology thus described is a structure with properties very easy to remember: it is simply a subset of the set of all subsets $\mathfrak{P}(X)$ which is closed under all unions and finite intersections (and it may be assumed that everyone has got acquainted with unions and intersections in some form or other). The space intuition, on the other hand, may be for a moment blurred; this will be later mended.

But we must explain why we could dare to use the word 'topology' for something else than before⁶. The two structures described are equivalent in the following sense: When we start with neighborhoods we can define open sets as we have done above. Similarly, if we start with a system of open set (satisfying (o1), (o2) and (o3)) we can define a neighborhood of a point x as

6 — Here is perhaps in order to mention that the word 'topology' has several uses anyway. While we speak here of specific structures making a space from an amorphous set, you may have heard it used in the sense of 'the area of mathematics concerning topological and sometimes also other spaces'. Such usage hardly creates confusion: the reader certainly easily understands what is being meant.

any $U \subseteq X$ containing an open V such that $x \in V \subseteq U$

(again, it is a useful exercise to check that thus we get a system satisfying (n1)–(n4)). But this is, of course, not all. The important fact is that, if you start with a system of neighborhoods and define open sets by the rule (1), and when taking them you define new neighborhoods following the rule (2), you will learn that you are back at

(zase je užitečné cvičení ověřit, že tak dostaneme systém splňující (ok1)–(ok4)). A to samozřejmě není všechno. Podstatné je, že pokud začnete s nějakým systémem okolí a definujete otevřené množiny pravidlem (1) a když tento máte a definujete nová okolí pravidlem (2), zjistíte, že jste získali stejnou soustavu okolí, jako byla ta, se kterou jste začali, a stejně tak pokud začnete se systémem otevřených množin a definujete okolí pravidlem (2) a když tato máte a definujete nové otevřené množiny pravidlem (1), zjistíte, že jsou to přesně ty, se kterými jste začali. Takže je úplně jedno, vezmete-li okolí za základní pojem a otevřenost dodefinujete, nebo začnete-li otevřenými množinami a dodefinujete okolí: struktura prostoru bude stejná.

Velmi jednoduchá formule pro spojitost a k čemu vede

Slíbili jsme velmi jednoduchý popis spojitosti. K tomu budeme potřebovat trochu dalších termínů, které snad ani nebudou tak nové. Na zobrazení $f: X \rightarrow Y$ jedné množiny do druhé jste si už zvykli a jistě přijmete jako názorný pojem *obrazu podmnožiny* $A \subseteq X$ při takovém zobrazení, totiž

$$f[A] \subseteq Y, \text{ množiny všech } f(x), \text{ kde } x \in A$$

– je to prostě otisk té podmnožiny provedený daným zobrazením. Přidejme k tomu pojem *vzoru podmnožiny* $B \subseteq Y$ v X , totiž

$$f^{-1}[B] \subseteq A, \text{ množiny všech } x \in A, \text{ pro které } f(x) \text{ je v } B.$$

Spojitosť, jak je definována pro metrické prostory, je v řeči okolí (v metrickém prostoru ve smyslu okolí popsaných při vysvětlení přirozené metrické topologie) snadno přeložena takto

f je spojitý, právě když pro každé $x \in X$ a pro každé okolí V bodu $f(x)$ v prostoru Y existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.

Názornost je stále stejná, ale také to není to, co jsem sliboval, je to stejně složité jako dřív. V řeči otevřených množin, když opatříme X topologií τ a Y topologií θ však dostaneme tuto charakteristiku:

f je spojitý, právě když pro každou $V \in \theta$ je $f^{-1}[V] \in \tau$

tj., právě když vzory otevřených množin jsou otevřené. Jistě uznáte, že je to podmínka velmi jednoduchá. A s předchozí je opravdu (možná trochu překvapivě) ekvivalentní. Samozřejmě, není to zrovna názorné, ale skvěle se s tím pracuje.

the system you had started with; if you start with a system of open sets and define neighborhoods following the rule (2) and when, using them, you define new open sets by (1), you will learn they are precisely those you had started with. Thus, it does not matter whether you take neighborhoods as the basic concept and define open sets, or when open sets are given first and neighborhoods are defined.

A very simple formula for continuity, and what follows

A while ago we promised a very simple characterization of continuity. We will need some more terminology (in fact it will hopefully not be all that new). You have got used to mappings $f: X \rightarrow Y$ from a set into another one, and certainly will accept the concept of the *image of a subset* under such a mapping, namely

$f[A] \subseteq Y$, the set of all the $f(x)$ with $x \in A$

– it is simply the imprint of A into Y by the mapping. Let us add the – almost equally transparent – notion of the *preimage*

$f^{-1}[B] \subseteq A$, the set of all the $x \in A$ for which $f(x)$ is in B .

Continuity as defined for the metric spaces (recall the natural neighborhoods associated with the metric structure mentioned above) is easily translated to:

f is continuous if and only if for every $x \in X$ and every neighborhood V of $f(x)$ in Y there exists a neighborhood U of x such that $f[U] \subseteq V$.

The intuition is the same as before, but it is not what I promised: it is as complicated as before. However, in the language of open sets, when X is endowed with a topology τ and Y with a topology θ we obtain another characterization:

f is continuous if and only if for every $V \in \theta$ we have $f^{-1}[V] \in \tau$,

that is, if and only if the preimages of open sets are open. You will acknowledge it is a very simple condition; it is (perhaps surprisingly) in fact equivalent to the previous one. Admittedly, it is not quite so intuitive and transparent, but it is very expedient to work with.

And it has more advantages. The images of (general) subsets create for a mapping $f: X \rightarrow Y$ another one, $f^{-1}[-]: \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$. This has a nice property which will be appreciated by those who had to do with homomorphisms of algebras. Namely, one has

$$f^{-1}\left[\bigcup_i A_i\right] = \bigcup_i f^{-1}[A_i] \quad \text{and} \quad f^{-1}\left[\bigcap_i A_i\right] = \bigcap_i f^{-1}[A_i],$$

A přináší to ještě další výhody. Vzory podmnožin vytváří při zobrazení $f: X \rightarrow Y$ zobrazení $f^{-1}[-]: \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$, které má hezkou vlastnost, kterou jistě ocení ti, kteří měli co dělat s homomorfismy algeber. Platí totiž, že

$$f^{-1}\left[\bigcup_i A_i\right] = \bigcup_i f^{-1}[A_i] \quad \text{a} \quad f^{-1}\left[\bigcap_i A_i\right] = \bigcap_i f^{-1}[A_i],$$

tj., zobrazení $f^{-1}[-]$ zachovává sjednocení a průniky. Z definice je topologii (danou) otevřenými množinami možno chápat jako algebru s dvěma operacemi, operací libovolných sjednocení a operací konečných průníků, a následkem toho, co jsme právě vypočítávali, máme s každým spojitým zobrazením $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$ spojený jakýsi homomorfismus

$$h = (U \mapsto f^{-1}[U]): \theta \rightarrow \tau.$$

To sehraje významnou roli.

Svazy

Nevím, jak úspěšné byly pokusy s množinami ve školské matematice. Bojím se, že to žáky spíš nudilo. Něco vám však možná utkvělo v paměti, totiž to, že s podmnožinami nějaké množiny se operuje trochu jako s čísly. Bylo zde *sjednocení*

$$A \cup B,$$

které vypadalo trochu jako sčítání (a prázdná množina, která byla něco jako nula, $A \cup \emptyset = A$), a byl zde *průnik* $A \cap B$, který byl, při dobré vůli, něco jako násobení, přinejmenším v tom, že se k našemu novému sčítání choval distributivně:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad \text{srovnejte s} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(a byla zde také nekonečná sjednocení a nekonečné průniky, to už podobnost představ s čísly tolik nevyvolávalo).

Jistě jste si také všimli, že v matematice vůbec máme kromě aritmetiky řadu užitečných kalkulů a že aritmetické operace nejsou ty jediné operace se kterými se dá něco dělat. Sjednocení a průniky jsou takový případ. Obecněji, strukturu uspořádání někdy obohacujeme (pokud to jde, na každé uspořádané množině to nejde) na strukturu tzv. **7 svazu**, v němž k dvěma prvkům a, b přiřazujeme *spojení* $a \vee b$, nejmenší prvek, který je stále ještě větší než oba a i b (to bylo to

7 — Příklady svazů se to kolem nás jen hemží, a potíž člověku pro začátek dělá spíš to, že je jich hodně, a odlišných. Když jsme se ve škole seznamovali s novými a novými číselnými soustavami (přirozenými, celými, racionálními, reálnými, komplexními čísly), sčítání bylo stále nějak to samé, rozhodně se to vešlo do jedné intuice. Zde máme příklady, které budí intuice značně odlišné. Vezměme např. běžně uspořádaná reálná čísla, v nichž je $a \vee b$ prostě větší z těch dvou čísel a $a \wedge b$ to menší z nich; nebo přirozená čísla uspořádaná dělitelostí, kde $a \vee b$ je nejmenší společný násobek a $a \wedge b$ největší společný dělitel. Pro naše účely se představa něčeho jako sjednocení a průnik množin bude hodit velmi dobře, ale mějte na paměti, že to tak vždycky nevypadá.

that is, the mapping $f^{-1}[-]$ preserves unions and intersections. A topology defined as a system of open sets can be viewed as an algebraic system with two operations, that of arbitrary unions, and that of finite intersections. Hence, we have just observed that with each continuous mapping $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$ we have associated a sort of homomorphism

$$h = (U \mapsto f^{-1}[U]): \theta \rightarrow \tau.$$

This will play a key role.

Lattices

I do not know how successful introducing sets into secondary school mathematics was. I fear the students were not much captured by the subject. But it may have stuck in the memory that one operated with subsets of a set in a way that recalled operating with numbers. There were the *union*

$$A \cup B$$

that resembled addition (and the void set resembling zero, $A \cup \emptyset = A$), and there was the *intersection* $A \cap B$, something resembling the multiplication at least in the distributive behavior with the ‘addition’:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \text{ compare with } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(and there were of course the infinite unions and infinite intersection, not so much resembling the operations with numbers).

You have certainly noticed that in mathematics there are, besides arithmetic, also other useful calculi and that arithmetic operations are not the only operations with which one can obtain results. The unions and intersections are such cases. More generally, some structures of order (not all, but many) can be completed to algebraic structures called *lattices*.⁷ In a lattice we associate with any pair a, b the *join* $a \vee b$, the least element that is still larger than both a and b (such was the union $A \cup B$, the smallest set containing A and B), and the *meet* $a \wedge b$, the largest element that is still smaller than both a and b (such was the intersection $A \cap B$, the largest set contained in both A and B). If we have such joins and meets

7 — Examples of lattices are galore; the problem to build a good intuition is, rather, that they can substantially differ. When getting acquainted with new systems of numbers (natural, rational, real, complex ones), the addition was somehow always the same. Here the examples can look rather dissimilar. Take the standard ordered numbers (integers, rationals, reals): the join $a \vee b$ is simply the larger of a, b (and $a \wedge b$ is the smaller one). If we take natural numbers ordered by divisibility, $a \vee b$ is the smallest common multiple and $a \wedge b$ is the largest common divisor. For our purposes, the ideas of unions and intersection will do well, but remember it does not always look like that.

sjednocení, nejmenší podmnožina, která A i B obsahovala), a *průsek*, největší prvek, který je stále ještě menší než oba a i b (to byl v případě podmnožin nějaké množiny ten průnik). V případě, že taková spojení a průseky máme k libovolným soustavám prvků, je obvykle označujeme

$$\bigvee_{i \in J} a_i \quad \text{resp.} \quad \bigwedge_{i \in J} a_i$$

(anebo jinak, podle potřeby) a mluvíme o *úplném svazu*.

Body klasické geometrie a ostatně také klasické topologie

Jste asi zvyklí na představu o bodu jako o jakési velmi malé tečce. Tak malé, že má nulový průměr. Nic tak malého sice kolem sebe nevidíte, a když kreslíte geometrické obrázky, jistě vaše body nějaký nenulový průměr mají. Ale to nevadí, kdyby bylo potřeba, pokusíme se je vyznačit tečkami ještě menšími, a kdyby ani to nestačilo a bylo to v našich možnostech, zmenšovali bychom je dále. Tedy vlastně bychom si mohli představit, že bod jakoby lokalizujeme zmenšujícími se místy

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n \supseteq \dots$$

s průměry stále kladnými, ale zmenšujícími se pod každou kladnou hodnotu (vzpomeňte si na příklad s odmocninou ze dvou, o kterém jsme mluvili v souvislosti se spojitostí; vidíte analogii?). Pro účely počítání se samozřejmě vrátíme k představě bezrozměrné tečky. Kdybychom trvali na pedanticky realistickém popisu bodu (a číselných hodnot), bylo by to jako kdybychom na každém kroku stále odhadovali a korigovali přibližnost.

Ale my teď nechceme nic počítat, chceme se přiblížit k realistickému popisu struktury prostoru, a zde bychom se tajemných bezrozměrných teček, se kterými se nikdo nikdy nesešel, docela rádi zbavili.

Obecná geometrie bez bodů

Teď musím předeslat, že to, co budu popisovat, neodpovídá skutečnému vývoji bezbodové topologie. Nezačalo to prostě hledáním realistického popisu prostoru; historie je složitější. Spíše se sešlo více konkrétních motivací spojených s vývojem topologie i jiných oborů: některé přišly z logiky, některé z podivuhodných souvislostí mezi zajímavými topologickými a algebraickými útvary (Stoneova dualita, [14]), bylo zde též využití kalkulu teorie svazů pro klasickou topologii (Wallman, [15]), a další (např. [10, 11]). Snad je jen potřeba říci, že začátky vývoje bezbodové topologie se datují do třicátých let 20. století a vlastně implicitně ještě dále.

for all systems of elements (the set of subsets of a set was such a case) we speak of a *complete lattice*; the usual notation is

$$\bigvee_{i \in J} a_i \quad \text{resp.} \quad \bigwedge_{i \in J} a_i$$

(but it can vary).

Points of classical geometry, and of classical topology as well

You are probably used to think of a point as of a sort of very small dot, so small that its diameter is zero. You see nothing quite so small in the space around you, and if you draw a geometric diagram, your points certainly have a non-zero diameter. But never mind, if the diagram is too rough, we can try to draw the picture with smaller dots, and if it is still not satisfactory, and if it is possible, we may make them smaller still. Hence, we can think of a point as something localized by a diminishing sequence of spots

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n \supseteq \dots$$

with diameters positive, but eventually diminishing under any positive value (recall the example with the square root of two introduced in relation to continuity; do you see the similarity?). For numerical purposes we will, of course, stay with the idea of the infinitely small dot: if we tried to compute pedantically with realistic spots (or numerical values) we would have to estimate and correct errors in approximations in every step.

But now we do not wish to compute anything. Rather, we would like to attempt a realistic description of space, and here we would like to get rid of the mysterious dots with zero width.

General geometry without points

Now I have to say, first, that I am not going to report on the actual history of point-free topology. It is much more complicated: in fact, there met distinct motivations related to the development of topology but also other areas. There were motivations from logic, then some remarkable relations between topological and algebraic objects (Stone duality, [14]), or an application of the lattice calculus in classical topology (Wallman, [15]), and others (e.g. [10,11]). Let me just state that the roots of point-free topology date to the thirties of the 20th century, and implicitly perhaps even farther back.

Představme si ale, že bychom chtěli popsat realisticky prostor kolem nás. (Ale třeba i v jiných situacích, které si představujeme zadány realistickými údaji, které to, čemu chceme porozumět, nějak aproximují.) Za základní pojem zvolíme pojem *místa* (s tím slovem nejsem zrovna moc spokojen, lepší, ale zřejmě nespisovné, by bylo slovo *flek* – dobrá náhrada za anglické slovo *spot*, které znamená „místo“ i „skvrnu“). Jaké vlastnosti by soustava X takových míst měla mít? Tak především je to (částečně) uspořádaná množina:

Některá místa x, y se dají srovnat, $x \leq y$; to si představme tak, že první je částí druhého, ale nejde o inkluzi množin, ta místa nejsou množiny bodů, jako víme, že kus dortu je částí toho dortu, aniž bychom si museli představovat něco jako body dortu.

Dále:

skupiny míst se mohou slepit a vytvořit nové místo. To bude nejmenší místo obsahující všechna ta místa dohromady sestavovaná (slepovaná). Takže naše uspořádaná množina je úplný svaz.⁸

8 — Částečně uspořádaná množina, ve které mají všechny podmnožiny spojení, mají také všechny podmnožiny průseky. To je známá a velmi jednoduchá věta o uspořádání. Máme-li tedy všechna spojení, je naše množina úplný svaz již kvůli tomu.

Konečně:

Obecné průseky nás nemusí příliš zajímat (i když v úplném svazu tak jako tak jsou). Ale zajímají nás průseky dvou míst, totiž hlavně to, jestli se dvě místa dotknou, nebo ne, to jest, jestli je jejich průsek nenulový nebo nulový. A zde je přirozené požadovat, aby místo, které se dotklo místa slepeného z nějaké skupiny míst, se muselo dotknout některého jednotlivého místa z této skupiny. Tedy formálně

pokud je $\left(\bigvee_{i \in J} a_i\right) \wedge b \neq 0$ je $a_i \wedge b \neq 0$ pro některé jednotlivé a_i .

Tento požadavek je jen o málo slabší než technicky mnohem pohodlnější distributivní pravidlo

$$(\bigvee a_i) \wedge b = \bigvee (a_i \wedge b) \quad (\text{frm}),$$

kterého se přidržíme, nejen proto, že se s ním dobře počítá, ale především proto, že je to charakteristická vlastnost svazu otevřených množin.

Tak jsme nakonec skončili u toho, že přirozený prostor by se dal popsat jako *úplný svaz splňující distributivní zákon* (frm). Pro takový svaz byl zaveden anglický termín *frame* a český termín nemáme, říkáme taky „frame“, a tak to budu tady dělat také (je to především krátké slovo). Rám znamená něco jiného a rámeček je slovo příliš obecné. Všimněte si, že jsme se s takovými útvary již setkali: svaz otevřených množin topologického prostoru je typický frame. A uvědomte si, že v běžných klasických prostorech bez izolovaných bodů jsou otevřené množiny taková názorná

However, imagine we would like to describe a realistic space that we observe around ourselves (or perhaps also other situations we imagine approximated by realistic data). As a basic concept we will choose a realistic *spot*. What properties do we expect a system of such spots should have? First of all it is a (partially) ordered set:

Some pairs x, y of spots can be compared, $x \leq y$, x is seen contained in y . The idea is that the former is a part of the latter, but we do not have in mind an inclusion of sets. Spots are not sets of points; similarly like we speak of a piece of cake without thinking of the cake as a set of points.

Next:

A system of spots can coagulate (glue together) to form a new spot. It will be the smallest spot containing all the spots to be glued together. Thus, our partially ordered set will be a complete lattice.⁸

⁸ — If in a partially ordered set all the subsets have joins then each of the subsets also has a meet. This is a well-known (and easy) theorem on partial order. Hence, if we have all joins we also have all meets, and our set of spots is a complete lattice already because of the joins.

And finally:

We are not so much interested in general meets (although we have them in the complete lattice anyway). But a basic geometrical question is whether two spots touch or not, that is, whether the meet is zero or not. And here it is natural to assume that a spot touching a result of coagulation of a system of spots touches some individual spot from . Hence formally:

$$\text{if } \left(\bigvee_{i \in J} a_i \right) \wedge b \neq 0 \text{ then } a_i \wedge b \neq 0 \text{ for some individual } a_i.$$

This assumption is only a little bit weaker than the technically more comfortable distributivity rule

$$(\bigvee a_i) \wedge b = \bigvee (a_i \wedge b) \quad (\text{frm})$$

which we will keep, not only because it is easier to work with, but first of all because it is a characteristic property of the lattice of open sets of a topological space.

Thus, we have finished with the suggestion to describe a natural space as *a complete lattice satisfying the rule (frm)*. Such lattices are called *frames*. Note that the lattice of open sets of a topological space is a frame and realize that in classical spaces (you can think of metric ones) without isolated points, open sets are the ‘realistic spots’ that can be very small, but always with a non-trivial extent. Maybe you have already begun to see in which sense the description of topology by open sets is not only much simpler, but also intuitively more satisfactory than it appeared at a first glance: it emphasizes the geometry of the space as the relations between its easily imaginable parts.

místa, která v typických případech prostorů mohou být libovolně malá, ale vždy s nějakým nenulovým rozsahem. Možná vám už teď začíná připadat popis topologie pomocí otevřených množin nejen jednodušší, ale také názornější než se mohlo zdát na první pohled: zdůrazňuje z prostoru jeho geometrii tvořenou přirozenou strukturou realisticky představitelných míst. Ale začne v nás také hlodat pochybnost: Zdá se, že chceme redukovat topologický prostor jen na vztahy mezi otevřenými množinami. Nejednodušíme si to příliš? Nezbude nám z informace o prostoru příliš málo? Vždyť v prostoru je kromě otevřených množin spousta jiných zajímavých podmnožin (typicky o hodně složitějších) různě prokombinovaných s body a pomocí bodů, a ty přece v prostorových záležitostech hrají velkou úlohu.

K značnému překvapení zjistíme, že u běžných prostorů (asi všech takových, se kterými jste se kdy setkali) žádnou informaci neztrácíme. A nejen to, spoustu nového získáme, ale to předbímám.

Popis spojitých zobrazení

Na námitku o možné ztrátě informace odpovíme úplnou rekonstrukcí topologického prostoru z jeho svazu otevřených množin. Půjdeme trochu oklikou, během které odpovíme také na otázku, jak je to se spojitými zobrazeními. Pozorný čtenář má asi už nějaké pochybnosti také v tomto směru: spojitost jsme na jednom místě označili za možná nejdůležitější pojem pro chápání co je to prostor, a teď se tomu nějak vyhýbáme. To musíme napravit.

Trochu si zjednodušíme značení. Pro topologický prostor budeme používat jen jedno písmeno, X místo dřívějšího (X, τ) , a místo toho τ budeme psát $\Omega(X)$ („svaz otevřených (pod)množin prostoru X “). Vzpomínáte si na ten homomorfismus h , nyní z $\Omega(Y)$ do $\Omega(X)$, posílající U do $f^{-1}[U]$? Mluvili jsme o něm v oddílu „Velmi jednoduchá formule pro spojitost a k čemu vede“. Když nyní zavedeme pojem

framový homomorfismus $h: L \rightarrow M$

jako zobrazení framu L do framu M zachovávající všechna spojení a konečné průseky, vidíme, že ke každému spojitému zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je přiřazen framový homomorfismus $\Omega(f): \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$, totiž to h . To by samo o sobě třeba nebylo tak zajímavé, ale toto určitě je:

Pro tzv. střízlivé prostory⁹ je každý framový homomorfismus $h: \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ roven $\Omega(f)$ pro jednoznačně určené spojitě zobrazení $f: X \rightarrow Y$.

9 — Velká třída prostorů zahrnující např. všechny Hausdorffovy (a tedy speciálně všechny metrické) prostory.

Tedy: jiné framové homomorfismy než ty, které jsou přiřazeny ke spojitým zobrazením prostorů, zde nejsou!

Surprisingly, we will learn that in typical spaces (probably all the spaces you have ever got acquainted with: for instance, all the Hausdorff ones mentioned above) no information is lost. And not only that, in fact we gain a lot. But here I am jumping ahead, just wait.

Describing continuous mappings

We will answer the concern with possible loss of information by a complete reconstruction of a topological space from the associated lattice of open sets. On the way we will deal, first, with a representation of continuous maps. An observant reader has probably already got some doubts in this direction: a while ago we claimed that continuity is perhaps the most important aspect of understanding spaces; but so far it may seem that we have somehow tried to avoid it. That must be set right.

We will adjust our notation. For a topological space we will use just one letter, X instead of (X, τ) , and instead of the τ we will write $\Omega(X)$ ('the lattice of open sets of a space X '). Do you remember the homomorphism h , now mapping $\Omega(Y)$ to $\Omega(X)$, sending U to $f^{-1}[U]$? It was discussed in the section 'A very simple formula for continuity, and what follows'. If we now introduce the notion of a

frame homomorphism $h: L \rightarrow M$

as a mapping from a frame L into a frame M preserving all joins and all finite meets, we see that with each continuous mapping $f: X \rightarrow Y$ there is associated a frame homomorphism $\Omega(f): \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$, namely the h above. This, just by itself, would not be quite so interesting, but the following certainly is:

For so called sober spaces⁹ each frame homomorphism $h: \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ is an $\Omega(f)$ for a uniquely defined $f: X \rightarrow Y$.

⁹ — A large class of spaces including for instance all the Hausdorff (and hence in particular all the metric) ones.

Hence: there are no frame homomorphism but those uniquely associated with continuous mappings!

Hence: frame homomorphisms between lattices of open sets perfectly represent open mappings between the sober spaces in question. It happens in the reversed direction, and what precisely I have in mind by the representation might yet need some discussion, but this will be at the moment unnecessarily technical.¹⁰ However, you certainly realize that if I can represent continuous maps $f: X \rightarrow Y$, I can also represent points that are in a trivial one-to one correspondence with (trivially) continuous mappings $P \rightarrow X$, where P is a space constituted by a single point. And having had reconstructed the points, we need just one more (easy) step to reconstruct the space with everything.

¹⁰ — May be you also ask whether the representation can be replaced by something facing in the original, somewhat more intuitive, direction. It can be done.

Framové homomorfismy mezi svazy otevřených množin tedy dokonale reprezentují spojitá zobrazení mezi příslušnými střízlivými prostory. Děje se to sice v obrácených směrech, a jak přesně to s tou reprezentací myslím by možná také ještě potřebovalo trochu diskuze, ale ta by asi byla v dané chvíli zbytečně technická.¹⁰ Jistě ale vidíte, že mohu-li dobře reprezentovat spojitá zobrazení $f: Y \rightarrow X$, mohu reprezentovat i body prostoru X , které jsou v triviálním vzájemně jednoznačném vztahu s (triviálními) spojitými zobrazeními $P \rightarrow X$, kde P je prostor sestávající z jediného bodu. A když tako rekonstruujeme body, je již jen krok k tomu, abychom prostor rekonstruovali se vším všudy.

10 — Možná by vás také zajímalo, jestli by reprezentace nemohla být nahrazena něčím v původním, a tedy názornějším směru: jde to.

Ale přece jen: k čemu je bezbodový přístup dobrý?

Když jsme zjistili, že bezbodovým přístupem toho asi moc neztrácíme, měli bychom se věnovat oprávněné otázce, jestli vůbec něco získáme. První, co vás asi napadne, je toto:

- buď takto dostaneme jen reprezentaci klasických topologických prostorů, a potom to nabízí jen novou techniku a kdo ví, jestli nedostaneme jen jinak (a možná složitěji) dokazovaná známá fakta, nebo fakta sice nová, ale taková, že bychom na ně klasickými postupy přišli také,
- nebo se tím pojem prostoru rozšiřuje a zobecňuje, a potom je otázka, zda o nějaké nové prostory vůbec stojíme.

Na to odpovím hned. Jde o rozšíření, a to velmi podstatné. Takže se budeme ptát spíš takto:

- Přináší obecnější prostory (větší třída) prostorů nové výsledky, v nějakém smyslu lepší?
- A dostáváme případně také něco nového o klasických prostorech, něco, na co bychom jinak nepřišli?

Odpovědi na obě otázky jsou velmi uspokojivé.

K první z nich: Rozšíření zde není ten typ zobecnění, při němž ubíráme vlastnosti. Spíš to připomíná přechod od reálných čísel k číslům komplexním, v tom smyslu, že dovoluje konstrukce, které předtím nefungovaly. Tak třeba v otázce parakompaktních prostorů, velmi důležitých v některých aplikacích: tam jsou klasické možnosti velmi omezené, již se součiny jsou nepřekonatelné potíže. Bezbodové prostory dovolují nejen všechny součiny, ale všechny kategoriální limity a kolimity: prostě některé konstrukce vyjdou mimo klasický rámec, jako když rovnice zadané v reálných číslech řešení v rámci komplexních čísel řešení obecně mají, ale ne vždy reálná. Také, trochu jiná záležitost, některá fakta jsou jiná než v klasickém rámci, a v jistém smyslu hezčí.

But still: is the point-free approach really of some use?

Having observed that the point-free approach probably does not lead to losing much information, we should now attend to the legitimate question whether we, on the other hand, do gain something. The misgivings that may probably come to mind are that

- either we will just have a new representation of classical spaces (and some new techniques); then, who knows, we may obtain nothing but newly (and perhaps clumsily) proven known facts, or facts new, but such that we could have obtained them classically as well; or
- the concept of space is extended and generalised; then we should ask whether we care for such a generalization at all.

This can be answered right away. It is an extension of the concept, and a fairly substantial one. Hence, we will, rather, ask otherwise:

- Do the more general spaces yield new results, and are some of them, in some sense, better?
- And do we perhaps also learn something new about classical spaces, something which would otherwise remain hidden?

The answers to both questions are satisfactory.

To the first one: The extension is not the type of generalization in which one removes some of the properties. It reminds, rather, of the transit from real numbers to the complex ones, in the sense that it allows constructions that have not worked before. Thus, for instance, there is the case of paracompact spaces, important in applications, where classically some constructions are rather restricted: already products cause insurmountable troubles. Point-free spaces allow not only all products, but also all categorical limits and colimits: results of some of such constructions are simply beyond the classical boundaries, similarly like solutions of equations with real coefficients that always exist in the complex realm, but are not always real. – Also, some facts, differing from their classical counterparts, are somehow prettier.

Concerning the second question let me first mention that the structure of subobjects is here richer than in the classical theory, and that a classical space can have, besides classical subspaces, also non-classical subobjects (typically so, the absence of such subobjects is an exception) playing a significant role (sometimes even fairly intuitive, so that one easily perceives their lack in the classical theory).

But I would like to emphasize some results (probably unexpected; I am not aware of related impulses in the early motivations for the point-free reasoning). I must explain something (who knows will excuse me). There is a proof tool called the Axiom of Choice (with variants; one speaks of choice principles) often used in mathematics.

U druhé otázky bych se nejprve zmínil o tom, že struktura podobjektů je zde bohatší než v klasické teorii, a že i klasický prostor má kromě běžných podprostorů též neklasické podobjekty (a to typicky, opačná situace je spíš výjimka), které hrají velmi užitečnou roli (a někdy jsou i velmi názorné a v klasické teorii viditelně schází). Ale zvlášť se chci zmínit o celé řadě výsledků, které asi sotva kdo očekával (ani nevím, zda se v motivacích pro bezbodový přístup na takové cíle pomyslelo). Musím ale nejdříve něco vysvětlit, kdo to zná, ať mi promine. V matematice se užívá jako jeden z důkazových prostředků tak zvaný Axiom výběru (nebo jeho varianty, mluvíme o výběrových principech). Je to prostředek velmi užitečný, ale má háček. Dokážeme-li takto existenci řešení nějakého problému, není vidět, jak bychom ho konkrétně mohli najít (spočítat), a bylo-li použití výběrového principu nutné, je to opravdu beznadějně: teoreticky něco máme a prakticky to nejde. Ukázalo se, že mnohá fakta, která klasicky *nutně* potřebují výběrový princip, jsou bezbodově zcela konstruktivní; asi tedy nepřekvapí, že v teoretické informace (zejména v matematické logice spojené s informatikou) se bezbodovým prostorům a pojmům z nich vycházejícím nyní často dává přednost.

A na tomto místě budu končit. Sice jsme se nedostali moc daleko (jako by třeba úvod do euklidovské geometrie skončil zavedením Euklidových axiomů a o práci s nimi, konstrukcích a faktech by už nic dále nepokračovalo), ale snad jste si udělali představu, čeho se topologie jako teorie prostoru a obecná geometrie týká. Jen musím ještě upozornit, že vše se točilo kolem toho oboru, kterému se říká (možná, že ne moc trefně) množinová topologie. O překrásných otázkách globálních vlastností tvarů studovaných v kombinatorické a algebraické topologii zmínka vůbec nebyla.

Pokud byste se přece jen chtěli seznámit s tím, jak od základů teorie pokračuje, můžete se podívat do Johnstonova článku [7] (od jeho publikace sice uplynula dlouhá doba, vývoj mezitím velmi pokročil a obor se rozrostl, ale četba je to dosud podnětná; viz též [8]), nebo do úvodních partií monografií [6] nebo (podstatně novější) [12]. Zcela nedávná monografie [13] je sice velmi speciální, ale úvod v ní je určen všem. Pro klasickou topologii je možno doporučit nestárnoucí [9], nebo knihu [2] a zejména velmi obsažnou [4]. O metrických prostorech se čtenář může hodně dozvědět třeba v [1]. Ve zmíněných publikacích je samozřejmě uvedena bohatá další literatura.

It is a useful trick, but there is a catch. If we use it to prove the existence of solution of a problem there is no hint how to concretely find (or compute) it. And if the use of a choice principle is necessary, the situation is rather hopeless: we have something in theory, but practically it is not feasible. It has turned out that a number of facts requiring in the classical theory *necessarily* a choice principle are in the point-free variant fully constructive. Thus, it is hardly surprising that in the theoretical computer science (particularly in the formal logic connected with computer science) the point-free approach is often preferred.

And here I will finish. We have not got very far (admittedly, it is as if an introduction to Euclidean geometry would finish with introducing the axioms, without showing how they are used, and without discussing some interesting constructions and facts), but hopefully you now have some idea what topology and general theory of spaces about is. However, I must point out that everything we spoke about concerned what one calls (perhaps not quite aptly) the set topology. We have not spoken at all about the most beautiful questions of the global properties of shapes studied in combinatorial and algebraic topology.

If you would still like to get acquainted with how the theory proceeds, you can open the excellent Johnstone's paper [7] (although it was published quite a while ago, and the development was very considerable since, it is still a useful reading; see also [8]), or the introductory parts of the monographs [6] or (much more recent) [12]. A quite recent monograph [13] concerns very special topics, but the introduction is addressed to general readership. For the classical topology one can recommend the ageless [9], or [2], and in particular the very comprehensive [4]. About metric spaces one can learn a lot for instance in [1]. In all the mentioned texts one can, of course, find rich further references.

Literatura

1. E. Čech, *Bodové množiny*, Academia, Praha (1966)
2. E. Čech, *Topologické prostory*, NČSAV, Praha (1959)
3. R. Descartes, *Geometrie*, OIKOYMENH, Praha (2011)
4. R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin (1989)
5. F. Hausdorff, *Grundzüge der mengenlehre*, Veit & Co., Leipzig (1914)
6. P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3. Cambridge University Press, Cambridge (1982)
7. P. T. Johnstone, The point of pointless topology, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 8 (1983), 41–53
8. P. T. Johnstone, Elements of the history of locale theory, In: *Handbook of the history of general topology*, vol. 3, s. 835–851, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2001)
9. J. L. Kelley, *General Topology*, The University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand (1955)
10. K. Menger, *Topology without points*, Rice Institute Pamphlet, 27 (1940), s. 80–107
11. J. C. C McKinsey and A. Tarski, *The algebra of topology*, *Ann. Math.*, 45 (1944), 141–191
12. J. Picado and A. Pultr, *Frames and Locales: topology without points*, *Frontiers in Mathematics*, Vol. 28, Birkhäuser (Springer) (2012)
13. J. Picado and A. Pultr, *Separation in Point-Free Topology*, Birkhäuser (Springer) (2021)
14. M. H. Stone, *The theory of representations of Boolean Algebra*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 37–111
15. H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, *Ann. Math.* 39 (1938), 112–126

References

1. E. Čech, *Bodové množiny*, Academia, Praha (1966)
2. E. Čech, *Topologické prostory*, NČSAV, Praha (1959)
3. R. Descartes, *Geometrie*, OIKOYMENH, Praha (2011)
4. R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin (1989)
5. F. Hausdorff, *Grundzüge der mengenlehre*, Veit & Co., Leipzig (1914)
6. P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3. Cambridge University Press, Cambridge (1982)
7. P. T. Johnstone, The point of pointless topology, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 8 (1983) 41–53.
8. P. T. Johnstone, Elements of the history of locale theory, In: *Handbook of the history of general topology*, vol. 3, pp. 835–851, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2001)
9. J. L. Kelley, *General Topology*, The University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand (1955)
10. K. Menger, *Topology without points*, Rice Institute Pamphlet, 27 (1940), pp. 80–107
11. J. C. C McKinsey and A. Tarski, *The algebra of topology*, *Ann. Math.*, 45 (1944), 141–191
12. J. Picado and A. Pultr, *Frames and Locales: topology without points*, *Frontiers in Mathematics*, Vol. 28, Birkhäuser (Springer) (2012)
13. J. Picado and A. Pultr, *Separation in Point-Free Topology*, Birkhäuser (Springer) (2021)
14. M. H. Stone, *The theory of representations of Boolean Algebra*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 37–111
15. H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, *Ann. Math.* 39 (1938), 112–126

Topologie barvy

Michal Vik, Martina Viková

Pro fyzika je barva kvalitou světla, složeného z různých vlnových délek zářivé energie, pro fyziologa existuje barva jako fotochemický účinek na sítnici oka, odkud je přenášen nervovým systémem do mozku člověka, přičemž vztah mezi podnětem a barevným počítkem není ještě dostatečně osvětlen, pro psychologa je barva kvalitou a charakterem zrakového vjemu, který je subjektivním odrazem objektivní reality, v pojetí barvy filosofem se obráží základní nazírání světa – barva je chápána buď jako objektivní nebo subjektivní kvalita atd.

Josef Hejzlar

Barvy v bytovém interiéru

Color topology

Michal Vik, Martina Viková

For the physicist, color is the quality of light, composed of different wavelengths of radiant energy; for the physiologist, color exists as a photochemical effect on the retina of the eye, from where it is transmitted by the nervous system to the human brain, while the relationship between stimulus and color sensation is not yet sufficiently illuminated; for the psychologist, color is the quality and character of visual perception, which is a subjective reflection of objective reality; the philosopher's conception of color reflects the basic world view – color is understood as either an objective or subjective quality etc.

Josef Hejzlar

Colors in the home interior

Úvod

Zrakové vnímání je složitý děj, na jehož realizaci se podílí primárně optická soustava oka, sítnice, zraková dráha, podkorová nervová centra a mozková kůra. Po dopadu světla zprostředkovávajícího vnější obraz světa nastávají složité biochemické a elektrofyziologické pochody, které společně s naší zkušeností vytvářejí vnímaný obraz světa. Zdá se tedy, že viditelné světlo, tedy ta část elektromagnetického záření, kterou můžeme naším zrakem vnímat, hraje jedinečnou roli v procesu našeho vnímání, nicméně tento proces nelze chápat mechanisticky a představovat si jej obdobně jako v případě snímání obrazů pomocí maticových snímačů – digitální fotoaparáty a podobně. Naš zrakový systém se musí vyrovnat jak s vysokým rozsahem jasů, tak proměnlivými spektrálními vlastnostmi objektů. Vnímání barev nelze izolovat pouze na vjem chromatičnosti, ale poskytuje nám rovněž informace o struktuře a vlastnostech objektů, jejich kontextu v daném prostředí atd. Přestože může docházet k nesprávné interpretaci vnímaných barev, resp. celkového vjemu dané scény, umožňuje nám vnímání barev rozlišování podstatných informací o vnějším světě. V praxi vnímáme nejen světlo z prvotních zářičů – zdrojů světla jak přírodních, tak umělých, ale rovněž světlo z druhotných zářičů, které nejčastěji vzniká jako odraz světla od objektů. Můžeme tak mluvit o tzv. strukturovaném světle, které v sobě zahrnuje světlo z různých zdrojů, jež navíc mohou být umístěny libovolně v zorném poli pozorovatele. Strukturované světlo v trojrozměrných scénách je obvykle nerovnoměrné kvůli stínům, které vrhá jeden objekt na druhý, nebo proto, že jedna část objektu je obrácena ke světlu a jiná část je od světla odvrácena. Přes tyto problémy musí být zrakový systém schopen vnímat jak barvy, tak světlost jako do značné míry konstantní. Abychom byli schopni vnímat konstantní světlost objektu, musí být zrakový systém schopen zohlednit nerovnoměrné osvětlení. Musí rozlišit, zda změna v osvětlení způsobená stínem je dána rozhraním ovlivněným osvětlením, a ne rozhraním ovlivněným odrazem světla. Pokud bychom uvažovali čistě na fyzikálním základě, mohli bychom aplikovat poměrové pravidlo. Tedy že světlost určitého objektu je dána poměrem jasnosti jeho plochy ve vztahu k podobně osvětlené ploše, která se jeví jako ideálně bílá, nebo ideálně průhledná. Příkladem, který platnost tohoto pravidla do značné míry dokládá, je vnímání šachovnice. Představme si, že se díváme na šachovnici na přímém slunečním světle, osvětlenost šachovnice bude v tomto případě přibližně 100 klx, jak to můžeme vidět v nákrese na **OBR. 1**. Pak přejdeme do místnosti, kde je například žárovka, zářivka či LED světelný zdroj a osvětlenost v tomto případě bude 500 lx. Přestože černé čtverce venku odraží přibližně 9× více světla než bílé čtverce pod umělým osvětlením, tak černé čtverce stále vypadají černě. Vaše vnímání je tedy v tomto případě určováno odrazem a nikoli jasnem odraženého světla. Potom platí poměrové pravidlo a dokud bude poměr odrazu mezi bílou a černou plochou zachován, bude vnímaná světlost stále stejná.¹

1 — Goldstein, B. E. and Cacciamani, L. (2022) Sensation and Perception, Cengage Boston

Introduction

Visual perception is a complex process involving primarily the optical system of the eye, the retina, the visual pathway, the subcortical nerve centers, and the cerebral cortex. After the impact of light mediating the external image of the world, complex biochemical and electrophysiological processes occur that, together with our experience, create the perceived image of the world. Thus, it seems that visible light, i.e., the part of electromagnetic radiation that we can perceive with our eyes, plays a unique role in our perception process, but this process cannot be understood mechanistically and imagined in a similar way as in the case of image capture by matrix sensors – digital cameras and the like. Our visual system must cope with both the high range of brightness's and the changing spectral properties of objects. Color perception cannot be isolated to the perception of chromaticity, but also provides us with information about the structure and properties of objects, their context in each environment, etc. Although there may be misinterpretation of the perceived colors or the overall perception of a given scene, color perception allows us to discriminate essential information about the external world. In practice, we perceive not only light from primary emitters – light sources both natural and artificial, but also light from secondary emitters, which most often arises as a reflection of light from objects. We can thus speak of so-called structured light, which includes light from different sources, which, moreover, can be placed arbitrarily in the field of view of the observer. Structured light in three-dimensional scenes is usually uneven because of the shadows cast by one object on another, or because one part of the object is facing the light and another part is facing away from the light. Despite these problems, the visual system must be able to perceive both color and lightness as largely constant. To be able to perceive a constant luminance of an object, the visual system must be able to account for uneven illumination. It must distinguish whether the change in illumination caused by shadow is due to an interface affected by illumination rather than an interface affected by light reflection. If we were thinking purely on a physical basis, we could apply the ratio rule. That is, the brightness of an object is given by the ratio of the brightness of its surface in relation to a similarly illuminated surface that appears ideally white, or ideally transparent. An example which largely illustrates the validity of this rule is the perception of a chessboard. Suppose we are looking at a chessboard in direct sunlight, the illuminance of the chessboard in this case will be approximately 100 klx, as can be seen in the drawing in **FIG. 1**. We then move to a room where there is, for example, an incandescent, fluorescent, or LED light source and the illuminance in this case will be 500 lx. Even though the black squares outside reflect approximately 9 times lighter than the white squares under artificial lighting, the black squares still look black. So, your perception in this case is determined by the reflection and not the brightness of the reflected light. Then the ratio rule applies, and if the ratio of reflection between the white and black areas is maintained, the perceived lightness will remain the same.¹

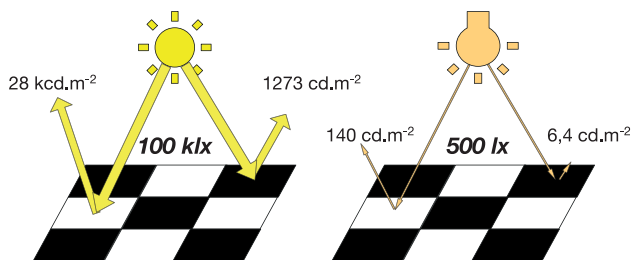
1 — Goldstein, B. E. and Cacciamani, L. (2022) Sensation and Perception, Cengage Boston

Vrátíme-li se k problému nerovnoměrného osvětlení, je zřejmé, že zrakový systém jej musí brát v úvahu. V praxi to znamená, že musíme být schopni rozlišit určité prahové změny dané například určitými typy rozhraní. Zrakový systém obvykle rozdíl mezi rozhraním ovlivněným světlem a rozhraním způsobeným odrazem rozliší, protože ačkoli je osvětlenost snížena vlivem stínu, obvykle příslušné oblasti nevnímáme jako šedé nebo černé. Příkladem může být fotografie na **OBR. 2**, kdy zastíněná část stěny domu vypadá jinak než oblast, kam dopadá přímý sluneční svit, ale vy víte, že se jedná o stín, takže usuzujete, že barva stěny v zastíněné oblasti je stejná jako v oblasti osvětlené sluncem. Jinými slovy berete v úvahu skutečnost, že na zastíněnou část stěny dopadá menší množství světla než na nezastíněnou část. Jak zrakový systém pozná, že změna intenzity způsobená stínem je rozhraním osvětlení, a ne rozhraním odrazu? Jakou roli v tomto procesu hraje vnímání barev a světlosti?

Další z věcí, kterou může náš zrakový systém vzít v úvahu, je smysluplný tvar stínu. V tomto konkrétním případě víme, že stín byl vržen stromem, takže usuzujeme, že se změnilo osvětlení stěny, nikoliv její barva. Další vodítko, které usnadňuje rozlišení, o jaké rozhraní se jedná, je charakter obrysu stínu, jak můžeme vidět na **OBR. 3**. Na bílý papír na stole položte nějaký předmět, například kostku, hrnek či míček, a poté jej pod úhlem osvětlete stolní lampou a nastavte polohu lampy tak, aby vznikl stín s mírně rozmazaným okrajem, jako je vidět na **OBR. 3** vlevo. (Obecně platí, že přiblížením lampy ke kostce se okraj stínu rozostří.) Rozostřený okraj na okraji stínu se nazývá polostín. Nyní vezměte fixu a nakreslete tlustou čáru, jak je znázorněno na obrázku **OBR. 3** vpravo, takže polostín již nebude vidět. Co se stane s vaším vnímáním zastíněné oblasti uvnitř černé čáry? Zakrytí polostínu způsobí, že většina lidí vnímá změnu vzhledu zastíněné oblasti a je obtížné rozlišit, zda změna světlosti je způsobena sníženou intenzitou světla, či změnou odrazu. Polostín zřejmě poskytuje zrakovému systému informaci, že tmavá oblast vedle kostky je stín, takže okraj mezi stínem a papírem je rozhraní ovlivněné osvětlením. Zamaskování polostínu však tuto informaci eliminuje, takže oblast pokrytá stínem je vnímána jako oblast s rozdílnou odrazností, v našem případě vzniká iluze šedě zbarveného povrchu vedle kostky. V této ukázce dochází k tomu, že vjem konstantní světlosti nastává, když je polostín přítomen, ale nedochází k němu, když je maskován.

Bylo navrženo několik vysvětlení, jak zrakový systém rozlišuje mezi těmito dvěma typy rozhraní.² Základní myšlenka těchto teoretických konceptů spočívá v tom, že percepční systém využívá řadu zdrojů informací, aby zohlednil charakter osvětlení. Z předcházejícího textu vyplývá, že rozhraní odraznosti je rozhraní, kde se mění odraznost dvou povrchů, kdežto rozhraní osvětlení je místem, kde dochází ke změně jasu.

2 — Adelson, E. H. (1999). Light perception and lightness illusions. In Gazzaniga, M. Editor *The new cognitive neurosciences* (s. 339–351). Cambridge, MA: MIT Press; Gilchrist, A. L. (1994). *Lightness, brightness, and transparency*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Gilchrist, A., Kossyfidis, C., Bonato, F., Agostini, T., Cataliotti, J., Li, X. ... Economou, E. (1999). An anchoring theory of lightness perception. *Psychological review*, 106(4), 795–834.

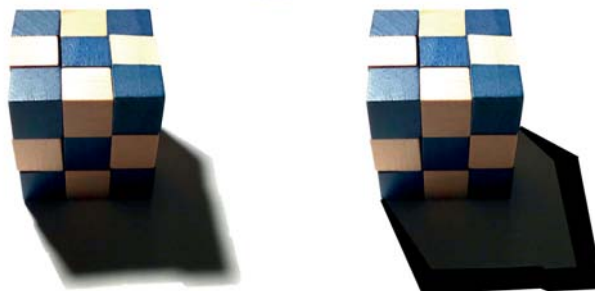


OBR. 1 Část šachovnice osvětlená přímým slunečním svitem (vlevo) a žárovkou (vpravo)
FIG. 1 Part of the chessboard illuminated by direct sunlight (left) and a light bulb (right)



OBR. 2 Na této fotografii můžeme vidět zastíněnou a nezastíněnou část stěny domu. Při pohledu na tuto scénu automaticky předpokládáme, že část stěny osvětlená slunečním svitem má stejnou světlost i chromatičnost. Změna vzhledu je způsobena sníženým množstvím světla díky stínu, který vrhá stromek. Zároveň můžeme vidět ostré rozhraní na zastíněné straně stěny.

FIG. 2 In this photo we can see the shaded and unshaded part of the house wall. Looking at this scene, we automatically assume that the part of the wall illuminated by sunlight has the same luminosity and chromaticity. The change in appearance is caused by the reduced amount of light due to the shadow cast by the tree. At the same time, we can see a sharp interface on the shaded side of the wall.



OBR. 3 Kostka a její stín včetně polostínu (vlevo). Kostka a její stín, kdy polostín je překryt černým ohraničením (vpravo)

FIG. 3 The cube and its shadow including the half-shadow (left). The cube and its shadow, with the half-shadow covered by a black border (right)



OBR. 4 Socha Panny Marie v noci osvětlená zespodu (4 a – vlevo) a během dne (4 b – vpravo); převzato z Goldstein, E. B. a Brockmole J. R. *Sensation and Perception*, 10. vydání, Cengage Learning, Boston 2017

FIG. 4 The statue of the Virgin Mary at night lit from below (4 a – left) and during the day (4 b – right). Adapted from Goldstein, E. B. and Brockmole J. R. *Sensation and Perception*, 10th edition, Cengage Learning, Boston 2017

Returning to the problem of uneven lighting, the visual system must take this into account. In practice, this means that we need to be able to distinguish certain threshold changes due to, for example, certain types of interfaces. The visual system can usually distinguish between interfaces affected by light and interfaces caused by reflection, because although the illuminance is reduced due to shadow, we do not usually perceive the relevant areas as grey or black. As an example, in the photograph in **FIG. 2**, the shaded part of the wall of the house looks different from the area receiving direct sunlight, but you know that it is shadow, so you infer that the color of the wall in the shaded area is the same as in the sunlit area. In other words, you consider the fact that less light falls on the shaded part of the wall than on the unshaded part. How does the visual system know that the change in intensity caused by the shadow is an illumination interface and not a reflection interface? What role does color and lightness perception play in this process?

Another thing our visual system can consider is the meaningful shape of the shadow. In this case, we know that the shadow was cast by the tree, so we infer that the illumination of the wall has changed, not its color. Another clue that makes it easier to distinguish which interface is involved is the nature of the shadow outline, as we can see in **FIG. 3**. Place an object, such as a cube, cup, or ball, on a white piece of paper on a table and then illuminate it at an angle with a table lamp, adjusting the position of the lamp to produce a shadow with a slightly blurred edge, as seen in **FIG. 3**, left. (In general, bringing the lamp closer to the cube will blur the edge of the shadow.) The blurred edge at the edge of the shadow is called a penumbra. Now take a marker and draw a thick line as shown in **FIG. 3** right, so that the penumbra is no longer visible. What happens to your perception of the shaded area inside the black line? Obscuring the half-shadow will cause most people to perceive a change in the appearance of the shaded area, and it is difficult to distinguish whether the change in lightness is due to reduced light intensity or a change in reflection. The half-shadow seems to provide information to the visual system that the dark area next to the cube is a shadow, so the edge between the shadow and the paper is the interface affected by the illumination. However, the masking of the penumbra eliminates this information, so that the area covered by the shadow is perceived as having a different reflectance, in our case creating the illusion of a gray-colored surface next to the cube. In this example, the perception of constant lightness occurs when the penumbra is present but does not occur when it is masked.

Several explanations have been proposed for how the visual system distinguishes between these two types of interfaces.² The basic idea behind these theoretical concepts is that the perceptual system uses a variety of information sources to account for the nature of illumination. From the preceding

2 — Adelson, E. H. (1999). Light perception and lightness illusions. In Gazzaniga, M. Editor *The new cognitive neurosciences* (pp. 339–351). Cambridge, MA: MIT Press; Gilchrist, A. L. (1994). *Lightness, brightness, and transparency*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Gilchrist, A., Kossyfidis, C., Bonato, F., Agostini, T., Cataliotti, J., Li, X. ... Economou, E. (1999). An anchoring theory of lightness perception. *Psychological review*, 106(4), 795–834.

Dalším příkladem situace, kdy zrakový systém může mít problém jak s rozlišením konstantní světlosti či barvy, resp. se záměnou oblastí obrazu jako „ve stínu“ a vnímáním oblasti jako z „tmavého materiálu“, je snímek sochy Panny Marie na **OBR. 4 A**. Tato fotografie byla pořízena v noci v Grottě Panny Marie Lurdské na Univerzitě Notre Dame. Při pozorování sochy v noci není jasné, zda je tmavá plocha nad Mariinými sepjatými rukama zbarvena modře, stejně jako šerpa, nebo zda je prostě ve stínu. Osvětlení zřejmě naznačuje stín, ale téměř dokonalá barevná shoda mezi touto oblastí a šerpou naznačuje modrý materiál. Vzhledem k tomu, že socha je posazena na zvýšené římsě, není snadné určit „reálný“ vzhled sochy. Ale **OBR. 4 B**, pořízený za denního světla, odhaluje, že tmavá oblast byla ve skutečnosti stínem.

Protože je stín, který můžeme vidět během noci, tvořen díky spodnímu osvětlení světelným zdrojem o náhradní teplotě chromatičnosti T_{cp} přibližně 3 000 K, tedy světlem obsahujícím teplou (žlutou) bílou barvu, tak stín ve smyslu Goethovy teorie barev **3** vykazuje nádech v protilehlé barvě, tedy modré. Tím se dostáváme k hlavnímu tématu tohoto příspěvku, a sice aktuálním teoriím vnímání barev a jak jsou tyto teorie v souladu se současnými znalostmi o zrakovém systému.

3 — von Goethe, J. W. (2014) Goethe's Theory of Colours, Cambridge University Press.

text, a reflectance interface is an interface where the reflectance of two surfaces changes, whereas an illumination interface is where the brightness changes.

Another example of a situation where the visual system may have difficulty distinguishing constant lightness or color, or confusing areas of an image as being ‘in shadow’ and perceiving an area as being made of ‘dark material’ is the image of the statue of the Virgin Mary in **FIG. 4 A**. This photograph was taken at night in the Grotto of Our Lady of Lourdes at the University of Notre Dame. Observing the statue at night (image a), it is not clear whether the dark area above Mary’s clasped hands is colored blue, like the sash, or whether it is simply in shadow. The lighting seems to suggest a shadow, but the near-perfect color match between this area and the sash suggests blue material. Since the statue is perched on a raised ledge, it is not easy to determine the ‘real’ appearance of the statue. But **FIG. 4 B**, taken in daylight, reveals that the dark area was in fact a shadow.

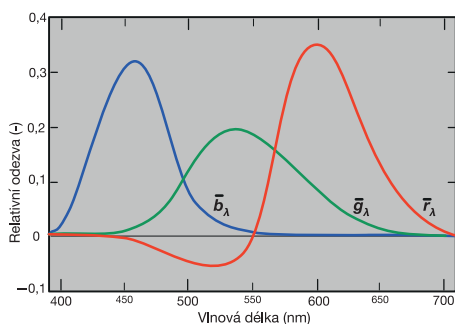
Since the shadow that we can see during the night is formed due to the bottom illumination by a light source with a correlated color temperature CCT of approximately 3,000 K, i.e., by light containing warm (yellow) white color, the shadow in the sense of Goethe’s color theory³ shows a tinge of the opposite color, i.e., blue. This brings us to the main topic of this paper, namely current theories of color perception and how these theories are consistent with current knowledge of the visual system.

3 — von Goethe, J. W. (2014) *Goethe’s Theory of Colours*, Cambridge University Press.

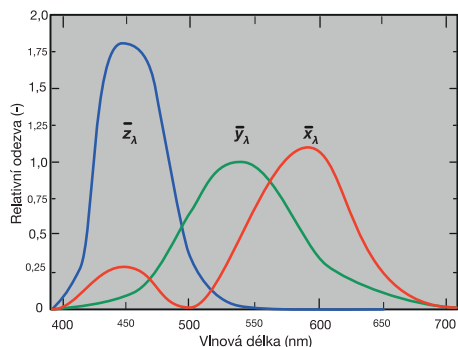
Vnímání barev

Většina kurzů pro začátečníky v oblasti kolorimetrie začíná tím, že popisuje tzv. trichromatickou teorii vnímání barev, často označovanou jako Youngova-Helmholtzova teorie barev. Základní princip vychází z toho, že v sítnici máme čípkky citlivé na červenou, zelenou a modrou barvu, tedy RGB. Pokud na signály z RGB čípků uplatníme aditivní smíšení, tak se předpokládá vytvoření všech barev, které člověk může vnímat. Jak nicméně ukázal Guildův-Wrightův experiment, který posloužil pro definování funkcí CIE standardního pozorovatele (2°), tedy funkcí vyrovnání barvy, žádnou kombinací primárních světél RGB nebylo možné dosáhnout vyrovnání barevného vzhledu bílé plochy osvětlené na srovnávací části testovacím monochromatickým světlem o určité vlnové délce (v rozsahu mezi cca 440 až 540 nm) a na vztažné části osvětlené RGB světelnými zdroji. K vyrovnání barevného vzhledu došlo teprve tehdy, když světlo R bylo přemístěno na stranu monochromatického testovacího zdroje. Což ve svém důsledku znamená, že červené světlo bylo odečítáno od monochromatického podnětu ve výše uvedeném spektrálním rozsahu a vznikl tak paradox „záporné“ barvy, viz **OBR. 5**. Aby tento problém byl vyřešen, tak Mezinárodní komise pro osvětlování CIE přijala v roce 1931 kolorimetrickou soustavu XYZ, kde ireálná světla XYZ nahradila reálná světla RGB.⁴ Funkce standardního pozorovatele díky tomu mají pouze pozitivní hodnoty poměrné účinnosti, jak dokumentuje graf na **OBR. 6**.

4 — Vik, M., Periyasamy, A. P., Viková M. (2018). Chromic Materials, Fundamentals, Measurements and Applications. Waretown, NJ USA: Apple Academic Press Inc.



OBR. 5 Funkce vyrovnání barvy \bar{r} , \bar{g} , \bar{b}



OBR. 6 Funkce vyrovnání barvy standardního kolorimetrického pozorovatele CIE 1931(2°)

Perception of color

Most beginner's courses in colorimetry start by describing the so-called trichromatic theory of color perception, often referred to as the Young-Helmholtz theory of color. The basic principle is because we have cones in the retina that are sensitive to red, green, and blue, or RGB. If we apply additive mixing to the signals from the RGB cones, we are expected to produce all the colors that a human can perceive. However, as shown by the Guild-Wright experiment, which was used to define the CIE standard observer (2°) functions, i.e., the color matching functions, no combination of RGB primary lights could achieve color matching of the appearance of the white area illuminated on the reference part by test monochromatic light of a certain wavelength (between about 440 and 540 nm) and on the reference part illuminated by RGB light sources. The color matching only occurred when the R light was moved to the side of the monochromatic test source. Which in effect means that the red light was subtracted from the monochromatic stimulus in the above spectral range, creating the paradox of the 'negative' color, see FIG. 5. To solve this problem, the International Commission on Illumination of the CIE adopted the XYZ colorimetric system in 1931, where the irreal XYZ lights replaced the real RGB lights.⁴ As a result, the functions of the standard observer have only positive relative efficiency values, as documented by the graph in FIG. 6.

4 — Vik, M., Periyasamy, A. P., Viková M. (2018). Chromic Materials, Fundamentals, Measurements and Applications. Waretown, NJ USA: Apple Academic Press Inc.

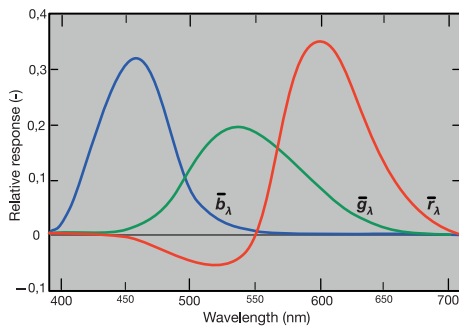


FIG. 5 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ color matching functions

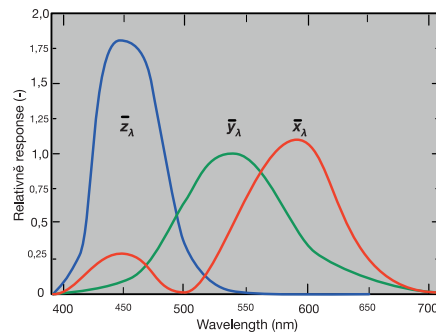


FIG. 6 CIE 1931 standard colorimetric observer (2°)

Přestože trichromatická teorie vnímání barev dokáže vysvětlit řadu jevů, které jsou s vnímáním barev spojeny, je řada jevů, které tato teorie vysvětlit nedokáže. Příkladem může být tzv. následný obraz (negativní paobraz), který vznikne tak, že se chvíli soustředěně díváme na určitý objekt a následně při zavřených víčkách vidíme jeho obraz v doplňkových barvách. To vedlo k formulování teorie vnímání protilehlých barev (**OBR. 7**), kterou jako první prosazoval Johan Wolfgang von Goethe ve své Nauce o barvách⁵. Je určitým paradoxem, že Goethovy výzkumy zůstaly stranou zájmu přírodovědců 19. století a první poloviny 20. století. V době, kdy se trichromatickou teorií nedařilo vysvětlit mnohé z vnímání barev, pokusil se Ewald Hering⁶ vysvětlit vnímání barev tak, že vycházel z vjemů barev. Jeho kruh barev obsahuje čtyři základní barvy, z nichž vždy dvě a dvě se chovají jako protilehlé. Mísí-li se aditivně, ruší se. Při simultánním nebo sukcesivním kontrastu se podporují (Goethe). Jsou to červená-zelená, žlutá-modrá. U Heringa k nim přistupuje ještě dvojice achromatických barev bílá-černá, díky tomu vznikne prostor barev, který lze použít pro popis vnímaných barev. Hering pátral po fyziologických procesech, které se chovají obdobně a domníval se, že tomu odpovídá asimilace a disimilace. Pocit světlých barev, v jeho podání červená a žlutá, je prý vyvoláván disimilací, pocit tmavých barev, modrá a zelená, asimilací. Vjem tak přisuzuje barvám specifický jas.

⁵ — von Goethe, J. W. (2014) Goethe's Theory of Colours, Cambridge University Press.

⁶ — Hering, Ewald (1878). Zur Lehre vom Lichtsinne. Carl Gerolds' sohn., Wien.



OBR. 7 Příklad následných obrazů vzniklých lokální adaptací sítnice. Fixujte svůj zrak doprostřed levého obrázku s různobarevnými čtverci po dobu asi 30 sekund a poté přesuňte pohled na jednolitou bílou plochu. Všimněte si barev následných obrazů vzhledem k původním barvám obrazce.

Although the trichromatic theory of color perception can explain many of the phenomena associated with color perception, there are many phenomena that this theory cannot explain. An example of this is the so-called afterimage, which is produced by looking intently at an object for a while and then seeing its image in complementary colors when the eyelids are closed. This led to the formulation of the theory of the perception of opposite colors (FIG. 7), which was first advocated by Johann Wolfgang von Goethe in his Theory of Colors⁵. It is something of a paradox that Goethe's investigations remained aside from the interest of natural scientists of the 19th century and the first half of the 20th century. At a time when trichromatic theory failed to explain much of color perception, Ewald Hering⁶ attempted to explain color perception by starting from color sensations. His color circle contains four basic colors, of which two and two always behave as opposites. If they mix additively, they cancel each other. In simultaneous or successive contrast, they support each other (Goethe). They are red-green, yellow-blue. In Hering's work, they are joined by the achromatic color pair white-black, resulting in a color space that can be used to describe perceived colors. Hering searched for physiological processes that behave similarly and thought that assimilation and dissimilation corresponded to this. The sensation of light colors, in his account red and yellow, is said to be induced by dissimilation, the sensation of dark colors, blue and green, by assimilation. The perception thus attributes a specific brightness to the colors.

5 — von Goethe, J. W. (2014) Goethe's Theory of Colours, Cambridge University Press.

6 — Hering, Ewald (1878). Zur Lehre vom Lichtsinne. Carl Gerolds' sohn., Wien.

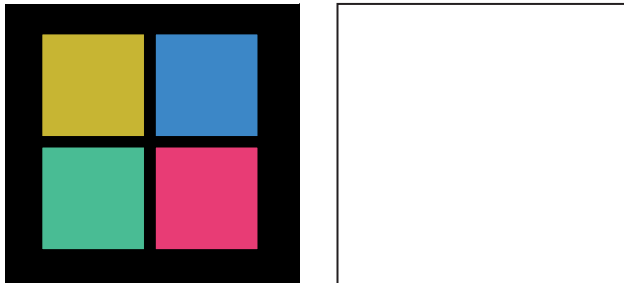
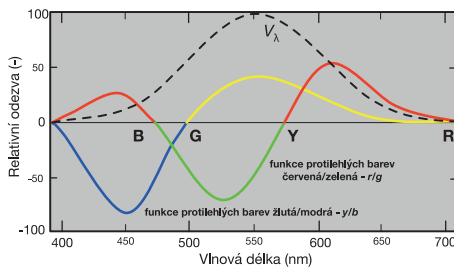


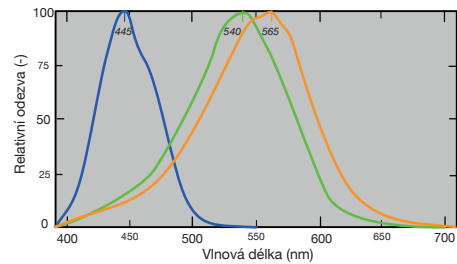
FIG. 7 Example of afterimages produced by local retinal adaptation. Fix your eyes in the middle of the left image with the multicolored squares for about 30 seconds and then shift your sight to the uniform white area. Note the colors of the afterimages relative to the original colors of the image.

Kromě toho je vždy současně částečně podrážděna bílá substance. Problém tohoto vysvětlení spočívá v tom, že bylo ukázáno, že vnímaný jas u základní červené a zelené je prakticky identický. Jinak řečeno, Heringovo vysvětlení by tak bylo možné přijmout pouze pro dvojici protilehlých barev žlutá-modrá. Nicméně problémem zůstává představa, že asimilace barvočivé substance by měla působit jako podnět, což není jinde v organismu známo. Heringova teorie velmi dobře vysvětlovala principy kontrastů, ale nedovedla vysvětlit známé typy vad barvocitu. Až ve třicátých letech 20. století se začaly objevovat teorie, které sjednocovaly trichromatickou teorii a teorii protilehlých barev.⁷ Výsledkem jsou funkce protilehlých barev tak, jak je můžeme vidět na **OBR. 8**, na jejichž základě vznikly kolorimetrické soustavy CIE-LUV a CIELAB. Odpovídá nicméně tato představa současným znalostem, které o vnímání barev dnes máme?

⁷ — Wyszecki, G. and Stiles, W. S. (1982, 2000) Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae, 2nd ed. Wiley.



OBR. 8 Funkce protilehlých barev vycházející z funkcí vyrovnání barvy



OBR. 9 Průběhy relativních odezev L, M a S čípků

In addition, the white substance is always partially irritated at the same time. The problem with this explanation is that it has been shown that the perceived brightness of the fundamental red and green is virtually identical. In other words, Hering's explanation could thus be accepted only for the pair of opposite colors yellow-blue. However, the problem remains with the idea that the assimilation of a color-causing substance should act as a stimulus, which is not known elsewhere in the organism. Hering's theory explained the principles of contrasts very well but failed to account for the known types of color defects. It was not until the 1930s that theories began to emerge that unified the trichromatic theory and the theory of opposite colors.⁷ As a result, the opposing color functions as seen in **FIG. 8** gave rise to the CIELUV and CIELAB colorimetric systems. However, does this idea correspond to the current knowledge we have about color perception today?

⁷ — Wyszecki, G. and Stiles, W. S. (1982, 2000) *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, 2nd ed. Wiley.

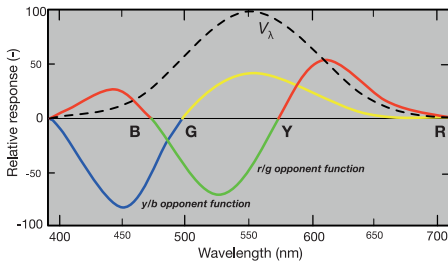


FIG. 8 Opponent colors functions based on color matching functions

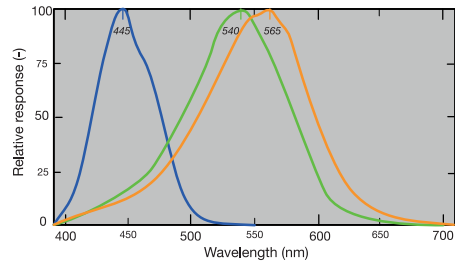


FIG. 9 L, M, S cone relative sensitivities

Sítnice

Sítnice je tvořena přibližně 100 různými typy neurálních buněk, které se nacházejí ve specifických vrstvách sítnice a vzájemně se propojují do složitých mikroobvodů.⁸ Tyto obvody slouží k extrakci principiálních rysů vizuálního světa, které se prostřednictvím různých typů gangliových buněk sítnice rozdělují do odlišných vizuálních kanálů – drah. Diferencovaně zpracované zrakové signály jsou pak ze sítnice přenášeny do velkého počtu vyšších zrakových oblastí.⁹ V sítnici existují tři typy neuronů, které jsou propojeny sériově: fotoreceptory, bipolární a gangliové buňky. Další dva typy buněk zabezpečují propojení vedoucí paralelně s povrchem sítnice: horizontální a amakrinní buňky. Sériová spojení sítnice zabezpečují přenos zrakových informací ve formě akčních potenciálů do thalamu a dalších subkortikálních struktur, zatímco horizontální a amakrinní buňky jsou interneurony.

Zajímavé je, že mikroobvody v sítnici jsou propojeny jak chemickými synapsemi, tak obousměrnými elektrickými synapsemi tvořenými oblastmi, které označujeme jako gap junction. Velké množství interakcí mezi elektrickými a chemickými synapsami umožňují obvodům fungovat velmi flexibilně a dynamicky. Protože míru přenosu signálu gap junction lze navíc měnit v různých časových intervalech, mohou se mikroobvody sítnice rekonfigurovat jak v milisekundovém měřítku, tak i v průběhu denního/nočního cyklu. Kromě toho gap junctions působí v různých prostorových měřítkách a synchronizují aktivitu na subcelulární úrovni i v rozsáhlých oblastech sítnice. V současné době víme, že v sítnici se nachází 5 spektrálně odlišných fotoreceptorů, přičemž vedle tyčinek a čípků, které jsou primárně aktivní v případě vizuálních účinků světla, máme ještě vnitřně světlocitlivé gangliové buňky sítnice (ipRGC), které primárně ovlivňují nevizuální odezvy na světlo. Oproti dřívějším představám dnes víme, že průběhy poměrně světelné odezvy čípků se od funkcí vyrovnání barvy významně liší, jak dokumentuje graf na **Obr. 9**. Čípky proto tradičně označujeme jako L, M a S, tedy čípky citlivé na dlouho, středně a krátkovlnnou oblast spektra.

8 — Trenholm S, Awatramani G. B. (2019) Myriad roles for gap junctions in retinal circuits. In: Kolb H, Fernandez E, Nelson R, editors. *Webvision: The Organization of the Retina and Visual System* [Internet]. Salt Lake City (UT): University of Utah Health Sciences Center.

9 — Azeredo da Silveira R., Roska B. Cell types, circuits, computation. *Current Opinion in Neurobiology*. 2011;21(5): s. 664–671. PubMed PMID: 21641794.

Retina

The retina is made up of approximately 100 different types of neural cells that are in specific layers of the retina and interconnect to form complex microcircuits.⁸ These circuits are used to extract the principal features of the visual world, which are distributed into distinct visual channels – pathways – through different types of retinal ganglion cells. Differentially processed visual signals are then transmitted from the retina to many higher visual areas.⁹ There are three types of neurons in the retina that are connected serially: photoreceptors, bipolar and ganglion cells. Two other cell types provide connections running parallel to the retinal surface: horizontal and amacrine cells. Serial retinal connections provide transmission of visual information in the form of action potentials to the thalamus and other subcortical structures, whereas horizontal and amacrine cells are interneurons.

Interestingly, the microcircuits in the retina are connected by both chemical synapses and bidirectional electrical synapses formed by regions we refer to as gap junctions. The large number of interactions between electrical and chemical synapses allow the circuits to function in a very flexible and dynamic manner. In addition, because the rate of gap junction signal transmission can be varied at different time intervals, retinal microcircuits can be reconfigured both on a millisecond scale and over a day/night cycle. In addition, gap junctions operate at different spatial scales and synchronize activity at the subcellular level and over large regions of the retina. We now know that there are 5 spectrally distinct photoreceptors in the retina, and in addition to rods and cones, which are primarily active in the case of visual effects of light, we have intrinsically photosensitive retinal ganglion cells (ipRGCs), which primarily influence nonvisual responses to light. Contrary to earlier ideas, we now know that the waveforms of the relative light responses of cones differ significantly from the color-matching functions, as documented in the graph in **FIG. 9**. Cones are therefore traditionally referred to as L, M, and S, i.e., cones sensitive to the long-, medium-, and short-wavelength regions of the spectrum.

8 — Trenholm S, Awatramani G. B. (2019) Myriad roles for gap junctions in retinal circuits. In: Kolb H, Fernandez E, Nelson R, editors. *Webvision: The Organization of the Retina and Visual System* [Internet]. Salt Lake City (UT): University of Utah Health Sciences Center

9 — Azeredo da Silveira R, Roska B. Cell types, circuits, computation. *Current Opinion in Neurobiology*. 2011;21(5): pp. 664–671. PubMed PMID: 21641794.

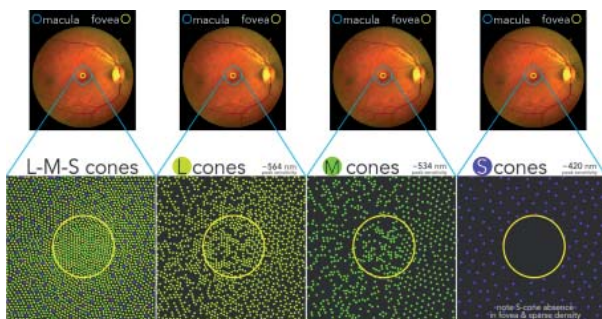
Čípky a tyčinky jsou propojeny s dalšími buňkami sítnice na různých úrovních, přičemž bylo zjištěno, že ve foveální oblasti se nacházejí pouze L a M čípky, jak můžeme vidět ve schématu sítnice na **OBR. 10**. Obrázek znázorňuje uspořádání čípků v mozaice sítnice typické pro lidské oko. Můžeme si všimnout za prvé, že ačkoli je mozaika jako celek trichromatická, v každém místě sítnice se nachází pouze jeden čípek. To znamená, že v základním prostorovém měřítku je sítnice lokálně spíše monochromatická než trichromatická: trichromaticnost, kterou vnímáme u rozměrnějších podnětů, musí vznikat následným zpracováním informací, které funguje nejen mezi čípky různých tříd, ale také mezi čípky na různých místech sítnice. Zároveň je zde dokumentováno významně vyšší zastoupení L čípků, oproti M čípkům a S čípkům. Obecně se udává, že na 10 L čípků připadá 5 M čípků a 1 S čípek. Malý podíl S čípků pravděpodobně souvisí s chromatickou aberací oční optiky, která vede k mnohem rozmazanějšímu obrazu vnější scény na krátkých vlnových délkách ve srovnání s obrazem na delších vlnových délkách.¹⁰

10 — Benson NC, Manning JR, Brainard DH: Unsupervised learning of cone spectral classes from natural images. PLoS Comput Biol 2014, 10:e1003652.

Za třetí, uspořádání čípků L a M je poměrně nepravidelné, téměř náhodné. To vede k charakteristické mozaikovitosti sítnice, kdy v některých lokálních oblastech převládají L a v jiných M čípky. Tato nejednotnost se v naší každodenní zkušenosti s barvami příliš neprojevuje. To, stejně jako rozdíly v poměru čípků L:M u jednotlivých osob, naznačuje, že zpracování informací z fotoreceptorů musí být přizpůsobeno lokálnímu uspořádání mozaiky čípků v sítnici.

Plocha sítnice je funkčně rozdělena na receptivní pole kruhového tvaru, která mají uvnitř tzv. receptivní centrum (R-C) a vnější okruží (R-periferní pole) reagující na stejný podnět antagonisticky než receptivní centrum. Podle reakce na světelný podnět lze proto v sítnici všeobecně rozlišit ON-centrum neuronů, ve kterých vzniká přírůstek impulzů při stimulaci v R-C a úbytek impulzů při světelném podnětu v R-periferní poli. Systém neuronů, který reaguje obráceně, to znamená, že u nich nastává úbytek impulzů při světelném podnětu v R-C a přírůstek impulzů při stimulaci v R-periferní poli, je označován jako OFF-centrum neuronů. Podobně v sítnici existují tři typy bipolárních buněk, jeden typ pro tyčinky a dva typy pro čípky. Bipolární buňky čípků jsou funkčně rozděleny na „zapínací“ nebo zkráceně ‘ON’ bipolární buňky a „vypínací“, které jsou označovány také ‘OFF’ bipolární buňky.

Poslední vrstva sítnice z hlediska vertikálního propojení je tvořena gangliovými buňkami, ty jsou svými dendrity napojeny buď na ON- nebo OFF-synaptická centra. Gangliové buňky funkčního typu ‘ON’ (GBON) jsou excitovány paprskem světla, který dopadá na R-C, a jsou inhibovány světlem, které dopadá na R-periferní pole.



OBR. 10 Ukázka rozmístění jednotlivých druhů čípků v oblasti Macula Lutea a Fovea Centralis (Upraveno podle Mark Fairchild: Color Appearance Models, 3rd. Ed, Wiley 2013)

FIG. 10 Example of the distribution of individual cones in Macula Lutea and Fovea Centralis (Adapted from Mark Fairchild: Color Appearance Models, 3rd. Ed, Wiley 2013)

Tato inhibice je zprostředkována přes horizontální buňky. Obráceným způsobem reagují gangliové buňky funkčního typu 'OFF' (GBOFF). Kromě toho rozlišujeme ještě gangliové buňky podle morfologických a funkčních kritérií na „Malé gangliové buňky – GBP“ (parvoceululární midget gangliové buňky), „Velké gangliové buňky – GBM“ (magnocelulární) a „W-gangliové buňky“ (koniocelulární), viz. **OBR. 11**.

V případě vnímání kontrastu jasů či světlosti dochází ke zpracování signálů od L a M čípků s tím, že se v současné době předpokládají dva chromatické mechanismy, z nichž jeden je aktivován rozdílovým signálem od L a M čípků, kdežto druhý je rozdílovým signálem mezi S čípkou a sumárním signálem L a M čípků. Tato představa by byla v souladu s teorií protilehlých barev, tak jak je naznačena v grafu na **OBR. 7** stejně jako s měřeními signálů na úrovni LGN (Lateral Geniculate Nucleus) a v oblasti vizuálního kortexu. Ve schématech na **OBR. 10** je ukázáno, že parasolové buňky tvoří základ magnocelulární dráhy (MC) a tato dráha pravděpodobně slouží k interpretaci jasnosti tak, že sčítá signály od L a M čípků. Parvoceululární dráha (PC) začíná v malých gangliových buňkách vstup typu |M-L|. Malé bistratifikované buňky s excitačním vstupem S čípků (a inhibičním vstupem L + M) tvoří součást koniocelulární dráhy (KC). Pokud je rozměr vnímaného objektu dostatečně velký, aby byla stimulována makulární oblast sítnice, tak může být v plné míře uplatněno trichromatické vnímání barev. V opačném případě, kdy je excitována pouze foveální oblast s L a M čípkou, pak by mělo být naše vnímání pouze dichromatické. Je to tak vždy? Jak bychom vysvětlili skutečnost, že funkce standardního kolorimetrického pozorovatele CIE 1931 jsou založeny na trichromatickém vnímání barev, přestože byly změřeny při 2° zorném poli, tedy při aktivaci pouze foveální oblasti sítnice lidského oka. V roce 2021 Aldhahir¹¹ nabídl možné vysvětlení. Jeho koncept vychází z již zmiňované Nauky o barvách.¹² Již bylo zmíněno, že Goethova Nauka byla přijímána přinejmenším s určitými rozpaky. Důvodem byly některé jeho omyly při vysvětlování fyzikálních principů vzniku barev a polemika s Newtonovými názory.

11 — Aldhahir, S. (2021) Differential color perception theory, Book of proceedings International Colour Association (AIC) Conference 2021, Milan (Italy), s. 173–178.

12 — von Goethe, J. W. (2014) Goethe's Theory of Colours, Cambridge University Press.

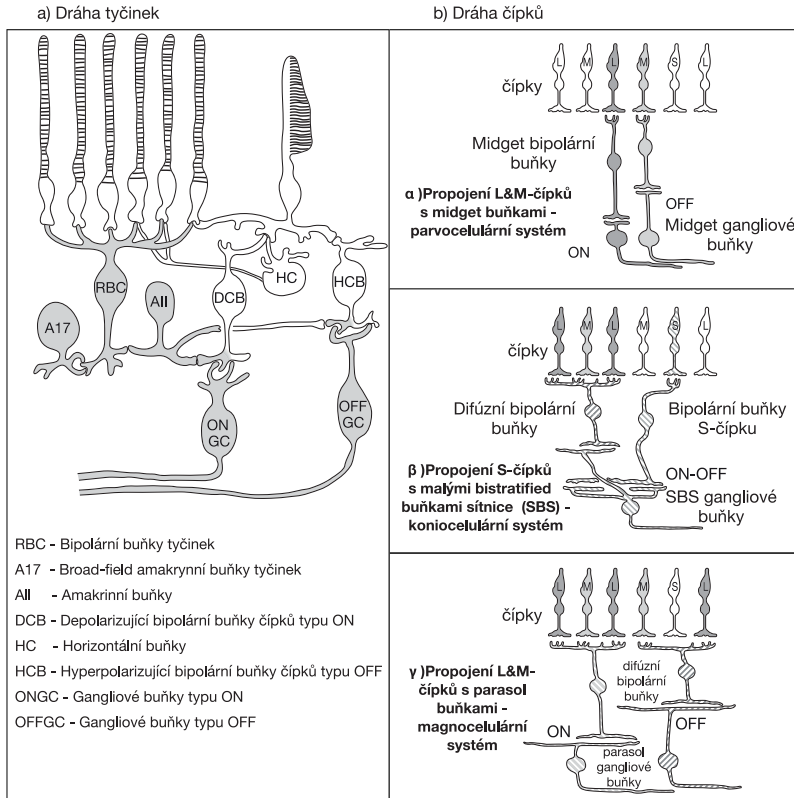
Cones and rods are connected to other retinal cells at different levels, and it has been found that only L and M cones are found in the foveal region, as can be seen in the retinal diagram in **FIG. 10**. The figure shows the arrangement of cones in the retinal mosaic typical of the human eye. We can notice first that although the mosaic is trichromatic, there is only one cone at each retinal location. This means that on a basic spatial scale the retina is locally monochromatic rather than trichromatic: the trichromaticity we perceive in larger stimuli must arise from the subsequent information processing that operates not only between cones of different classes, but also between cones at different locations on the retina. At the same time, a significantly higher proportion of L cones is documented here, compared to M cones and S cones. In general, it is reported that for every 10 L cones, there are 5 M cones and 1 S cone. The small proportion of S cones is probably related to the chromatic aberration of the optics of the eye, which leads to a much blurrier image of the external scene at short wavelengths compared to the image at longer wavelengths.¹⁰

10 — Benson NC, Manning JR, Brainard DH: Unsupervised learning of cone spectral classes from natural images. *PLoS Comput Biol* 2014, 10:e1003652.

Third, the arrangement of the L and M cones is quite irregular, almost random. This leads to a characteristic mosaicism of the retina, with L cones predominating in some local areas and M cones in others. This inconsistency is not very apparent in our everyday experience of color. This, as well as the differences in the ratio of L:M cones in different individuals, suggests that the processing of information from photoreceptors must be adapted to the local arrangement of the cone mosaic in the retina.

The retinal surface is functionally divided into circular receptive fields, which have a so-called receptive center (R-C) inside and an outer circle (R-peripheral field) responding to the same stimulus antagonistically than the receptive center. According to the response to a light stimulus, therefore, ON-center neurons can generally be distinguished in the retina, in which an increase of impulses occurs during stimulation in the R-C and a decrease of impulses during a light stimulus in the R-peripheral field. A system of neurons that respond in the reverse way, that is, they experience a decrease of impulses on light stimulus in the R-C and an increase of impulses on stimulation in the R-peripheral field, is referred to as OFF-center neurons. Similarly, there are three types of bipolar cells in the retina, one type for rods and two types for cones. Cone bipolar cells are functionally divided into 'on' or 'ON' bipolar cells for short and 'off' bipolar cells, which are also referred to as 'OFF' bipolar cells.

The last layer of the retina in terms of vertical connectivity is formed by ganglion cells, which are connected by their dendrites to either ON- or OFF-synaptic centers.



OBR. 11 Schéma propojení tyčinek a čípků v sítnici oka makaka. a) Dráha tyčinek: V dráze tyčinek se přenášející signály tyčinek přes bipolární buňky tyčinek (RBC) do amakrynních buněk AII, do ON (depolarizujících – DCB) bipolárních buněk čípků přes gap junction a do OFF (hyperpolarizujících – HCB) bipolárních buněk čípků přes chemickou synapsi. Bipolární buňky přenášejí signály tyčinek do ON- a OFF-centrálních gangliových buněk sítnice. (b) Dráhy čípků. **α**: V parvocelulární dráze se přenášejí signály L- a M- čípků prostřednictvím malých (midget) bipolárních buněk do malých (midget) gangliových buněk. **β**: V dráze S-čípků se přenáší signály od S-čípků přes modré bipolární buňky k malým bistratifikovaným gangliovým buňkám a signály M- a L- čípků přes difúzní bipolární buňky. **γ**: Difúzní (polysynaptické) bipolární buňky přenášejí signály L a M-čípků do parasolových bipolárních buněk. (Upraveno podle Martin, P. R. (1998). Colour processing in the primate retina: Recent progress. *Journal of Physiology*, 513, 631–638.)

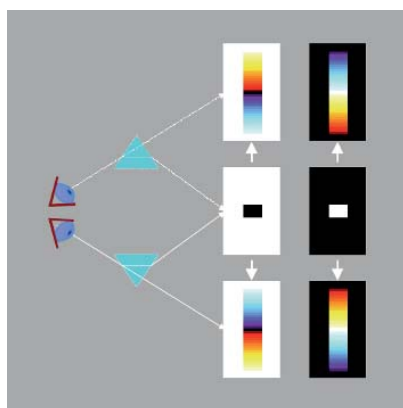
Ganglion cells of the ‘ON’ functional type (GCON) are excited by a beam of light incident on the R-C and are inhibited by light incident on the R-periphery. This inhibition is mediated through the horizontal cells. The ganglion cells of the functional type ‘OFF’ (GCOFF) respond in the reverse manner. In addition, we further distinguish ganglion cells according to morphological and functional criteria into ‘Small ganglion cells – GCP’ (parvocellular midget ganglion cells), ‘Large ganglion cells – GCM’ (magnocellular) and ‘W-ganglion cells’ (coniocellular), see **FIG. 11**.

In the case of brightness or lightness contrast perception, processing of signals from L and M cones occurs, with two chromatic mechanisms currently assumed, one of which is activated by the differential signal from L and M cones, whereas the other is the differential signal between S cones and the sum signal of L and M cones. This idea would be consistent with the theory of opposing colors as outlined in the graph in **FIG. 7** as well as with measurements of signals at the level of the LGN (Lateral Geniculate Nucleus) and in the visual cortex. The diagrams in **FIG. 10** show that the parasol cells form the basis of the magnocellular (MC) pathway, and this pathway presumably serves to interpret luminance by summing signals from the L and M cones. The parvocellular pathway (PC) begins in small ganglion cell input of the $|M-L|$ type. Small bistratified cells with excitatory S cone input (and inhibitory L + M input) form part of the coniocellular pathway (CC). If the size of the perceived object is large enough to stimulate the macular region of the retina, trichromatic color perception can be fully applied. Otherwise, when only the foveal area with the L and M cones is excited, then our perception should be only dichromatic. Is this always the case? How would we explain the fact that the functions of the standard CIE 1931 colorimetric observer are based on trichromatic color perception, even though they were measured at 2° field of view, i.e., when only the foveal region of the retina of the human eye is activated. In 2021, Aldhahir¹¹ offered a possible explanation. His concept is based on the already mentioned Theory of Colors.¹² It has already been mentioned that Goethe’s Theory was received with at least some embarrassment. This was due to some of his mistakes in explaining the physical principles of color and his controversy with Newton’s views.

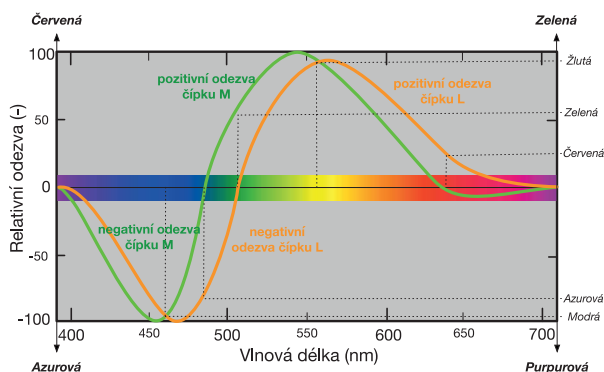
11 — Aldhahir, S. (2021) Differential color perception theory, Book of proceedings International Colour Association (AIC) Conference 2021, Milan (Italy), pp. 173–178.

12 — von Goethe, J. W. (2014) Goethe’s Theory of Colours, Cambridge University Press.

Goethe byl první, kdo popsal paobraz a indukci barev; rozčlenil barvy na teplé a studené, na pasivní a aktivní a připsal barvám moc působit na naši duši. Objevil také „barvy vyžádané“ neboli fyziologickou komplementárnost barev. Tak jako Newton při svém známém pokusu, kdy nejprve bílé světlo rozložil pomocí hranolu na spektrum a toto spektrum následně dalším hranolem složil zpět na světlo bílé, i Goethe tak jako mnozí jiní s optickými hranoly experimentoval. Přitom zjistil, že když se místo štěrbin do centrální oblasti hranolu umístí clona, typicky černý obdélník, tak vzniklé spektrum je komplementární, jak to můžeme vidět na schématu na **OBR. 12**.



OBR. 12 Princip Goethova experimentu s optickými hranoly a jeho důkaz komplementárních barev



OBR. 13 Oponentní funkce citlivosti L a M čípků demonstrující možnost aditivního smíšení signálů pro pozitivní část odezvy ($R + G$) kombinace, jejímž výsledkem je žlutá, tak pro negativní část kombinace $-(R + G)$, jejímž výsledkem je modrá (Upraveno podle Aldhahir, S. (2021) Differential color perception theory, Book of proceedings International Colour Association (AIC) Conference 2021, Milan (Italy), August 30th – September 3rd 2021, 173–178).

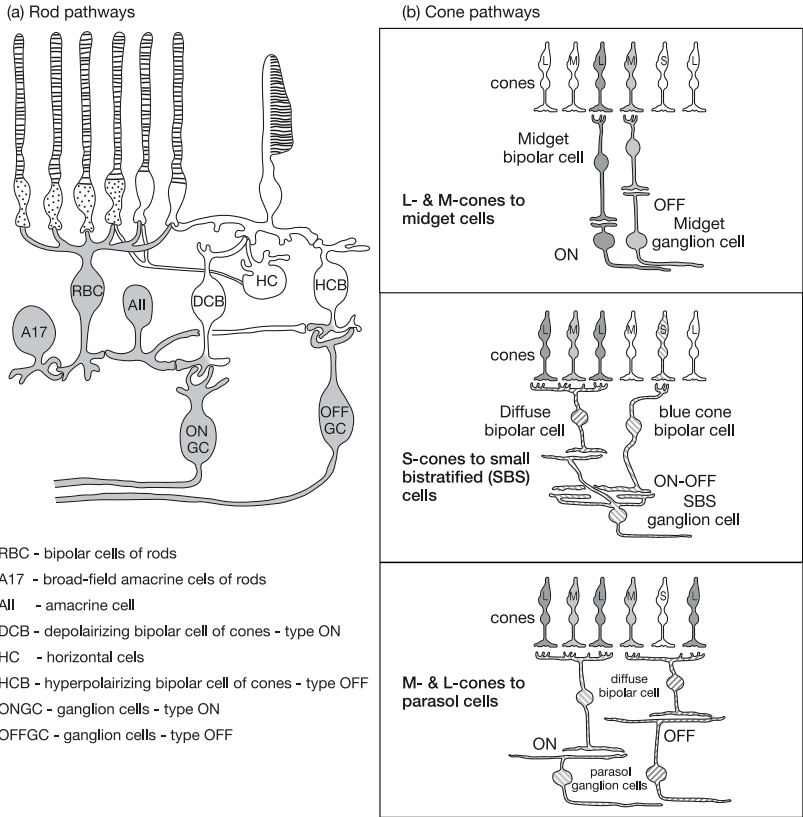


FIG. 11 Schematic of the connection of rods and cones in the retina of the macaque eye. a) Rod trajectory: In the rod pathway, rod signals are transmitted via rod bipolar cells (RBCs) to amacrine AII cells, to ON (depolarizing – DCB) bipolar cone cells via gap junction, and to OFF (hyperpolarizing – HCB) bipolar cone cells via chemical synapse. Bipolar cells transmit rod signals to ON- and OFF-central ganglion cells of the retina. b) Cone pathways. α : In the parvocellular pathway, L- and M- cone signals are transmitted via small (midget) bipolar cells to small (midget) ganglion cells. β : In the S-cone pathway, S-cone signals are transmitted from S-cone via blue bipolar cells to small bistratified ganglion cells, and M- and L-cones signals are transmitted via diffuse bipolar cells to parasol bipolar cells. (Modified from Martin, P. R. (1998). Colour processing in the primate retina: Recent progress. *Journal of Physiology*, 513, 631–638.)

Pokud přijmeme Goethovu představu komplementárních barev, pak je Aldhahir dokazuje na spektrálním průběhu oponentních funkcí vycházejících ze spektrálních průběhů relativních odezvy L a M čípků. V takovém případě by pak bylo možné vysvětlit „trichromatický“ vjem barev pro případ stimulace pouze foveální části sítnice. Na druhé straně je Aldhahirova teorie v rozporu s našimi znalostmi ohledně jedinců s geneticky podmíněnými vadami barvocitu. Pokud by Aldhahirovy závěry byly platné, pak by jedinci, v jejichž sítnici chybí S čípků (nejčastěji ženy), byli schopni vnímat všechny barvy a nedocházelo by k tzv. záměnám barev, které jsou typické pro dichromatické vady. V tomto případě se jedná o vadu označovanou jako tritanopie a jedinci s touto vadou nejsou schopni od sebe rozlišit nažloutlé a namodralé odstíny.

Vadou barvocitu se rozumí neschopnost rozeznat barvy. Tyto vady jsou zpravidla dědičné, neprogresivní. Nejčastěji se jedná o poruchu ve vnímání určitých barev, velmi zřídka se může jednat o neschopnost vidění barev v celém spektru; úplná barvoslepost. Při úplné barvosleposti, která se označuje jako achromatopsie (achromázie), postižený není schopen vidět barvy a vnímá okolní svět podobně jako černobílou fotografii s odstupňováním jasových úrovní. Současně se zpravidla zjišťuje značný pokles zrakové ostroty, který je podmíněn hypoplazií žluté skvrny, může se také vyskytovat nystagmus a světloplachost. Mezi příčiny patří získaný defekt, tj. zraková agnozie = mozková achromatopsie (defekt je ve zrakové kůře), anebo vrozený defekt, tj. čípková nebo tyčinková monochromázie.

Částečná barvoslepost je častější a můžeme ji rozlišovat na základě toho, který z počítků tří základních barev je snížený. Bylo zjištěno, že nejčastěji bývá porušeno vnímání červené a zelené barvy, které se v tomto případě jeví jako odstíny žluté, modré a šedé, viz simulace na **OBR. 15** a **OBR. 16**. Lidem s poruchou vnímání odvozenou od S čípků se jeví tyto barvy jako odstíny červené, zelené a šedé, viz **OBR. 17**. Na uvedených simulacích jsou uvedeny případy vad, kdy v sítnici úplně chybí jeden z tří druhů čípků. Tyto vady označujeme jako protanopie, deuteranopie a tritanopie. V praxi se mnohem častěji než s dichromatickými vadami setkáváme s vadami trichromatickými, kdy je v sítnici menší výskyt jednoho z čípků, či je snížena účinnost přenosu signálu z jednoho typu čípků. Tyto vady se označují jako anomálie a patří mezi ně protanomálie, deuteranomálie a tritanomálie. Poruchy barevného vidění se ale také mohou objevit ve stáří, u neuropatií, sítnicových zánětů, glaukomu a po podání některých léků, tyto poruchy řadíme mezi poruchy získané.

Jak tedy vysvětlit, že výsledkem měření funkcí je vyrovnání barev v případě zorných úhlů, které aktivují pouze foveální část sítnice? Na rozdíl od sluchového systému, který již na receptorové úrovni funguje v souladu s principem spektrální analýzy, lze říci, že u zraku tři vzájemně se překrývající spektrální účinnosti čípků tuto funkci podle našich dosavadních znalostí neplní. Proto není náš zrakový systém schopen rozlišit monochromatickou barvu od barvy vzniklé smícháním vhodné kombinace odlišných barev. Příkladem může být vjem žluté, která může být připravena jak jako monochromatický podnět, tak vhodnou kombinací červené a zelené barvy. Obdobně může být vjem bílé barvy vyvolán rovnoměrnou stimulací všech tří druhů čípků (ekvienergetická bílá barva), stejně jako aditivním smíšením komplementárních

Goethe was the first to describe the afterimage and the induction of colors; he divided colors into warm and cold, passive, and active, and attributed to colors the power to affect our souls. He also discovered the ‘colors demanded’ or physiological complementarity of colors. Like Newton in his famous experiment of first decomposing white light into a spectrum with a prism and then folding this spectrum back into white light with another prism, von Goethe, like many others, experimented with optical prisms. In doing so, he found that when an aperture, typically a black rectangle, is placed in the central region of the prism instead of a slit, the resulting spectrum is complementary, as can be seen in the diagram in **FIG. 12**.

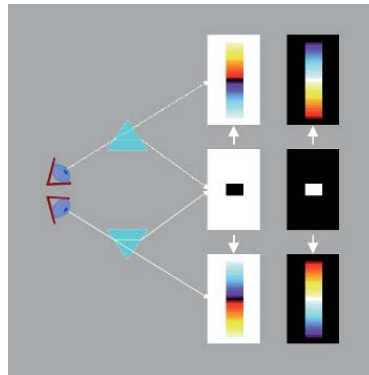


FIG. 12 The principle of Goethe’s experiment with optical prisms and his proof of complementary colors

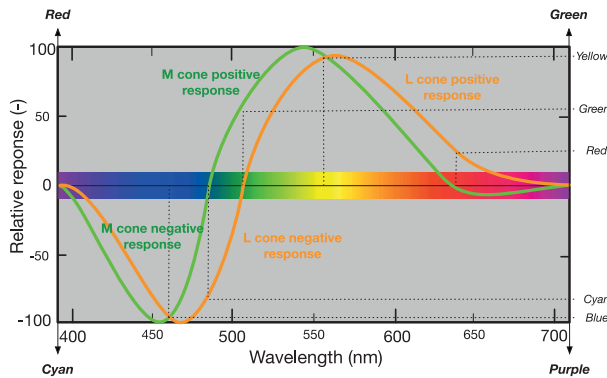


FIG. 13 Opponent sensitivity functions of L and M cones demonstrating the possibility of additive mixing of signals for the positive part of the response (R+G) of the combination resulting in yellow, and for the negative part of the combination $-(R+G)$ resulting in blue (Modified from Aldhahir, S. (2021) Differential color perception theory, Book of proceedings International Colour Association (AIC) Conference 2021, Milan (Italy), August 30th – September 3rd 2021, 173–178.)



OBR. 14 Bezdefektní vnímání barev
FIG. 14 Color normal vision



OBR. 15 Protanopie
FIG. 15 Protanopia



OBR. 16 Deuteranopie
FIG. 16 Deuteranopia



OBR. 17 Tritanopia
FIG. 17 Tritanopia

If we accept Goethe's notion of complementary colors, then Aldhahir proves them on the spectral waveform of the opponent functions based on the spectral waveforms of the relative responses of the L and M cones. In such a case, it would then be possible to explain the 'trichromatic' color perception for the case of stimulation of only the foveal part of the retina. On the other hand, Aldhahir's theory conflicts with our knowledge regarding individuals with genetically determined color defects. If Aldhahir's conclusions were valid, then individuals whose retinas lack S cones (most often females) would be able to perceive all colors and would not experience the so-called color confusions that are typical of dichromatic defects. In this case, it is a defect referred to as tritanopia and individuals with this defect are unable to distinguish yellowish and bluish hues from each other.

Color deficiency is the inability to distinguish colors. These defects are usually hereditary, non-progressive. Most often it is a disorder in the perception of certain colors, very rarely it may be an inability to see colors across the spectrum, complete color blindness. In complete color blindness, which is referred to as achromatopsia (achromasia), the sufferer is unable to see colors and perceives the surrounding world much like a black and white photograph with gradations of brightness levels. At the same time, a significant decrease in visual acuity is usually found, which is conditioned by hypoplasia of the macula, and nystagmus and photophobia may also occur. Causes include an acquired defect, i.e., visual agnosia = cerebral achromatopsia (the defect is in the visual cortex), or a congenital defect, i.e., cone or rod monochromasia.

Partial color blindness is more common and can be differentiated based on which of the three basic color counts is reduced. It has been found that red and green perception is most often impaired, and in this case the colors appear as shades of yellow, blue, and gray, see simulations in **FIG. 15** and **16**. People with a perceptual impairment derived from the S cone appear these colors as shades of red, green, and gray, see **FIG. 17**. The simulations above show cases of defects where one of the three cone types is completely missing from the retina. We refer to these defects as protanopia, deuteranopia and tritanopia. In practice, we encounter trichromatic defects much more frequently than dichromatic defects, when one of the cones is less abundant in the retina or the efficiency of signal transmission from one type of cone is reduced. These defects are referred to as anomalies and include protanomaly, deuteranomaly and tritanomaly. However, color vision disorders can also occur in old age, in neuropathies, retinal inflammation, glaucoma, and after the administration of certain medications; these disorders are classified as acquired disorders.

How then to explain the result of measuring color alignment functions in the case of visual angles that activate only the foveal part of the retina? In contrast to the auditory system, which already functions at the receptor level according to the principle of spectral analysis, it can be said that in vision the three overlapping spectral efficiencies of the cones do not perform this function to our current knowledge. Therefore, our visual system is unable to distinguish a monochromatic color from a color produced by mixing a suitable combination of different colors. An example

barev. Na tomto principu jsou založeny dnes nejrozšířenější LED světelné zdroje, kdy polovodičový čip, který emituje v modré oblasti spektra okolo 450 nm, je překryt luminoforem, který díky fluorescenci reemituje část modrého světla ve žluto-oranžové oblasti spektra. Výsledkem je přibližně bílá barva, jejíž tonalitu lze upravovat vzájemným poměrem světla emitovaného z obou částí spektra a upravovat výslednou náhradní teplotu chromatičnosti T_{cp} . To znamená, že při použití tenčí vrstvy luminoforu je absorbována menší část modrého světla a výsledná bílá má modrý nádech – výsledkem je „studená bílá“ o T_{cp} vyšší než 5 300 K. V domácnostech bychom pak měli používat „teplou bílou“ o T_{cp} menší než 3 300 K, která je vytvořena silnou vrstvou luminoforu a v jejím spektru tak převládají žlutooranžové tóny, neboť velká část emitovaného modrého světla je pohlcena použitým luminoforem. Tím se dostáváme k tomu, že minimálně na úrovni receptorů můžeme uvažovat sčítání, zesilování, či zeslabování účinků. Uvažujeme-li, že základním aspektem kolorimetrie (teorie a měření barev) je zkoumání účinků barevných podnětů na lidského pozorovatele, pak pro vhodný popis potřebujeme i teoretický model, který bude odpovídajícím způsobem odrážet fyzikální jevy spojené s vjemem barvy, fyziologické a psychologické aspekty vnímání. Tady narážíme na problém, co je fundamentální vlastností skutečnosti a co je závislé na pozorovateli. Na základní popis těchto procesů používáme nejčastěji tzv. Grassmannovu strukturu.¹³ Jedná se o obecnou matematickou strukturu, která může popisovat řadu fyzikálních situací, a ne pouze specifické problémy kolorimetrie.

13 — Krantz, D. H. (1975). Color measurement and color theory: I. Representation theorem for Grassmann structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 12(3), 283–303.

is the perception of yellow, which can be prepared either as a monochromatic stimulus or by a suitable combination of red and green. Similarly, the perception of white may be elicited by equal stimulation of all three cone types (equi-energy white), as well as by additive mixing of complementary colors. The most common LED light sources are based on this principle, where a semiconductor chip that emits in the blue region of the spectrum around 450 nm is overlaid with a phosphor that, due to fluorescence, re-emits part of the blue light in the yellow-orange region of the spectrum. The result is an approximately white color, the tonality of which can be adjusted by the relative ratio of light emitted from the two parts of the spectrum and by adjusting the resulting CCT correlated color temperature. This means that by using a thinner phosphor layer, less of the blue light is absorbed and the resulting white has a blue tint – resulting in a ‘cool white’ with a CCT greater than 5,300 K. In households, we should then use a ‘warm white’ with a CCT of less than 3,300 K, which is produced by a thick layer of phosphor and thus has a predominantly yellow-orange spectrum, as much of the emitted blue light is absorbed by the phosphor used. This brings us to the fact that, at least at the receptor level, we can consider addition, amplification, or attenuation effects. If we consider that a fundamental aspect of Colorimetry (Color Theory and Measurement) is the study of the effects of color stimuli on the human observer, then for a suitable description we also need a theoretical model that adequately reflects the physical phenomena associated with color perception, the physiological and psychological aspects of perception. Here we run into the problem of what is a fundamental property of reality and what is observer dependent. For a basic description of these processes, we most often use the so-called Grassmann structure.¹³ This is a general mathematical structure that can describe a variety of physical situations, and not only specific problems of colorimetry.

13 — Krantz, D. H. (1975). Color measurement and color theory: I. Representation theorem for Grassmann structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 12(3), 283–303

Popis barvy

Podíváme se na reálnou situaci, která vzniká při pozorování vizuálních podnětů, můžeme se vrátit k problému, který byl zmíněn v oddíle 2, tedy problému „záporné“ barvy. Již bylo uvedeno, že v rámci Guildova-Wrightova experimentu vznikla taková situace, kdy žádnou kombinací tří primárních světél nebylo možné dosáhnout vyrovnání barev, viz **OBR. 18**. Teprve v okamžiku, kdy primární červené světlo o určité intenzitě bylo přesunuto na stranu monochromatického podnětu (světla v přibližném rozmezí vlnových délek 440 až 540 nm) došlo k vyrovnání barev.



OBR. 18 Kombinace primárního modrého a zeleného světla neposkytuje při zachování shodného barevného tónu dostatečnou čistotu



OBR. 19 Přídavek primárního červeného světla způsobí snížení čistoty monochromatického světla 480 nm a dojde k vyrovnání barev

Pro popis této situace můžeme využít již zmíněnou Grassmannovu strukturu: Máme množinu barevných světél A . Pro každá dvě světla $a, b \in A$ máme operaci smíšení $a \oplus b$, tedy součet podle vlnových délek světél. A operaci násobení kladným skalárem $t * a$ (vynásobení číslem t přes každou vlnovou délku). Struktura $(A, \oplus, *)$ zachycuje fyzikální vlastnosti situace a operace jsou založeny na empirickém pozorování skládání světél a změně intenzity. Dále naše struktura musí zachycovat vnímání podnětu pozorovatelem, protože naší strukturou chceme popsat kolorimetrickou situaci, a to konkrétně metamerii ¹⁴, tedy stav, kdy se dvě světla jeví pozorovateli jako stejná z pohledu barvy. Matematicky chceme zachytit tuto vlastnost tak, že se z určitého pohledu světla rovnají, tedy zavedeme na množině relaci ekvivalence \sim . Ekvivalence zobecňuje přirozenou představu rovnosti a je definována následujícími třemi vlastnostmi.

14 — Barevná světla, která za jinak stejných podmínek vyvolávají stejný vjem barvy, a tedy mají stejnou chromaticnost, přestože mají různá spektrální složení, se nazývají metamerní a celý tento jev pak metamerie.

Description of color

If we look at the real situation that arises when observing visual stimuli, we can return to the problem mentioned in Section 2, the problem of ‘negative’ color. It has already been shown that in the Guild-Wright experiment a situation arose in which no combination of the three primary lights could achieve color equalization, see **FIG. 18**. Only when the primary red light of a certain intensity was shifted to the side of the monochromatic stimulus (light in the approximate wavelength range of 450 to 550 nm) did the colors align.

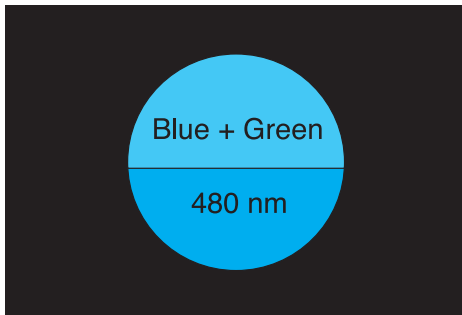


FIG. 18 The combination of primary blue and green light does not provide sufficient purity while maintaining the same color tone

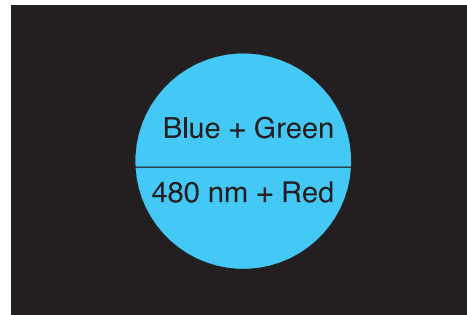


FIG. 19 The addition of primary red light causes a reduction in the purity of the 480 nm monochromatic light and color matching occurs

To describe this situation, we can use the already mentioned Grassmann structure: we have a set of colored lights A . For every two lights $a, b \in A$ we have a mixing operation $a \oplus b$, i.e., a summation over the wavelengths of the lights. And the multiplication operation by a positive scalar $t * a$ (multiplying by t over each wavelength). The structure $(A, \oplus, *)$ captures the physical properties of the situation and the operations are based on empirical observations of light stacking and intensity changes. Furthermore, our structure must capture the observer’s perception of the stimulus, since our structure is intended to describe a colorimetric situation, namely metamerism¹⁴, a condition where two lights appear the same in terms of color to the observer. Mathematically, we want to capture this property by making the lights equal from a certain point of view, i.e., we introduce an equivalence relation \sim on the set. Equivalence generalizes the natural notion of equality and is defined by the following three properties.

14 — Colored lights which, under otherwise identical conditions, give rise to the same perception of color, and therefore have the same chromaticity, although they have different spectral compositions, are called metamerics, and the whole phenomenon is called metamerism.

- (i) Pro všechna $a \in A$ platí $a \sim a$,
- (ii) Pro všechna $a, b \in A$ platí $a \sim b$, potom $b \sim b$,
- (iii) Pro všechna $a, b, c \in A$ platí $a \sim b, b \sim c$ potom $a \sim c$.

Vlastnost (i) označujeme jako reflexivitu, vlastnost (ii) jako symetrii a vlastnost (iii) jako tranzitivitu. Pro přehlednější psaní budeme v dalším textu používat logické kvantifikátory. Symbol \forall znamená „Pro všechny“ a \exists znamená „existuje“. Tedy definici ekvivalence přepíšeme.

Relace \sim definovaná na množině A je ekvivalence, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní:

$$\forall a \in A : a \sim a,$$

$$\forall a, b \in A : a \sim b \Rightarrow b \sim a,$$

$$\forall a, b, c \in A : a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Celkově dostáváme strukturu $(A, \oplus, *, \sim)$. Abychom mohli lépe pracovat s touto strukturou, musíme zavést její axiomy, tedy její základní definující pravidla. Protože od operace \oplus chceme, aby si udržela základní vlastnosti sčítání, budeme vyžadovat následující:

$$\forall a, b \in A : a \oplus b \in A,$$

$$\forall a, b \in A : a \oplus b = b \oplus a,$$

$$\forall a, b, c \in A : a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

$$\forall a, b, c \in A : a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow a = b.$$

Navíc po našem násobení chceme, aby se popis choval podle empiricky zjištěných dat, tedy nebudeme připouštět záporné hodnoty skalárů a zároveň chceme tyto dvě operace provázat v naší struktuře. Toho docílíme takto:

$$\forall a \in A, t > 0 : t * a \in A,$$

$$\forall a \in A : 1 * a = a,$$

$$\forall a \in A, t, u > 0 : t * (u * a) = (tu) * a,$$

- (i) for all $a \in A$ apply $a \sim a$,
- (ii) for all $a, b \in A$ apply $a \sim b$, then $b \sim a$,
- (iii) for all $a, b, c \in A$ apply $a \sim b, b \sim c$ then $a \sim c$.

We refer to property (i) as reflexivity, property (ii) as symmetry, and property (iii) as transitivity. For ease of writing, we will use logical quantifiers in the rest of the paper. The symbol \forall means 'For all' and \exists means 'exists'. Thus, we rewrite the definition of equivalence.

A relation \sim defined on a set A is an equivalence if it is reflexive, symmetric, and transitive:

$$\forall a \in A : a \sim a,$$

$$\forall a, b \in A : a \sim b \Rightarrow b \sim a,$$

$$\forall a, b, c \in A : a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Overall, we get the structure $(A, \oplus, *, \sim)$. To work better with this structure, we need to introduce its axioms, i.e., its basic defining rules. Since we want the \oplus operation to retain the basic properties of addition we will require the following:

$$\forall a, b \in A : a \oplus b \in A,$$

$$\forall a, b \in A : a \oplus b = b \oplus a,$$

$$\forall a, b, c \in A : a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

$$\forall a, b, c \in A : a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow a = b.$$

Moreover, after our multiplication, we want the description to behave according to empirically observed data, i.e., we will not allow negative values of scalars, and we also want to link these two operations in our structure. We do this as follows:

$$\forall a \in A, t > 0 : t * a \in A,$$

$$\forall a \in A : 1 * a = a,$$

$$\forall a \in A, t, u > 0 : t * (u * a) = (t u) * a,$$

$$\forall a, b \in A, t > 0 : t * (a \oplus b) = (t * a) \oplus (t * b),$$

$$\forall a \in A, t, u > 0 : (t + u) * a = (t * a) \oplus (u * a).$$

$$\forall a, b \in A, t > 0 : t * (a \oplus b) = (t * a) \oplus (t * b),$$

$$\forall a \in A, t, u > 0 : (t + u) * a = (t * a) \oplus (u * a).$$

První tři axiomy nám ukazují, jak se násobení chová samo o sobě, kdežto zbylé dva vyjadřují, jak se násobení chová vůči jiným operacím. Z formálního hlediska je důležité si všimnout, že v našich axiomech nevystupují pouze námi zavedené operace \oplus , $*$, ale také operace klasického sčítání a násobení v případě, že pracujeme se skaláry t, u . I když se naše dvě operace chovají podobně jako sčítání a násobení nad reálnými čísly (nad skaláry), musíme mít na paměti, že v naší struktuře nepracujeme s reálnými čísly, ale s formálními symboly, které reprezentují naše barevná světla a například následující vztah $t + a$ v naší struktuře nedává smysl, protože bychom použili operaci klasického sčítání, která pro naši nosnou množinu A není definovaná.

Z formálního hlediska nám zbývá zadefinovat vlastnosti relace ekvivalence. Těmto axiomům se v odborné literatuře říká Grassmannovy zákony.¹⁵ První zákon říká, že námi zavedená relace je ekvivalencí. Tedy musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní, jak bylo uvedeno dříve. Druhý zákon je tzv. zákon aditivity:

$$\forall a, b, c \in A : a \sim b \Leftrightarrow a \oplus c \sim b \oplus c.$$

Třetí zákon je zákon skalárního násobení:

$$\forall a, b \in A : a \sim b \Rightarrow t * a \sim t * b.$$

Pokud struktura $(A, \oplus, *, \sim)$ splňuje tyto axiomy, pak řekneme, že se jedná o Grassmannovu strukturu. Druhý a třetí zákon pojí ekvivalenci s již zavedenými operacemi. U zákona aditivity si můžeme povšimnout podobnosti s axiomem:

$$\forall a, b, c \in A : a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow a = b.$$

Je zde jeden velký rozdíl, zákon aditivity má silnější podstatu, protože obsahuje ekvivalenci. To nám dovoluje s relací provádět ekvivalentní úpravy. Z empirického hlediska nám říká, že metamerie je udržována i přes smíšení barev. Tedy dvě barevná světla jsou metamerní právě tehdy, když první světlo v kombinaci s novým třetím barevným světlem je metamerní kombinací druhého světla s tímž třetím barevným světlem. Ekvivalence je zde důležitá, protože nám dovoluje jít oběma směry. Nejen že přimíchání nového světla do obou metamerních světél neporuší metamerii, ale také, že pokud jsou dvě světla metamerní a současně jsou obě směsí dvou barevných světél, z nichž jedno světlo v kombinaci je společné pro obě, pak toto společné světlo můžeme „vyjmout“ a vzniklý pár bude pořád metamerní. Jinými slovy zákon aditivity nám dává způsob, jak popsat kombinace barev pomocí metamerie.

15 — Brill, M. H. (1990). Mesopic color matching: some theoretical issues. *JOSA A*, 7(10), 2048–2051.

The first three axioms show us how multiplication behaves by itself, while the other two express how multiplication behaves with respect to other operations. From a formal point of view, it is important to notice that our axioms do not only feature the operations $\oplus, *$ introduced by us, but also the operations of classical addition and multiplication when we work with scalars t, u . Even though our two operations behave similarly to addition and multiplication over real numbers (over scalars) we must keep in mind that in our structure we are not working with real numbers but with formal symbols that represent our colored lights, and for example the following relation $t + a$ does not make sense in our structure because we would use a classical addition operation that is not defined for our support set A .

From a formal point of view, we are left to define the properties of the equivalence relation. These axioms are called Grassmann's laws in the literature.¹⁵ The first law says that the relation we have introduced is an equivalence relation. Thus, it must be reflexive, symmetric, and transitive as stated earlier. The second law is the so-called law of additivity:

¹⁵ — Brill, M. H. (1990). Mesopic color matching: some theoretical issues. *JOSA A*, 7(10), 2048–2051.

$$\forall a, b, c \in A : a \sim b \Leftrightarrow a \oplus c \sim b \oplus c.$$

The third law is the law of scalar multiplication:

$$\forall a, b \in A : a \sim b \Rightarrow t * a \sim t * b.$$

If a structure $(A, \oplus, *, \sim)$ satisfies these axioms, then we say that it is a Grassmann structure. The second and third laws relate the equivalence to already established operations. For the law of additivity, we can note the similarity with the axiom:

$$\forall a, b, c \in A : a \oplus c = b \oplus c \Rightarrow a = b.$$

There is one big difference, the law of additivity has a stronger essence because it contains equivalence. This allows us to make equivalence adjustments to the session. Empirically, it tells us that metamerism is maintained despite the mixing of colors. That is, two colored lights are metameric just when the first light combined with a new third colored light is a metameric combination of the second light with the same third colored light. Equivalence is important here because it allows us to go both ways. Not only does the addition of the new light to the two metameric lights not break metamerism, but also that if two lights are metameric and at the same time both are a mixture of two-colored lights of which one light in the combination is common to both, then we can 'take out' this common light and the resulting pair will still be metameric. In other words, the law of additivity gives us a way to describe color combinations using metamerism.

The third law, on the other hand, tells us that if two lights are metameric, then if we change their intensity by the same constant, then the metamerism is preserved. The law only works in one direction and therefore does not allow us to go from the

Třetí zákon nám naopak říká, že jsou-li dvě světla metamerní, pak změníme-li jejich intenzitu o stejnou konstantu, pak se metamerie zachová. Mohlo by se zdát, že zákon funguje jen jedním směrem a tedy neumožňuje jít od změněné intenzity zpět k původním světům, to je však pouze zdání a ve skutečnosti platí implikace oběma směry. Nicméně důvodem k platnosti opačné implikace přispívá, že skalár, kterým násobíme, je součástí reálných čísel (jejich kladné poloosy), a tedy můžeme násobit číslem převráceným následujícím způsobem: Mějme dvě světla $a, b \in A : a \sim b$ pak pro libovolné $t > 0$ platí $t * a \sim t * b$. Protože zákon platí pro všechna světla a zároveň z vlastností reálných čísel platí $\forall t > 0 \exists t^{-1} : tt^{-1} = 1$, potom platí:

$$t * a \sim t * b \Rightarrow t^{-1} * (t * a) \sim t^{-1} * (t * b)$$

a pravá strana je s využitím vlastností našeho násobení skalárem stejná jako $a \sim b$.

Nyní můžeme zavést vztah trichromatickosti, kde pro libovolné $a_0, a_1, a_2, a_3 \in A$ existují pozitivní skaláry $t_i, u_i, i = 0, 1, 2, 3$, takové, že $t_i \neq u_i$, pro nejméně jedno i a takové, že:

$$\sum_{i=0}^3 t_i * a_i \sim \sum_{i=0}^3 u_i * a_i$$

(v tomto případě symbol sumy zahrnuje \oplus .)

Máme také rovnost, kdy existují $a_1, a_2, a_3 \in A$ takové, že pro libovolný kladný skalár $t_i, u_i, i = 1, 2, 3$, jestliže

$$\sum_{i=1}^3 t_i * a_i \sim \sum_{i=1}^3 u_i * a_i$$

když $t_i = u_i$ pro $i = 1, 2, 3$.

Zde je nutné připomenout, Grassmann sám osobně axiom ekvivalence neuváděl, nicméně jej užíval implicitně. Důležité je, že reprezentující vektorový prostor je m -rozměrný tehdy a jen tehdy, je-li Grassmannova struktura m -chromatická. Další výhodou je, že reprezentující vektorový prostor a homomorfismus nejsou vázány na žádný konkrétní souřadnicový systém; jsou konstruovány kanonicky.

Vrátíme-li se k problematice metamerních světél, pak můžeme připomenout, že Youngova-Helmholtzova teorie je založena na některých jednoduchých experimentálních zjištěních za určitých podmínek pozorování: pokud je v jinak tmavém zorném poli zobrazen malý světelný bod (obvykle apertura o velikosti asi 2° zorného úhlu), zjistí se, že psychologický vztah metamerie, označovaný \sim , není ovlivněn fyzikálními operacemi překrývání světél (což odpovídá sčítání spektrálních hustot

changed intensity back to the original lights, but this is only an appearance and in fact the implication goes both ways. However, a contributing reason for the validity of the converse implication is that the scalar we are multiplying by is part of the real numbers (their positive semi-axes) and hence we can multiply by the inverse number in the following way: if we have two lights $a, b \in A : a \sim b$ then for any $t > 0$, $t * a \sim t * b$. Since the law holds for all lights, and at the same time, from the properties of the real numbers, $\forall t > 0 \exists t^{-1} : tt^{-1} = 1$ then:

$$t * a \sim t * b \Rightarrow t^{-1} * (t * a) \sim t^{-1} * (t * b)$$

and the right side is the same as $a \sim b$ using the properties of our scalar multiplication.

We can now introduce a trichromaticity relation where for any $a_0, a_1, a_2, a_3 \in A$ there exist positive scalars $t_i, u_i, i = 0, 1, 2, 3$, such that $t_i \neq u_i$, for at least one i and such that:

$$\sum_{i=0}^3 t_i * a_i \sim \sum_{i=0}^3 u_i * a_i$$

(In this case, the sum symbol includes \oplus .)

We also have the equality where there exist $a_1, a_2, a_3 \in A$ such that for any positive scalar $t_i, u_i, i = 1, 2, 3$ if

$$\sum_{i=1}^3 t_i * a_i \sim \sum_{i=1}^3 u_i * a_i$$

if $t_i = u_i$ for $i = 1, 2, 3$.

It should be noted here that Grassmann himself did not personally state the axiom of equivalence but used it implicitly. The important point is that the representing vector space is m -dimensional if and only if the Grassmann structure is m -chromatic. Another advantage is that the representing vector space and the homomorphism are not bound to any coordinate system; they are constructed canonically.

Returning to the problem of metameric lights then we may recall that the Young-Helmholtz theory is based on some simple experimental findings under certain observational conditions: if a small point of light (usually an aperture of about 2° of visual angle) is shown in an otherwise dark field of view, it is found that the psychological relation of metamerism, denoted by \sim , is not affected by the physical operations of overlapping lights (corresponding to the addition of spectral energy densities), denoted by \oplus , and the change in intensity of lights, denoted by $*$. That is, if a and b are perceptually indistinguishable lights (metameric lights), i.e., $a \sim$

energie), označovanými \oplus , a změnou intenzity světla, označovanými $*$. To znamená, že pokud jsou a a b percepčně nerozlišitelná světla (metamerní světla), tj. $a \sim b$, se spektrálními rozděleními energie $E_a(\lambda)$ a $E_b(\lambda)$ a jestliže se ke každému z těchto světla bodově přidá stejné světlo c s rozdělením energie $E_c(\lambda)$ („aditivní směs barev“), tj. $E_{a\oplus b}(\lambda) = E_a(\lambda) + E_b(\lambda)$, pak platí následující výše uvedené vztahy:

$$a \oplus c \sim b \oplus c$$

$$t * a \sim t * b$$

Metamerie je tedy (do značné míry) zachována při sčítání a skalárním násobení světla. Společně s trichromatickou shodou barev a jedinečností trichromatických shod to dává vzniknout trojici lineárních kódů, které představují metamerii v následujícím smyslu. Nechť je $(L, \oplus, *)$ kvalitativní fyzikální struktura světla (kde L je množina světla identifikovaná s jejich spektrálními složeními zářivé energie). Pak existuje zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, které mapuje kvalitativní fyzikální strukturu homomorfně (tj. lineárně) do trojrozměrného reálného vektorového prostoru tak, že $a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$.

Tedy fyzikální struktura $(L, \oplus, *)$ a psychologická struktura (L, \sim) se vzájemně ovlivňují a vytvářejí psychofyzikální strukturu $(L, \oplus, *, \sim)$. Empirická platnost Grassmannových zákonů činí z psychologického vztahu (vztah kongruence vzhledem k fyzikálním operacím \oplus a $*$).

Zobrazení φ se bude nazývat Grassmannův kód. To není jedinečné, ale existuje celá rodina takových kódů, které jsou lineárně příbuzné. Patří mezi ně zobrazení, která představují kódy fyziologických receptorů, a zobrazení (X, Y, Z) , které vede k barevnému prostoru CIE. Vizualní systém tak vytváří třídy ekvivalence na množině fyzických světla, což se z fyzikálního hlediska rovná zesílení fyzikálního popisu. Způsob, jakým se z nekonečně rozměrného fyzikálního popisu vyčleňují třídy percepční ekvivalence, tak popisují výše uvedené Grassmannovy zákony. Tyto zákony umožňují numericky reprezentovat barvy v konvexním kuželi v trojrozměrném reálném vektorovém prostoru, což vede k pojmu trojrozměrného barevného prostoru, jehož prvky jsou v tomto vektorovém prostoru popsány kódem barev $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Třídy metamerních světla pak lze identifikovat pomocí barevného vzhledu. Jak již bylo uvedeno, pojem Grassmannova kódu pro metamerii se nevztahuje na konkrétní atributy barvy (na rozdíl od barevných kódů uváděných v teorii protilehlých barev) a je nutné brát v úvahu, že primárně byl odvozen pro primární zářiče – světla. Vzniká tak otázka, zda v případě námitek například proti aditivitě u některých vizuálních situací není problémem skutečnost, že se jedná o situace, v nichž figurují primárně sekundární zářiče, typicky barevné povrchy. Tyto otázky však pro tentokrát necháme stranou a upřeme pozornost zpět k Youngově-Helmholtzově teorii a způsobu, jakým byl odvozen tzv. CIE standardní pozorovatel. V dnešní době již disponujeme takovými experimentálními metodami, abychom byli schopni určit spektrální účinnosti jednotlivých druhů čípků, jak dokumentují znázornění uvedená na **OBR. 9.**

b , with spectral energy distributions $E_a(\lambda)$ and $E_b(\lambda)$, and if the same light c with energy distribution $E_c(\lambda)$ ('additive color mixture') is added pointwise to each of these lights, i.e., $E_{a\oplus b}(\lambda) = E_a(\lambda) + E_b(\lambda)$, then the following relations above hold:

$$a \oplus c \sim b \oplus c$$

$$t * a \sim t * b$$

Metamerism is thus (largely) preserved in the addition and scalar multiplication of lights. Together with trichromatic color matching and the uniqueness of trichromatic matches, this gives rise to a trio of linear codes that represent metamerism in the following sense. Let $(L, \oplus, *)$ be the qualitative physical structure of the lights (where L is the set of lights identified with their spectral compositions of radiant energy). Then there exists a mapping $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ that maps the qualitative physical structure homomorphically (i.e., linearly) into a three-dimensional real vector space such that $a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$.

Thus, the physical structure $(L, \oplus, *)$ and the psychological structure (L, \sim) interact to form the psychophysical structure $(L, \oplus, *, \sim)$. The empirical validity of Grassmann's laws makes the psychological relation (the congruence relation with respect to the physical operations \oplus and $*$).

The representation of φ will be called the Grassmann code. This is not unique, but there is a whole family of such codes that are linearly related. These include the representations that represent physiological receptor codes, and the representation (X, Y, Z) that leads to the CIE color space. The visual system thus generates equivalence classes on the set of physical lights, which in physical terms amounts to an amplification of the physical description. Thus, the way in which perceptual equivalence classes are extracted from an infinite-dimensional physical description is described by Grassmann's laws above. These laws allow one to numerically represent colors in a convex cone in a three-dimensional real vector space, leading to the notion of a three-dimensional color space whose elements are described by a color code $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ in this vector space. The classes of metameric lights can then be identified by their color appearance. As already mentioned, the notion of Grassmann code for metamerism does not refer to specific attributes of color (unlike the color codes given in the theory of opposite colors), and it must be considered that it was primarily derived for primary emitters – lights. This raises the question of whether, in the case of objections to additivity for some visual situations, for example, the fact that these are situations involving primarily secondary emitters, typically colored surfaces, is not a problem. However, we leave these issues aside for the moment and turn our attention back to the Young-Helmholtz theory and the way in which the so-called CIE standard observer was derived. We now have the experimental methods to be able to determine the spectral efficiencies of different types of cones, as documented by the illustrations in **FIG. 9**. 100 years ago, however, the situation was different, and this is one of the reasons why the maximum chromaticity method was chosen to measure

Před 100 lety však byla situace odlišná, a i proto byla zvolena cesta měření funkcí vyrovnání barev metodou maximální chromatičnosti. Jak již bylo uvedeno, v Guildově-Wrightově experimentu byla zvolena tři přibližně monochromatická světla tak, aby žádné nebylo možné připravit kombinací zbývajících dvou, přičemž ve Wrightově experimentu červené měrné světlo (R) odpovídalo monochromatickému světlu s vlnovou délkou 650 nm, zelené měrné světlo (G) odpovídalo vlnové délce 530 nm a modré měrné světlo (B) odpovídalo vlnové délce 460 nm. Guild vytvořil primární světla pomocí tří filtrů (červeného, zeleného a modrého) a světla žárovky. Protože byla v obou experimentech použita rozdílná primární světla, byly výsledné funkce vyrovnání barev rozdílné a bylo nutné změřená data přepočítat pomocí jednoduchých lineárních transformací:

$$\bar{r}' = k_1\bar{r} + k_2\bar{g} + k_3\bar{b} \quad (1)$$

$$\bar{r}' = k_4\bar{r} + k_5\bar{g} + k_6\bar{b} \quad (2)$$

$$\bar{r}' = k_7\bar{r} + k_8\bar{g} + k_9\bar{b}, \quad (3)$$

na referenční primární světla, kterými byly spektrální čáry rtuťové výbojky – modrá o vlnové délce 435,8 nm a zelená o vlnové délce 546,1 nm. Jako červené primární světlo bylo zvoleno světlo o vlnové délce 700 nm (bližší popis je uveden v publikaci Fairman, H. S., Brill, M. H., & Hemmendinger, H. (1997). *How the CIE 1931 color-matching functions were derived from Wright-Guild data*. Color Research & Application 22(1), 11–23). Výhodou bylo, že v obou experimentech bylo použito shodné vztažné bílé světlo (tehdejší standard NPL ve Velké Británii). Tím se dostáváme k velmi důležitému aspektu CIE kolorimetrie, a sice metrologické návaznosti. Aby bylo možné využívat kolorimetrickou soustavu pro měření barev, je nutné ji navázat na fotometrii jako nauku o měření světla, respektive účinku světla na zrakový orgán. V roce 1924 byl Mezinárodní komisí pro osvětlování CIE přijat standard popisující poměrnou spektrální účinnost lidského oka označovanou jako $V(\lambda)$. Tato funkce je využívána k převodu mezi radiometrickými a fotometrickými jednotkami. Aplikujeme-li poměrnou spektrální účinnost lidského oka na percepčně nerozlišitelná světla, dostáváme:

$$a \sim b \Leftrightarrow \int E_a V(\lambda) d\lambda = \int E_b V(\lambda) d\lambda,$$

kde E_a a E_b jsou spektrální složení světél a a b . Grassmannův kód φ_a může být identifikován s $\int E_a V(\lambda) d\lambda$ a příslušným psychofyzikálním prostorem barev, který je trojrozměrný. Příslušné rovnice vyrovnání barev pak můžeme přepsat do tvaru:

$$\int E_a(\lambda)\bar{r}(\lambda)d\lambda = \int E_b(\lambda)\bar{r}(\lambda) d\lambda \quad (4)$$

$$\int E_a(\lambda)\bar{g}(\lambda)d\lambda = \int E_b(\lambda)\bar{g}(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

$$\int E_a(\lambda)\bar{b}(\lambda)d\lambda = \int E_b(\lambda)\bar{b}(\lambda) d\lambda \quad (6)$$

the color equalization functions. As already noted in the Guild-Wright experiment, three approximately monochromatic lights were chosen so that none could be prepared by combining the other two, and in the Wright experiment the red specific light (R) corresponded to a monochromatic light with a wavelength of 650 nm, the green specific light (G) corresponded to a wavelength of 530 nm, and the blue specific light (B) corresponded to a wavelength of 460 nm. Guild created the primary lights using three filters (red, green, and blue) and the light of an incandescent bulb. Because different primary lights were used in the two experiments, the resulting color alignment functions were different, and it was necessary to recalculate the measured data using simple linear transformations:

$$\bar{r}' = k_1 \bar{r} + k_2 \bar{g} + k_3 \bar{b} \quad (1)$$

$$\bar{r}' = k_4 \bar{r} + k_5 \bar{g} + k_6 \bar{b} \quad (2)$$

$$\bar{r}' = k_7 \bar{r} + k_8 \bar{g} + k_9 \bar{b}, \quad (3)$$

to the reference primary lights, which were the spectral lines of the mercury lamp – blue with a wavelength of 435.8 nm and green with a wavelength of 546.1 nm. The red primary light was chosen to be the 700 nm wavelength light (see reference Fairman, H. S., Brill, M. H., & Hemmendinger, H. (1997). *How the CIE 1931 color-matching functions were derived from Wright-Guild data*. Color Research & Application 22(1), 11–23). The advantage was that the same reference white light (the then standard NPL in the UK) was used in both experiments. This brings us to a very important aspect of CIE colorimetry, namely metrological continuity. To use the colorimetric system for color measurement it is necessary to relate it to photometry as the science of measuring light, or the effect of light on the human eye. In 1924, the International Commission on Illumination of the CIE adopted a standard describing the relative spectral efficiency of the human eye, referred to as $V(\lambda)$ – spectral luminous efficiency function. This function is used to convert between radiometric and photometric units. If we apply the relative spectral efficiency of the human eye to perceptually indistinguishable light, we get:

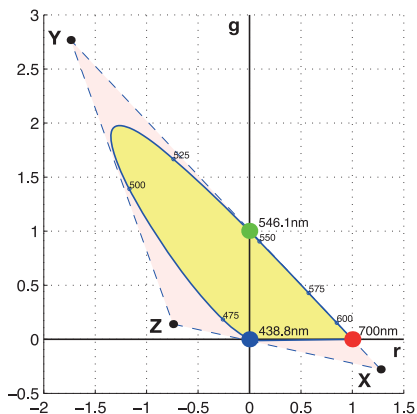
$$a \sim b \Leftrightarrow \int E_a V(\lambda) d\lambda = \int E_b V(\lambda) d\lambda,$$

where E_a and E_b are the spectral compositions of lights a and b . The Grassmann code φ_a can be identified with $\int E_a V(\lambda) d\lambda$ and the corresponding psychophysical color space, which is three-dimensional. We can then rewrite the corresponding color matching equations in the form:

$$\int E_a(\lambda) \bar{r}(\lambda) d\lambda = \int E_b(\lambda) \bar{r}(\lambda) d\lambda \quad (4)$$

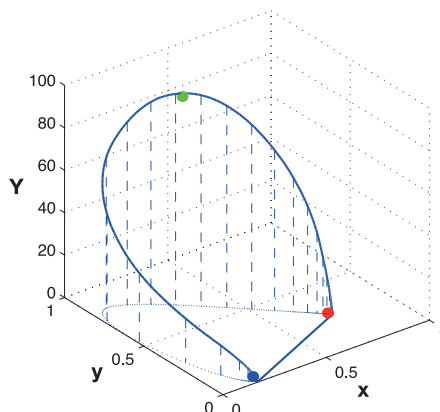
$$\int E_a(\lambda) \bar{g}(\lambda) d\lambda = \int E_b(\lambda) \bar{g}(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

$$\int E_a(\lambda) \bar{b}(\lambda) d\lambda = \int E_b(\lambda) \bar{b}(\lambda) d\lambda \quad (6)$$



OBR. 20 Znáznornění reálných barev (žlutá oblast) projekcí na plochu tvořenou souřadnicemi r, g a volba ireálných barev XYZ na vrcholech trojúhelníku obsahujícího všechny reálné barvy

FIG. 20 Representation of real colors (yellow area) by projection on the area formed by the coordinates r, g and selection of irreal colors XYZ on the vertices of the triangle containing all real colors



OBR. 21 Projekce funkce poměrné světelné účinnosti do kolorimetrické soustavy Yxy
FIG. 21 Projection of the luminous efficiency function into the colorimetric system Yxy

As already mentioned in the case of the standard observer functions $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ and $\bar{b}(\lambda)$, we encounter the problem that the function $\bar{r}(\lambda)$ is negative on the interval $\langle 440 \text{ nm}; 540 \text{ nm} \rangle$. To solve this problem, we can use projection:

$$r = \frac{R}{R+G+B}, \quad g = \frac{G}{R+G+B}, \quad b = \frac{B}{R+G+B} \quad \text{and} \quad r + g + b = 1,$$

where

$$R = \int E(\lambda) \bar{r}(\lambda) d\lambda \quad (7)$$

$$G = \int E(\lambda) \bar{g}(\lambda) d\lambda \quad (8)$$

$$B = \int E(\lambda) \bar{b}(\lambda) d\lambda. \quad (9)$$

The result is the chromaticity diagram of all real colors shown in **FIG. 20**.

If we want to introduce a colorimetric system where all the functions of the standard observer are positive and at the same time the continuity with photometry is preserved, then a normalization of all functions in the sense of:

$$\int V(\lambda) d\lambda = \int \bar{r}(\lambda) d\lambda = \int \bar{g}(\lambda) d\lambda = \int \bar{b}(\lambda) d\lambda = 1 \quad (10)$$

and the system of new specific lights XYZ such that $\bar{y}(\lambda) = V(\lambda)$, thanks to which the trichromatic component Y gives information about the brightness or luminance (**FIG. 21**) and the junction of the vertices X, Z forms an alychna (a line that does not carry information about the perceived brightness). A new triangle is created that contains both a diagram of all real colors and the irreal (unreal) colors. The linear combination of $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ and $\bar{z}(\lambda)$ is then used to convert to $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$, $\bar{b}(\lambda)$, such that:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{\lambda=380} & \dots & \bar{x}_{\lambda=780} \\ \bar{y}_{\lambda=380} & \dots & \bar{y}_{\lambda=780} \\ \bar{z}_{\lambda=380} & \dots & \bar{z}_{\lambda=780} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49000 & 0.31000 & 0.20000 \\ 0.17690 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0.00000 & 0.01000 & 0.99000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_{\lambda=380} & \dots & \bar{r}_{\lambda=780} \\ \bar{g}_{\lambda=380} & \dots & \bar{g}_{\lambda=780} \\ \bar{b}_{\lambda=380} & \dots & \bar{b}_{\lambda=780} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{\lambda=380} & & \\ & \dots & \\ & & n_{\lambda=780} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Since equations (7, 8, 9) are assumed to be valid for both primary and secondary emitters, they can be extended to include the transmission of light through objects ($T(\lambda)$) or the reflection of light from objects ($R(\lambda)$) and the resulting colorimetric system XYZ can be written in the form:

Jak již bylo uvedeno, v případě funkcí standardního pozorovatele $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ a $\bar{b}(\lambda)$ se setkáváme s problémem, že funkce $\bar{r}(\lambda)$ je na intervalu $<440 \text{ nm}; 540 \text{ nm}>$ záporná. Pro řešení tohoto problému můžeme využít projekci:

$$r = \frac{R}{R+G+B}, \quad g = \frac{G}{R+G+B}, \quad b = \frac{B}{R+G+B} \quad \text{a} \quad r + g + b = 1,$$

kde

$$R = \int E(\lambda)\bar{r}(\lambda) d\lambda \tag{7}$$

$$G = \int E(\lambda)\bar{g}(\lambda) d\lambda \tag{8}$$

$$B = \int E(\lambda)\bar{b}(\lambda) d\lambda. \tag{9}$$

Výsledkem je diagram chromatičnosti všech reálných barev uvedený na **OBR. 20**.

Pokud chceme zavést kolorimetrickou soustavu, kde všechny funkce standardního pozorovatele budou kladné a zároveň zde bude zachována návaznost na fotometrii, pak se obvykle zavádí normalizace všech funkcí ve smyslu:

$$\int V(\lambda)d\lambda = \int \bar{r}(\lambda) d\lambda = \int \bar{g}(\lambda)d\lambda = \int \bar{b}(\lambda)d\lambda = 1 \tag{10}$$

a soustava nových měrných světél XYZ taková, že platí $\bar{y}(\lambda) = V(\lambda)$, díky tomu trichromatická složka Y dává informaci o jasu či jasnosti (**OBR. 21**) a spojnice vrcholů X, Z tvoří alychnu (linie, která nenese informaci o vnímaném jasu). Vznikne nový trojúhelník, který obsahuje jak diagram všech reálných barev, tak barvy ireálné (neskutečné). Pro převod na $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ se pak používá lineární kombinace $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ a $\bar{b}(\lambda)$, taková, kdy platí, že:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{\lambda=380} & \dots & \bar{x}_{\lambda=780} \\ \bar{y}_{\lambda=380} & \dots & \bar{y}_{\lambda=780} \\ \bar{z}_{\lambda=380} & \dots & \bar{z}_{\lambda=780} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49000 & 0.31000 & 0.20000 \\ 0.17690 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0.00000 & 0.01000 & 0.99000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{r}_{\lambda=380} & \dots & \bar{r}_{\lambda=780} \\ \bar{g}_{\lambda=380} & \dots & \bar{g}_{\lambda=780} \\ \bar{b}_{\lambda=380} & \dots & \bar{b}_{\lambda=780} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{\lambda=380} & & \\ & \dots & \\ & & n_{\lambda=780} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Protože se předpokládá platnost rovnic (7, 8, 9) jak pro primární, tak sekundární zářiče, pak je můžeme rozšířit o průchod světla objektem ($T(\lambda)$) či odraz světla od objektů ($R(\lambda)$) a výslednou kolorimetrickou soustavu XYZ lze zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{t} = \text{TER} \tag{10}$$

where

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{\lambda=380} & \dots & \bar{x}_{\lambda=780} \\ \bar{y}_{\lambda=380} & \dots & \bar{y}_{\lambda=780} \\ \bar{z}_{\lambda=380} & \dots & \bar{z}_{\lambda=780} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{\lambda=380} & \dots & R_{\lambda=780} \\ R_{\lambda=380} & \dots & R_{\lambda=780} \\ R_{\lambda=380} & \dots & R_{\lambda=780} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{\lambda=380} & & \\ & \dots & \\ & & E_{\lambda=780} \end{bmatrix} \tag{14}$$

The advantage of this colorimetric measurement system is its general acceptance as a worldwide standard. The disadvantages include its visually uneven scaling and its inability to describe color appearance phenomena. **FIG. 7** shows an example of afterimages produced by local adaptation of vision, where the positions of complementary colors are interchanged for red-green, yellow-blue and black-white pairs. The implementation of the theory of opposite colors occurred at the level of CIE colorimetric measurement systems in 1976, when the CIELUV and CIELAB systems were adopted.¹⁶ The first system was designed for primary emitters and the second for secondary emitters. Although these colorimetric arrays represented a significant advance and are still in use today. Their disadvantage is their validity limited to a relatively narrow range of observing and illumination conditions. In practice, this means that, for example, when assessing the color of an object, the condition of an achromatic neutral grey background and, for example, an illuminance of about 1000 lx must be observed. Therefore, there is currently a high emphasis on the development of color appearance models that will encompass a wide range of illumination and observation conditions, including several color appearance phenomena. Examples include simultaneous contrast, achromatic and chromatic induction shown in **FIG. 22** to **FIG. 24**.

16 — Vik, M (2017). Colorimetry in Textile Industry. VUTS Liberec, ISBN 978-80-87184-65-3.

$$\mathbf{t} = \text{TER} \quad (\text{I0})$$

kde

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{II})$$

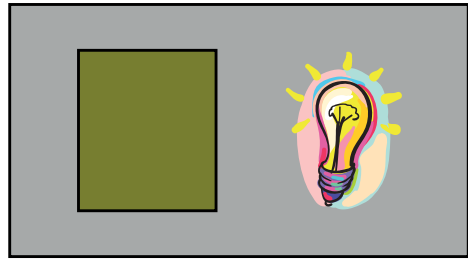
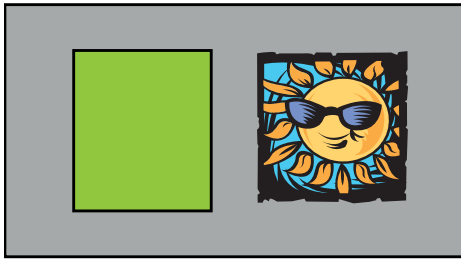
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{\lambda=380} & \dots & \bar{x}_{\lambda=780} \\ \bar{y}_{\lambda=380} & \dots & \bar{y}_{\lambda=780} \\ \bar{z}_{\lambda=380} & \dots & \bar{z}_{\lambda=780} \end{bmatrix} \quad (\text{I2})$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{\lambda=380} & \dots & R_{\lambda=780} \\ R_{\lambda=380} & \dots & R_{\lambda=780} \\ R_{\lambda=380} & \dots & R_{\lambda=780} \end{bmatrix} \quad (\text{I3})$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{\lambda=380} & & \\ & \dots & \\ & & E_{\lambda=780} \end{bmatrix} \quad (\text{I4})$$

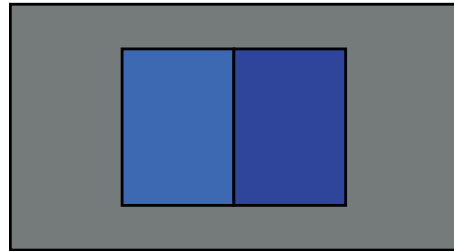
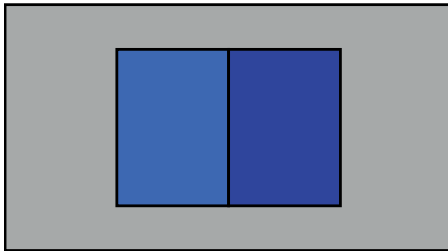
Výhodou této měrné kolorimetrické soustavy je její obecné přijetí jako celosvětového standardu. Mezi nevýhody můžeme naopak zařadit její vizuálně nerovnoměrné odstupňování a neschopnost popsat jevy barevného vzhledu. Na **OBR. 7** je ukázán příklad následných obrazů vzniklých lokální adaptací zraku, kdy dochází k vzájemným záměnám poloh komplementárních barev u dvojic červená-zelená, žlutá-modrá a černá-bílá. K implementaci teorie protilehlých barev došlo na úrovni měrných kolorimetrických soustav CIE v roce 1976, kdy byly přijaty soustavy CIELUV a CIELAB¹⁶. První soustava byla určena pro primární zářiče a druhá pro sekundární zářiče. I když tyto kolorimetrické soustavy představovaly značný pokrok a dodnes jsou používány v praxi, jejich nevýhodou je platnost omezená na poměrně úzký interval podmínek pozorování a osvětlování. V praxi to znamená, že například při hodnocení barvy určitého objektu je nutné dodržet podmínku achromatického neutrálně šedého pozadí a například osvětlenost okolo 1 000 lx. Proto je v současné době kladen vysoký důraz na vývoj modelů barevného vzhledu, které budou zahrnovat širokou škálu podmínek osvětlování a pozorování, včetně řady jevů barevného vzhledu. Příkladem mohou být simultánní kontrast, achromatická a chromatická indukce uvedené na **OBR. 22** až **OBR. 24**.

16 — Vik, M (2017). Colorimetry in Textile Industry. VUTS Liberec, ISBN 978-80-87184-65-3.



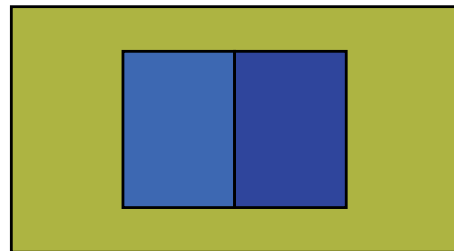
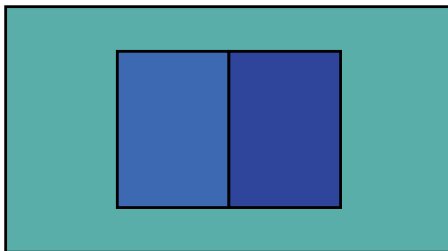
OBR. 22 Stabilita odstínu (Color Constancy) – vizuálně vnímaná změna barevného tónu předmětu v závislosti na použitém osvětlení.

FIG. 22 Color Constancy – the visually perceived change in the color tone of an object depending on the lighting used



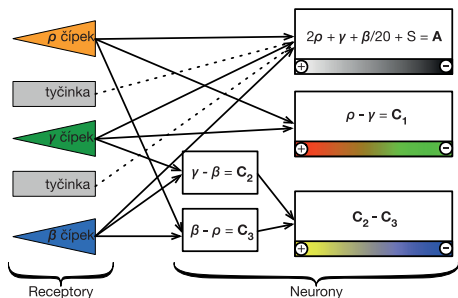
OBR. 23 Achromatická indukce – blízká plocha ovlivňuje vnímání světlosti barevných vzorků. Na tmavé blízké ploše se příslušné barvy jeví jako světlejší.

FIG. 23 Achromatic induction – the near surface affects the perception of the lightness of color samples. On a dark near surface, the corresponding colors appear lighter

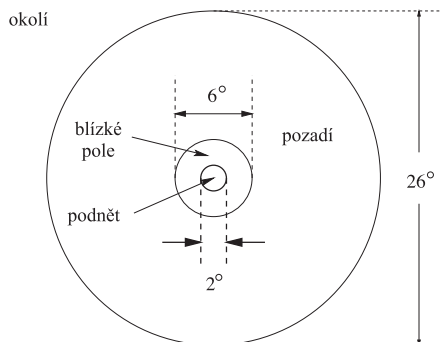


OBR. 24 Chromatická indukce – chromatičnost blízké plochy ovlivňuje vnímání barevného tónu vzorků.

FIG. 24 Chromatic induction – the chromaticity of the near surface affects the perception of the color tone of the samples



OBR. 25 Huntův model vzniku jednotlivých dvojic protilehlých barev a achromatického signálu reprezentujícího dvojici černá-bílá



OBR. 26 Specifikace složek zorného pole u komplexních modelů barevného vzhledu dle CIE

CIE postupně přijala tři různé varianty komplexních modelů barevného vzhledu pod označením CIECAM97, CIECAM02 a v roce 2022 model s označením CIECAM16¹⁷. Lze říci, že jednotlivé modely jsou ukázkou postupné optimalizace a zjednodušování, kdy model CIECAM16 do značné míry vyřešil problémy inverzního výpočtu v případě modelu CIECAM02.

¹⁷ — CIE 248:2022 The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16, DOI: 10.25039/TR.248.2022.

Komplexní modely barevného vzhledu CIE vycházejí primárně z Huntova modelu vnímání barev, viz **OBR. 25**. Již bylo uvedeno, že ve foveální oblasti sítnice se vyskytují pouze L a M čípky, v Huntově modelu je proto achromatická odezva tvořena signálem pouze z těchto fotoreceptorů na rozdíl od Adamsova modelu (ten byl základem pro soustavu CIELAB a CIELUV), kde se na ni podílejí všechny tři fotoreceptory – L M S. Zároveň tento model bere v úvahu, že zastoupení jednotlivých druhů čípků není v sítnici rovnoměrné a použitý výsledný poměr je následující 40L : 20M : 3S. Skutečnost, že horizontální a amakrinní buňky propojují nejen L-M a M-S fotoreceptory se odrazila na vzniku dalších dvou funkcí – signálů C3 a C2, jejichž vliv v Huntově, resp. CIECAM16 modelu ovlivňují odchylky podmínek pozorování od standardní CIE konfigurace vizuálního hodnocení. Samotný zápis modelu CIECAM16 je poměrně dlouhý, a proto autoři případným zájemcům doporučují například literaturu CIE 248:2022 The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16, DOI: 10.25039/TR.248.2022; Li, C., Li, Z., Wang, Z., Xu, Y., Luo, M. R., Cui, G. et al. (2017). *Comprehensive color solutions: CAM16, CAT16, and CAM16-UCS*. Color Research and Application, 42(6), 703–718. Obecně lze konstatovat, že modely CIECAM zahrnují tři kroky: V prvním kroku

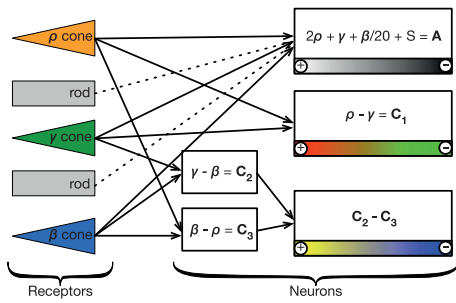


FIG. 25 Hunt's model of color vision – formation of individual pairs of opposite colors and an achromatic signal representing a black-white pair

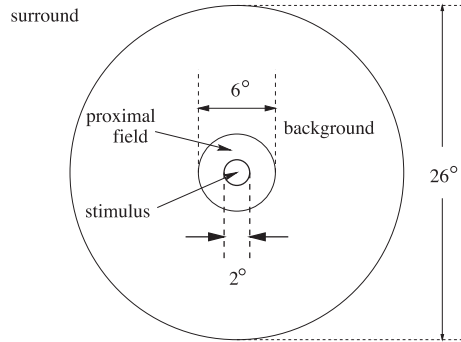
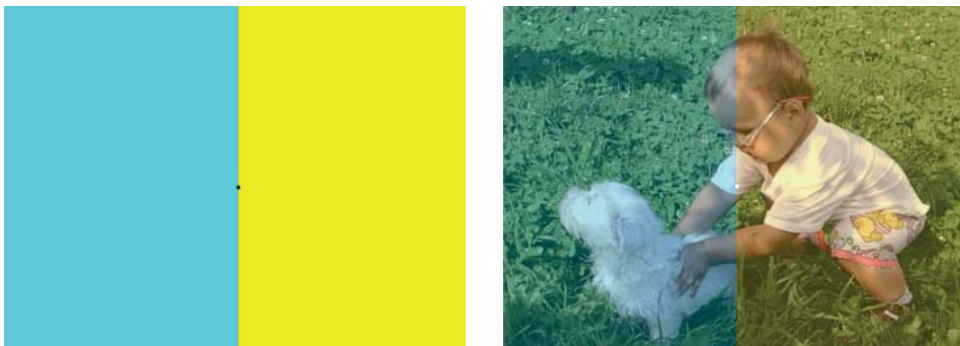


FIG. 26 Specification of field of view components in CIE color appearance models

The CIE has successively adopted three different variants of color appearance models under the CIECAM97, CIECAM02 and, in 2022, a model called CIECAM16¹⁷. It can be said that each model is an example of gradual optimization and simplification, with the CIECAM16 model having largely solved the inverse calculation problems in the case of the CIECAM02 model.

17 — CIE 248:2022 The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16, DOI: 10.25039/TR.248.2022.

The color appearance models of the CIE (CIECAMs) are primarily based on Hunt's model of color perception, see **FIG. 25**. It has already been mentioned that only L and M cones are present in the foveal region of the retina; therefore, in Hunt's model, the achromatic response is made up of signals from these photoreceptors only, in contrast to the Adams model (which was the basis for the CIELAB and CIELUV systems), where all three photoreceptors – L M S – are involved. At the same time, this model takes into account that the representation of the different cone types is not uniform in the retina and the resulting ratio used is as follows 40L : 20M : 3S. The fact that horizontal and amacrine cells connect not only L-M and M-S photoreceptors is reflected in the emergence of two other features – C3 and C2 signals, whose influence in the Hunt and CIECAM16 models, respectively, is affected by deviations of the observation conditions from the standard CIE configuration of visual assessment. The notation of the CIECAM16 model itself is quite lengthy, and therefore the authors refer potential interested readers to, for examples CIE 248:2022 The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16, DOI: 10.25039/TR.248.2022; Li, C., Li, Z., Wang, Z., Xu, Y., Luo, M. R., Cui, G.



OBR. 27 Demonstrace lokální chromatické adaptace. Fixujte svůj zrak na černou skvrnu mezi jednolitými modrými a žlutými plochami po dobu asi 30 sekund a poté přesuňte pohled na bílou skvrnu ve středu obrazu chlapce se psem. Všimněte si, že obraz chlapce se psem se po této adaptaci jeví přibližně jednotný.

FIG. 27 Demonstration of local chromatic adaptation. Fix your eyes on the black spot between the solid blue and yellow areas for about 30 seconds and then shift your gaze to the white spot in the center of the image of the boy with the dog. Notice that the image of the boy with the dog appears approximately uniform after this adaptation.

et al. (2017). *Comprehensive color solutions: CAM16, CAT16, and CAM16-UCS*). In general, CIECAM models involve three steps: in the first step, the chromatic adaptation (FIG. 27) is modeled using a transformation based on the so-called von Kries law of adaptation coefficients.¹⁸ This rule assumes three (and only three) independent spectral responses for color vision, the amount of which varies in inverse linear proportion to the stimulus intensity evoked by a given light source. Consequently, metameric color alignment must persist under changes in chromatic adaptation and under additive and proportional changes in metameric stimulation. This means that Grassmann's laws of invariance, additivity, and proportionality of color matching also hold for changes in adaptation.

The second step involves nonlinear compressions of the resulting spectral responses. This step is performed at the level of individual cone responses and involves the behavior of the photoreceptors. In the third step, the values of the opposite colors and the derived measures of lightness, subjective chromaticity, and color tone are calculated. There are some objections to this procedure¹⁹, where the function computed by nonlinear response compression appears to be a problem. This function is very close to the response compression known to occur in photoreceptors. It thus forms the first part in the processing chain in human vision, but in the CIECAM model it is the second step of the model. In contrast, Kunkel and Reinhard²⁰ propose a color appearance model with combined chromatic adaptation and nonlinear compression that is more in line with current knowledge of neurophysiology. At the same time, the computation of the correlates of color appearance involves color coding that occurs at the LGN level and where no prior computation of the color tone angle is required to compute the axes of opposite colors as in the case of CIECAM models. Despite these advantages, the model proposed by Kunkel and Reinhard has not been sufficiently tested and, despite its advantages, it still stands aside from the mainstream research in colorimetry.

18 — Fairchild, M. D. (2013) *Color Appearance Models*, 3rd ed., IS&T Series in Imaging Science and Technology, Wiley.

19 — Kunkel, T. & Reinhard, E. (2009). A neurophysiology-inspired steady-state color appearance model. *JOSA A*, 26.

20 — Kunkel, T. & Reinhard, E. (2009). A neurophysiology-inspired steady-state color appearance model. *JOSA A*, 26.

je chromatická adaptace (**OBR. 27**) modelována pomocí transformace vycházející z tzv. von Kriesova pravidla adaptačních koeficientů.¹⁸ Toto pravidlo předpokládá tři (a pouze tři) nezávislé spektrální odezvy pro barevné vidění, jejichž množství se mění v obráceném lineárním poměru k intenzitě podnětu vyvolaného daným světelným zdrojem. V důsledku toho musí metamerní vyrovnání barev přetrvávat při změnách chromatické adaptace a při aditivních i proporcionálních změnách metamerní stimulace. To znamená, že Grassmannovy zákony neměnnosti, aditivity a proporcionality shody barev platí i při změnách adaptace.

Druhý krok zahrnuje nelineární kompresy výsledných spektrálních odezvy. Tento krok se provádí na úrovni odezvy jednotlivých čípků a zahrnuje chování fotoreceptorů. Ve třetím kroku jsou vypočítávány hodnoty protilehlých barev a z nich odvozených měř světlosti, subjektivní chromatičnosti a barevného tónu. Proti tomuto postupu existují určité námitky¹⁹, kdy se jako problém jeví funkce vypočtená nelineární kompresí odezvy. Tato funkce je velmi blízká kompresi odezvy, o níž je známo, že se vyskytuje ve fotoreceptorech. Tvoří tedy první část v řetězci zpracování v lidském vidění, v CIECAM modelu je však druhým krokem modelu. Kunkel a Reinhard²⁰ proti tomu navrhnou model barevného vzhledu s kombinovanou chromatickou adaptací a nelineární kompresí, která více odpovídá současným poznatkům neurofyziologie. Zároveň výpočet korelátů barevného vzhledu zahrnuje kódování barev, ke kterému dochází na úrovni LGN a kde pro výpočet os protilehlých barev není nutný předcházející výpočet úhlu barevného tónu jako v případě modelů CIECAM. Přes tyto výhody nebyl model navržený Kunkelem a Reinhardem dostatečně testován a přes své výhody zatím stojí stranou hlavního výzkumného proudu v oblasti kolorimetrie.

18 — Fairchild, M. D. (2013) *Color Appearance Models*, 3rd ed., IS&T Series in Imaging Science and Technology, Wiley.

19 — Kunkel, T. & Reinhard, E. (2009). A neurophysiology-inspired steady-state color appearance model. *JOSA A*, 26.

20 — Kunkel, T. & Reinhard, E. (2009). A neurophysiology-inspired steady-state color appearance model. *JOSA A*, 26.

Conclusion

As the above incomplete overview of the effects of light and color on humans illustrates, the subject is very broad and dynamically evolving. At the same time, it brings together a wide range of scientific disciplines, which makes it very difficult to synthesize the current state of knowledge in the field of colorimetry. Color perception is a complex physiological process that has not yet been fully understood and is therefore the subject of numerous investigations. As it has been shown, theories of color perception largely simplify the complex interrelationships between the various cells of the visual system and must therefore be understood to be valid only under certain boundary conditions. An undeniable challenge for future developments in the field of complex color appearance models are issues related to different stimulus sizes, since the basic CIECAM models are defined strictly for stimuli corresponding to a 2° visual angle. How to include a complex color scene with a range of chromatic stimuli in the model when most experiments work with achromatic backgrounds? In real situations, how does the aging of the visual system affect the resulting spectral response profile of the observer? Although the CIE has defined observers with fundamental responses that allow for correction of color-matching functions depending on the age of the observer and the size of the stimulus, we do not have enough information at this time on how effective the incorporation of this observer into CIECAM is. It appears that the semi-incremental approach to developing color appearance models has largely run its course, and it will be necessary to reconsider the weighting of the various parameters currently rigidly input into the final solution.

Závěr

Jak dokumentuje výše uvedený neúplný přehled vlivu světla a barvy na člověka, je tato problematika velmi široká a dynamicky se vyvíjející. Zároveň v sobě sdružuje celou řadu vědních disciplín, což do značné míry komplikuje syntézu aktuálního stavu vědění v oblasti kolorimetrie. Vnímání barev je složitý fyziologický proces, který dosud nebyl plně poznán, a je proto předmětem četných výzkumů. Jak bylo ukázáno, teorie vnímání barev do značné míry zjednodušují komplikované vazby mezi jednotlivými buňkami zrakového systému, a je proto nutné chápat, že jsou platné pouze za určitých okrajových podmínek. Nespornou výzvou pro budoucí vývoj v oblasti komplexních modelů barevného vzhledu jsou otázky spojené s rozdílnými velikostmi podnětů, neboť základní modely CIECAM jsou definovány striktně pro podněty odpovídající zornému úhlu 2° . Jak do modelu zahrnout komplexní barevnou scénu s řadou chromatických podnětů, když většina experimentů pracuje s achromatickým pozadím? Jakým způsobem se v reálných situacích projevuje vliv stárnutí zrakového systému na výsledný profil spektrálních odezev pozorovatele? Přestože CIE definovala pozorovatele s fundamentálními odezvami, které umožňují korekci funkcí vyrovnání barev v závislosti na stáří pozorovatele a velikosti podnětu, nemáme v tuto chvíli dostatek informací o tom, jak účinné je začlenění tohoto pozorovatele do systému CIECAM. Zdá se, že inkrementální přístup k rozvoji modelů barevného vzhledu se do značné míry vyčerpal a bude nutné přehodnotit váhu jednotlivých parametrů v současné době rigidně vstupujících do výsledného řešení.

Literatura

Goldstein, B. E. and Cacciamani, L. (2022). *Sensation and Perception*, Cengage Boston

Adelson, E. H. (1999). *Light perception and lightness illusions*. In Gazzaniga, M. Editor *The new cognitive neurosciences* (s. 339–351). Cambridge, MA:MIT Press

Gilchrist, A.L. (1994). *Lightness, brightness, and transparency*. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Gilchrist, A., Kossyfidis, C., Bonato, F., Agostini, T., Cataliotti, J., Li, X., ...Economou, E. (1999). *An anchoring theory of lightness perception*. *Psychological review*, 106(4), 795–834

von Goethe, J. W. (2014). *Goethe's Theory of Colours*, Cambridge University Press

Vik, M., Periyasamy, A. P., Viková M. (2018). *Chromic Materials, Fundamentals, Measurements and Applications*. Waretown, NJ USA: Apple Academic Press Inc.

Hering, Ewald (1878). *Zur Lehre vom Lichtsinne*. Carl Gerolds' sohn., Wien

Wyszecki, G. and Stiles, W.S. (1982, 2000). *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, 2nd Ed. Wiley

Trenholm S, Awatramani G. B. (2019). *Myriad roles for gap junctions in retinal circuits*. In: Kolb H, Fernandez E, Nelson R, editors. *Webvision: The Organization of the Retina and Visual System* [Internet]. Salt Lake City (UT): University of Utah Health Sciences Center

Azeredo da Silveira R., Roska B. *Cell types, circuits, computation*. *Current Opinion in Neurobiology*. 2011; 21(5):664–671. PubMed PMID: 21641794.

Benson NC, Manning JR, Brainard DH: *Unsupervised learning of cone spectral classes from natural images*. *PLoS Comput Biol* 2014, 10:e1003652

Martin, P. R. (1998). *Colour processing in the primate retina: Recent progress*. *Journal of Physiology*, 513, 631–638

Aldhahir, S. (2021). *Differential color perception theory*, Book of proceedings International Colour Association (AIC) Conference 2021, Milan (Italy), August 30th – September 3rd 2021, s. 173–178

Krantz, D. H. (1975). *Color measurement and color theory: I. Representation theorem for Grassmann structures*. *Journal of Mathematical Psychology*, 12(3), 283–303

References

- Goldstein, B. E. and Cacciamani, L. (2022). *Sensation and Perception*, Cengage Boston
- Adelson, E. H. (1999). *Light perception and lightness illusions*. In Gazzaniga, M. Editor *The new cognitive neurosciences* (pp. 339–351). Cambridge, MA:MIT Press
- Gilchrist, A.L. (1994). *Lightness, brightness, and transparency*. Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Gilchrist, A., Kossyfidis, C., Bonato, F., Agostini, T., Cataliotti, J., Li, X., ...Economou, E. (1999). *An anchoring theory of lightness perception*. *Psychological review*, 106(4), 795–834
- von Goethe, J. W. (2014). *Goethe's Theory of Colours*, Cambridge University Press
- Vik, M., Periyasamy, A. P., Viková M. (2018). *Chromic Materials, Fundamentals, Measurements and Applications*. Waretown, NJ USA: Apple Academic Press Inc.
- Hering, Ewald (1878). *Zur Lehre vom Lichtsinne*. Carl Gerolds' sohn., Wien
- Wyszecki, G. and Stiles, W.S. (1982, 2000). *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, 2nd Ed. Wiley
- Trenholm S, Awatramani G. B. (2019). *Myriad roles for gap junctions in retinal circuits*. In: Kolb H, Fernandez E, Nelson R, editors. *Webvision: The Organization of the Retina and Visual System* [Internet]. Salt Lake City (UT): University of Utah Health Sciences Center
- Azeredo da Silveira R., Roska B. *Cell types, circuits, computation*. *Current Opinion in Neurobiology*. 2011; 21(5):664–671. PubMed PMID: 21641794
- Benson NC, Manning JR, Brainard DH: *Unsupervised learning of cone spectral classes from natural images*. *PLoS Comput Biol* 2014, 10:e1003652
- Martin, P. R. (1998). *Colour processing in the primate retina: Recent progress*. *Journal of Physiology*, 513, 631–638
- Aldhahir, S. (2021). *Differential color perception theory*, Book of proceedings International Colour Association (AIC) Conference 2021, Milan (Italy), August 30th – September 3rd 2021, pp. 173–178
- Krantz, D. H. (1975). *Color measurement and color theory: I. Representation theorem for Grassmann structures*. *Journal of Mathematical Psychology*, 12(3), 283–303

Brill, M. H. (1990). *Mesopic color matching: some theoretical issues*. JOSA A, 7(10), 2048–2051

W. D. Wright (1930). *A re-determination of the mixture curves of the spectrum*. Trans. Opt. Soc. 31 201

Guild J. (1931). *The colorimetric properties of the spectrum Transactions of the Royal Society of London*. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character 230: 149–187

Fairman, H. S., Brill, M. H., & Hemmendinger, H. (1997). *How the CIE 1931 color-matching functions were derived from Wright-Guild data*. Color Research & Application 22(1), 11–23

Vik, M (2017). *Colorimetry in Textile Industry*. VUTS Liberec, ISBN 978-80-87184-65-3

CIE 248:2022 The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16, DOI: 10.25039/TR.248.2022

Li, C., Li, Z., Wang, Z., Xu, Y., Luo, M. R., Cui, G. et al. (2017). *Comprehensive color solutions: CAM16, CAT16, and CAM16-UCS*. Color Research and Application, 42(6), 703–718

Fairchild, M. D. (2013). *Color Appearance Models*, 3rd ed., IS & T Series in Imaging Science and Technology, Wiley

Kunkel, T. & Reinhard, E. (2009). *A neurophysiology-inspired steady-state color appearance model*. JOSA A, 26(4), 776–782

Brill, M. H. (1990). *Mesopic color matching: some theoretical issues*. JOSA A, 7(10), 2048–2051

W. D. Wright (1930). *A re-determination of the mixture curves of the spectrum*. Trans. Opt. Soc. 31 201

Guild J. (1931). *The colorimetric properties of the spectrum Transactions of the Royal Society of London*. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character 230: 149–187

Fairman, H. S., Brill, M. H., & Hemmendinger, H. (1997). *How the CIE 1931 color-matching functions were derived from Wright-Guild data*. Color Research & Application 22(1), 11–23

Vik, M (2017). *Colorimetry in Textile Industry*. VUTS Liberec, ISBN 978-80-87184-65-3

CIE 248:2022 The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16, DOI: 10.25039/TR.248.2022

Li, C., Li, Z., Wang, Z., Xu, Y., Luo, M. R., Cui, G. et al. (2017). *Comprehensive color solutions: CAM16, CAT16, and CAM16-UCS*. Color Research and Application, 42(6), 703–718

Fairchild, M. D. (2013). *Color Appearance Models*, 3rd ed., IS&T Series in Imaging Science and Technology, Wiley

Kunkel, T. & Reinhard, E. (2009). *A neurophysiology-inspired steady-state color appearance model*. JOSA A, 26(4), 776–782

Mozek jako topologický procesor

Karel Ježek

Brain as a Topological Processor

Karel Ježek

Topologie jako matematická disciplína i její širší projekce do dalších oblastí je efektivním konceptem studia vztahů a vlastností projevů světa okolo nás. Klade důraz na identifikaci a upřednostnění úhelných pohledů v řešení vznášených otázek na úkor pro danou situaci méně podstatných charakteristik. V činnosti centrálního nervstva lze identifikovat množství dějů, v jejichž základu jsou rozpoznatelné elementy topologického přístupu. Jsou to např. schopnost hierarchizovat přicházející informace dle jejich relevance, schopnost abstrahovat podstatné vztahy z celku, mapovat prostor či tvořit a aktivovat mentální schémata. Je samozřejmé, že pro topologii jako lidský produkt musí lidský mozek mít též adekvátní neurobiologický základ. Nicméně značné množství experimentálních pozorování naznačuje, že topologické principy transformace stimulů, přicházejících do centrálního nervstva, nejsou výlučně konstruktem lidského abstraktního myšlení, nýbrž jsou přítomny na mnohem základnějších etážích neurální informační kaskády v různém rozsahu napříč živočišnými druhy. V této kapitole se pokusím některé z těchto procesů neurobiologicky definovat.

Relevance vztahů či působících sil z prostředí na organismus je velmi různorodá. Zpravidla je dána biologickou významností, jež se odvíjí od aspektů přežití jedince a druhu. U primitivních organismů jsou tyto relevantní vztahy především dostředivého charakteru, tedy přímo se vztahují k ose okolí – subjekt. U druhů se složitějšími vzorci chování kromě vztahu objekt – subjekt nabývá důležitosti mapování vztahů mezi jednotlivými objekty zevního světa. Vzniká osa typu „objekt × objekt – subjekt“. Uvažovaný subjekt zde k vzorcům chování ilustrovaných prvoplánovými rolemi lovce, potenciálního sexuálního partnera či prchající kořisti přidává polohu pozorovatele, který poznává svět v bohatších rovinách. Zjevným příkladem potřeby takového mapování vzájemných vztahů mezi objekty zevního světa je sociální chování jedinců či mapování prostorových vztahů. Suma informací dostupných danému jedinci přirozeně definuje jeho poznávaný svět. Rostoucí množství informací a rovin, v nichž je svět poznáván, je podmíněno úrovní poznávacích mechanismů. Z nich je to pak především aspekt zpracování přijaté informace nervovým systémem. Komplexita mozku tak určuje míru komplexnosti, s jakou je svět poznáván. Recipročně, dostupné informace z okolního světa jsou reprezentovány nervovým systémem ve formě funkčních otisků analyzovaných počítků.

Topology as a mathematical discipline is – and so are wider projections thereof into other fields – an effective concept for studying relationships and features of how the world around us manifests itself. It focuses on identification and prioritization of key perspectives in resolving issues that are being raised rather than dealing with characteristics that are less significant for the given situation. There are multiple processes identifiable in the central nervous system activity in whose core there are recognizable elements of topological approach, such as the ability to hierarchize incoming information according to its relevance, to abstract significant relationships from the entirety, to map space, or to create and activate mental schemes. Naturally, given that topology as a concept is a human mental product, human brain logically operates with an adequate neurobiological mechanism to build it. Nonetheless, a large number of experimental observations suggest that topological principles of transformation of stimuli entering the central nervous system are not exclusively a construct of human abstract thinking but are present at much more elementary levels of the neural information processing cascade, the scope of which varies across animal species. In this chapter I will try to define some of these processes from the neurobiological perspective.

The relevance of relationships or forces impacting an organism from the external environment is very diverse. It is generally determined by the biological significance that derives from aspects of survival of an individual and species. In primitive organisms, relevant relationships are by nature primarily ego-centric, i.e., they directly relate to the environment-to-subject axis. In species with more complex patterns of behavior, though, what gains significance, in addition to the object-subject relationship, is mapping of relationships among individual objects of the outside world. Accordingly, what emerges is an ‘object × object – subject’ type of an axis. To behavioral patterns illustrated by elementary roles of a hunter, a potential sexual partner or a fleeing prey, the subject adds a role of an observer who discovers the world at more varied levels. Obvious examples of why such mapping of mutual relationships among subjects of the outside world is necessary include social behavior of individuals or mapping of spatial relationships. Total sum of information available to a given individual naturally defines the world exposed to his or her cognition. The increasing amount of information and of levels at which the world is being recognized are dependent on the level of cognitive mechanisms, primarily the aspect of incoming information processing by the nervous system. Thus, the brain complexity determines to what degree of complexity the world can be discovered. Reciprocally, information received from the surrounding world is represented by the nervous system in the form of functional imprints of analyzed perceptions.

Hierarchizace informací

Jednou ze základních rovin pohledu na okolní svět a tím i zpracování informace mozkiem je schopnost hierarchizovat informace primárně dle jejich biologické relevance. To přináší obratem i redukci těch dat, která do systému vstupují, ale biologicky významné nejsou. Tato strategie vyžaduje selekci a prioritní zpracování a uložení relevantních informací z celku, jehož kompletní obsah není většinou nezbytné pokrývat v celé jeho bohatosti. Takovýto přístup je v biologické rovině výhodný, neboť redukce komplexnosti okolního světa na biologicky významné vztahy je vysoce adaptivní. Kromě kapacitní a energetické úspornosti umožňuje rychlou orientaci v dané situaci a následnou efektivní behaviorální odpověď. Tuto úhelnou neuroinformační strategii lze zároveň považovat za jakési předpolí pohledu na mozek jako na topologicky fungující procesor. Schopnost identifikace relevantního vztahu mezi jedincem a okolím je inherentní již u živočichů s primitivními formami centrálního nervového systému a je typicky zprostředkována efektem stresové reakce, která je zpravidla spuštěna důsledkem biologicky významných signálů. Ilustrací mohou být jednoduché formy paměti jako habituace či senzitivace, charakterizované změnou chování na základě identifikace hodnoty biologické irelevance či relevance u přijímaného podnětu. S rostoucí komplexností neurálních procesů u pokročilejších forem vývoje mozku je tento aspekt stále podstatnější, neboť potřeba hierarchizace informací s jejich množstvím pochopitelně roste. Za obzorem konkrétních počitků pak lze nalézt i perspektivu schopností vnímané vztahy abstrahovat nad rámec konkrétností. Abstrakce tak umožňuje vytvoření obecnějšího mentálního modelu či rámce, jež je snáze přenositelný mezi analogickými situacemi u stejného subjektu, či sdělitelný mezi subjekty navzájem. Přípravenost subjektu provádět toto spektrum procesů od elementárních po složité je predeterminovaná transgeneračně geneticky či epigeneticky nebo je formována přímou zkušeností a souvisí pak s mechanismy nervové plasticity ať vývojového či paměťového charakteru.

Hierarchizing the Information

One of the basic concepts of cognition, and thereby also of information processing performed by the brain, is the ability to hierarchize information primarily by its biological relevance. This in turn reduces the amount of data that enters the system but is not biologically significant. This strategy requires selection, prioritized processing and storing of relevant information received from the entirety whose complete contents usually does not need to be covered in all its opulence. Such an approach at the biological level is advantageous since the reduction of external world's complexity down to biologically significant relationships is highly adaptive. Apart from savings in capacity and energy, it enables fast orientation in any given situation and subsequent effective behavioral response. This fundamental neuro-information concept can at the same time bring us closer to viewing the brain as a topologically functioning processor. The ability to identify relevant relationship between an individual and the environment is inherent even in animals with very primitive forms of central nervous system and, typically, is mediated by the stress response effect that is usually triggered off as a consequence of biologically significant signals. To illustrate this, we may refer to simple forms of memory such as habituation or sensitization marked by changes in behavior based on identifying the value of biological relevancy or irrelevancy of the received impulse. With growing complexity of neural processes in more advanced forms of brain development, this aspect is increasingly important since the need to hierarchize information logically increases with the growing amount thereof. Beyond the horizon of specific sensations, it is possible to identify prospective ability to abstract the perceived relationship beyond specific frameworks. Thus, abstraction makes it possible to create a more general mental model or framework that is more easily transferrable among analogical situations, as far as an individual is concerned, or mutually communicable among multiple subjects. Readiness of a subject to perform this range of processes from elementary to complex ones is predetermined on a transgenerational basis, genetically or epigenetically or is formed by direct experience, in which case it relates to mechanisms of neural plasticity, whether developmental or memory-related.

Neurální reprezentace okolního světa

Senzorická část mozku svojí činností tedy reprezentuje vnímané vlastnosti zevního světa a skrze ně jej rekonstruuje. Vzhledem k variabilitě dějů a jejich vzájemné zpřaženosti je takto rekonstruovaný obraz světa u každého jedince nezbytně unikátní. Biologická významnost a s ní související vztahová redukce je pak úhelným prvkem, jenž mozaiku těchto rozdílných konstruktů napříč jedinci sjednocuje.

Neurální reprezentace zpravidla chápeme jako funkční koreláty nervové aktivity v odpovědi na informační vstupy přicházející do mozku či ve vztahu s produkty jeho činnosti. Tento velmi široký rámec tedy zahrnuje veškerou tělesnou interní signalizaci reflektující děje probíhající ve vnitřním prostředí organismu (chemosenzory, baroreceptory, propriocepce atd.) i ty vnímané z jeho okolí prostřednictvím smyslů. Zahrnuje též paměťové procesy, kdy vzpomínky jsou reprezentací prožitých událostí. Dále, mimo náš dosavadní úhel pohledu, zahrnuje i výstupní, nejčastěji motorické příkazy. Nejméně prozkoumanou kapitolou jsou produkty mentálních operací abstraktního typu jako symbolické funkce či pojmové kategorie typu *qualíí*. Vzhledem k nastíněné šíři je tedy vhodnější na neurální reprezentace spíše nežli jako na konkrétní jev nahlížet jako na pojmový koncept¹. I jen v zúženém rámci neurobiologie je s tímto termínem v literatuře spojováno více fenoménů – jednotková aktivita skupiny či skupin neuronů, vzorce synaptických změn mezi neurony, či vzorce exprese genů s neuronální aktivitou spojených. Zásadní je korelující vztah mezi sledovaným zevním dějem a jeho mozkovou reflexí, tedy reprezentací.

Kořeny myšlenky neurálních reprezentací lze historicky vystopovat již v období před vznikem neurální doktríny². V případě senzorického systému, kterému je tato kapitola především věnovaná, je informace přicházející ve formě prvotního signálu z čidel, zpracovávána kaskádovitým průběhem napříč zřetěženými oblastmi neurálního analyzátoru. Během tohoto procesu v každé z těchto oblastí – synapse za synapsí – nabývá stále komplexnější podoby, jež ve výsledku zprostředkuje subjektivní obraz okolního světa. Teoreticky je možno tvrdit, že různé formy neurálních reprezentací lze nalézat ve všech těchto úrovních zpracování smyslové informace. Od prvotních spíše topografických

1 — R. Christopher deCharms a Anthony Zador, *Neural Representation and the Cortical Code*, *Annual Review of Neuroscience* 23, č. 1 (březen 2000): 613–47, <https://doi.org/10.1146/annurev.neuro.23.1.613>.

2 — Eric Thomson a Gualtiero Piccinini, *Neural Representations Observed*, *Minds and Machines* 28, č. 1 (březen 2018): 191–235, <https://doi.org/10.1007/s11023-018-9459-4>.

Neural Representation of External World

It is well established that brain sensory areas represent the perceived features of the outside world and in a cascade-like way it constructs its more complex representations. We might consider it as a ‘re-construction’ of subject’s world picture. Considering the diversity of actions and their interconnection, the image of the world so reconstructed is inevitably unique for each individual. Biological significance and relating relationship reduction then represents a key element that unifies the mosaic of such different constructs across individuals.

We generally comprehend neural representations as functional correlates of neural activity in response to information inputs coming to the brain or relating to outcomes of brain activity. Thus, this extra-wide framework comprises all corporal internal signaling, reflecting the ongoing processes in the organism’s internal environment (chemosensors, baroreceptors, proprioception, etc.) as well as those perceived from the environment through senses. It also comprises memory processes in which memories constitute representations of past experience. Furthermore, beyond the hitherto covered perspective, it comprises output commands, mostly motoric ones. The least examined chapter concerns products of abstract-type mental operations such as symbolic functions or concept categories of the qualia type. Therefore, regarding the outlined scope, it is more appropriate to view neural representations as a notional concept rather than a specific phenomenon.¹ Even in the narrowed-down framework of neurobiology, relevant publications use this term to refer to multiple phenomena – unit activity of a neuron group or neuron groups, patterns of synaptic changes between neurons, or expression patterns in genes associated with neural activity. The key is the correlating relationship between the observed external action and its brain reflection, i.e. representation.

Historically, roots of the neural representation concept can be traced back to the period before the genesis of the neural doctrine.² As concerns the sensory system – the topic which this chapter deals with in the first place – the information coming in in the form of a primary signal from sensors is processed in a cascade manner across the chain of interconnected brain areas. In the course of this process, in each of the areas – synapsis after synapsis – it becomes more and more complex and in its final form provides a subjective image of the outside world. In theory we may argue that various forms of neural representations can be identified at all levels of sensory information processing, from primary, largely topographic relationships between the sensory organ and the primary projection area in the brain, through to the ‘final’

1 — R. Christopher deCharms a Anthony Zador, Neural Representation and the Cortical Code, Annual Review of Neuroscience 23, No. 1 (March 2000): 613–47, <https://doi.org/10.1146/annurev.neuro.23.1.613>.

2 — Eric Thomson a Gualtiero Piccinini, Neural Representations Observed, Minds and Machines 28, No. 1 (March 2018): 191–235, <https://doi.org/10.1007/s11023-018-9459-4>.

vztahů mezi senzoricým orgánem a primární mozkovou projekční oblastí, až po „finální“ kategorizovaný produkt celé mašinerie provázaný i s jinými kvalitami. Teprve tato úroveň, dle současného pohledu, vstupuje u člověka do vědomí a je tedy subjektivně pocíťována. Každá z nich pak reflektuje daný krok celého procesu. To implikuje vysokou míru jejich hierarchizovanosti, spojenou s narůstající komplexitou obsažené neurální informace. Identifikovat či navrhnout systém, který by zobecnil a algoritmoval celý proces napříč různými smyslovými modalitami je, vzhledem k různorodosti celku, patrně nemožné. Nicméně lze se alespoň pokusit o abstrahování konstrukčního procesu reprezentací do několika klíčových úrovní, které vystihují rostoucí komplexitu kódované informace³.

3 — Edvard Moser et al., Grid cells and cortical representation, *Nature reviews. Neuroscience* 15 (11. červen 2014), <https://doi.org/10.1038/nrn3766>.

Neurální reprezentace mají dle současného diskurzu podobu funkčně a anatomicky propojených ansámbľů neuronů v příslušných neuronových sítích, ty komplexní pak podobu globálních populací, tvořících soustavy více sítí napříč rozsáhlými mozkovými oblastmi. Některé reprezentace jsou spíše preformované, nesené geneticky, bez nutné vazby na související prožitek. Zprostředkují například základní kroky zpracování senzoricke informace, jiné jsou naopak produkty učení a vznikají na základě předchozí zkušenosti. Značná část leží mezi těmito dvěma extrémy a souvisí s vývojem mozku, který optimálně proběhne pouze v součinnosti s vnější stimulací, navíc často nutně spadající do definovaného časového okna během vývoje organismu. Flexibilně či instantně formované reprezentace, např. paměťové stopy, jsou ukládány ve formě posílených spojení mezi jednotlivými neurony dané neurální sítě.

Nad rámcem této kategorizace známých i předpokládaných neurálních reprezentací senzorickech informací bychom měli navíc uvažovat abstraktní mentální produkty, jejichž formování sice na smyslových podnětech zpočátku zpravidla závisí, ale po jejich vytvoření se mohou chovat zcela nezávisle. Produkty mozkové činnosti typu pojmových či nepojmových konceptů, mentálních imaginací, jsou kognitivně-psychologickými přístupy uchopovány skrze ideu „mentálních reprezentací“. Těmi psychologie rozumí soustavu myšlenkových symbolů reprezentujících uvedené kvality: například ze všech červených objektů lze abstrahovat kategorii červenosti, která nadále nebude vázána na kterýkoli z vnímaných či pamatovaných červených objektů, a tvoří tak samostatnou kvalitu, mentální reprezentaci. Podobně lze uvažovat o kvalitách jako pevnost, tekutost, židlovitost, lidskost, či vjem vlastní identity, tedy jáství. A byť se zde zcela zřejmě dostáváme do kruhových vztahů (mentální reprezentace je mentálním konstruktem psychologie pro popis mentálních stavů subjektů psychologického zkoumání; záměrně slova opakují), kde přestává být vymezen vztah mezi objektem a subjektem zkoumání, tak lze stále předpokládat, že i tyto abstraktní kvality budou mít korelát ve formě neurálních reprezentací v neurobiologickém smyslu, založených na vzorcích neurální aktivity v neokortikálních mozkových oblastech.

categorized product of the entire machinery, linked to other qualities, too. In current perspective, the latter is the level that finally enters the human consciousness and, as such, is subjectively perceived. Each level then reflects the given step of the entire process. This implies a high degree of hierarchization, associated with the growing complexity of the embraced neural information. Regarding the diversity of the entirety, it is probably impossible to identify or design a system that would generalize and algorithmize the whole process across various sensory modalities. Nevertheless, we may at least attempt to abstract the representation construction process into several key levels that do justice to the growing complexity of coded information.³

3 — Edvard Moser et al., Grid cells and cortical representation, *Nature reviews. Neuroscience* 15 (11. June 2014), <https://doi.org/10.1038/nrn376>.

Neural representations, according to the current discourse, take the form of functionally and anatomically interconnected neuron ensembles in relevant neuronal networks; the complex ones, then, take the form of global populations constituting sets of multiple networks across extensive brain areas. Some representations are more of the pre-formed types, carried over genetically without necessarily having a link to any encounter with the environment. They for instance mediate the basic steps in sensory information processing, whereas others are products of learning and constitute on the basis of previous experience. A great many of them find themselves between these two extremes and have to do with brain development that can only proceed in an optimum way in correlation with external stimulation, which, moreover, needs to appear within a defined time window in the course of organism development. Representations formed flexibly or instantly, such as memory traces, are stored in the form of strengthened connections among individual neurons of the given neuron network.

Beyond this categorization of known as well as assumed neural representations of sensory information, we should also consider abstract mental products whose formation initially indeed depends on sensory stimuli but once they have been created they may behave in an entirely independent way. Products of brain activity of the conceptual and non-conceptual types, mental imaginations, are – by way of cognitive-psychological approaches – grasped through the concept of mental representations. In psychology, it means a set of mental symbols representing the abovementioned qualities: it is possible, for instance, to abstract the category of redness from all red objects whilst that category will no longer be bound to any perceived or remembered red objects, and thereby constitutes a separate quale, mental representation. We can similarly contemplate such qualities as firmness, liquidness, chairness, humaneness, or perception of one's identity, i.e. the self. Even though we quite obviously enter circular relationships here (mental representation is a mental concept of psychology used to describe mental concepts of subjects of psychological investigation; repetition of words intended) whereby the relationship between the subject and the object of observation ceases to be determined, we can nonetheless assume that even these abstract qualities will have a correlate in the form of neural representations in the

Jak pro primární smyslové reprezentace, tak i pro ty s vysokou mírou komplexnosti či abstrakce tedy platí, že jsou založeny na aktivitě velmi podobných buněčných elementů, a propastný rozdíl mezi nimi je dán mírou zpracovanosti nesené informace. Komplexita mozku vychází z jeho modulární struktury – jde o soustavu neuronových sítí, které jsou vzájemně propojené ve funkčních liniích a sítích vyšších řádů (sítě sítí). Základní element – neuron – má napříč živočišnými druhy i mezi sítěmi jednoho mozku velmi omezenou typologii o uniformních vlastnostech. Přesto, výsledky celé neurální mašinerie se v různých typech architektur spojení mohou zásadně lišit.

Formování reprezentací v neurálních sítích mozku

Jednou ze základních topologických operací je tedy povýšení relevantních vztahů nad úroveň nedůležitých konkrétností. Klasický problém sedmi mostů Královce a jeho Eulerova pojetí je příkladem abstrahování vztahové situace nad rámec geografických reálií. Abstrakce či tvorba pojmových kategorií je kognitivní proces, jehož mechanismy nejsou experimentálně solidně prozkoumány. Přesto, máme relativně jednoduchý model, kterým mozek či neuronová síť s vhodnou architekturou dokáže abstraktní kategorie tvořit pouze za využití elementárních zákonů synaptické plasticity. V dalším oddílu proto zmíním základní principy tvorby paměťových stop, především prostřednictvím Hebbovské synaptické plasticity, které budou dále rozvedeny v kombinaci s autoasociativní architekturou neurálních sítí.

Představa podoby paměťové stopy se během historie neurověd spojené s neurální doktrínou, kterou inicioval Ramón Y. Cajal na sklonku 19. století, vyvíjela dle dobových schémat, široce rozkročených mezi extrémě reprezentované teorii tzv. neuronu štedrovečerní večeře a teorií plně distribuované paměťové stopy (Carl Lashley). Zásadní koncepční průlom připravil v polovině 20. století svými úvahami Donald O. Hebb⁴. Postuloval princip funkčního posílení mezi neurony založeného na jejich současné aktivitě. Konkrétně, jestliže postsynaptický neuron je opakovaně excitován v důsledku aktivity přicházející na danou synapsi, je efektivita přenosu signálu touto synapsí posílena. Podoba ani mechanismus zmíněného posílení, dnes nazývaného Hebbovým zákonem, nebyly předmětem této teoretické úvahy. Princip reflektuje skutečnost, že vznik vzruchu na postsynaptické buňce je obecně málo pravděpodobný, a predikuje, že tato pravděpodobnost se může na základě aktivity plasticky měnit, čímž efektivita přenosu roste či klesá. „Synaptická zkušenost“ opakované excitace se tedy může strukturálně uložit a při příštím setkání s identickým stimulem je postsynaptický neuron excitován i při

4 — D. O. Hebb, *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory* (New York: Psychology Press, 1949), <https://doi.org/10.4324/9781410612403>.

neurobiological sense, based on patterns of neural activity in neo-cortical brain areas. What applies to both the primary sensory representations and to those with a high degree of complexity or abstraction is that they are based on activity of very similar cellular elements whilst the huge difference between them is determined by the extent to which the carried information is processed. Brain complexity is a result of its modular structure – it is a set of neural networks that are mutually interconnected in functional lines and networks of higher order (network of networks). Across animal species as well as between networks of a single brain, the basic element – neuron – has a very limited topology with uniform features. In spite of that, though, outcomes of the entire neural engineering in various types of connection architectures may differ substantially.

Forming of Representations in Brain Neural Networks

Thus, one of the elementary topological operations is prioritizing the relevant relationships above the level of insignificant specifics. The classical problem of Seven Bridges of Königsberg and Euler's way of resolving it serves as an example of abstracting a relationship type of a situation beyond geographic particulars. Abstraction or creation of concept categories is a cognitive process whose mechanisms have yet to be firmly investigated in experimental way. All the same, we still have a relatively simple model based on which the brain or a neural network of appropriate architecture can create abstract categories, using no more than elementary laws of synaptic plasticity. Accordingly, in the next part I will mention the basic principles of memory trace formation, primarily through Hebbian synaptic plasticity, and will further deal with them in relation to neural networks with auto-associative architecture.

Throughout the history of neuroscience that is associated with the neural doctrine originally proposed close to the end of the 19th century by Ramón Y. Cajal, the concept of memory trace was developing according to contemporary schemes, spanning extremes as distant as the theory of so-called Christmas dinner neuron and the theory of fully distributed memory trace (Carl Lashley). The groundwork for a crucial breakthrough was laid out in mid-20th century by the ideas of Donald O. Hebb.⁴ He posited the principle of functional reinforcement between neurons based on their concurrent activity. Specifically, if a post-synaptic neuron is repeatedly excited due to an activity arriving to the given synapsis, the synapsis boosts the effectiveness of signal transmission. This theoretical consideration, today known as the Hebb's rule, was originally not concerned with form or mechanism of such reinforcement. The principle reflects the fact that emergence of excitation on a post-synaptic cell is generally not very likely and predicts that its probability may plastically change depending on

4 — D. O. Hebb, *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory* (New York: Psychology Press, 1949), <https://doi.org/10.4324/9781410612403>.

nižší úrovni presynaptické aktivity. Podoba předpovídaného synaptického posílení byla objevena až Terje Lømem⁵, nicméně související molekulární mechanismy jsou předmětem stálého výzkumu. V Hebbových dalších úvahách, rozvíjejících neurální principy učení, pak vlastní paměťová stopa měla podobu subpopulace anatomicky propojených neuronů, jejichž vzájemné vazby jsou předpovídaným principem synaptické potenciace funkčně posílené. Tento pohled přetrvává dodnes a je základem uvažování i o podobě mozkových reprezentací vyšších řádů, tedy mnohem obecnějšího fenoménu, u něhož paměť představuje jednu z jeho podob. Paměťové stopy či reprezentace jsou tvořeny systémem posílených synapsí mezi skupinou neuronů, excitovaných na základě prvotního setkání s daným vjemem. Jejich paralelní aktivita vede v souladu s Hebbovým zákonem k posílení vzájemných synaptických spojení. V této podobě – soustavě posílených synapsí – je daný vjem „otisknut, zapsán, uložen“ v neurální síti a nazýváme jej (v soudobém konsenzu) paměťovou stopou.

Dnešní pojetí fenoménu paměťové stopy je poněkud odlišné od idejí určujících mechanistický narativ paměti druhé poloviny dvacátého století. Především u komplexních typů paměti, jakými jsou například sémantická a především pak epizodická paměť, předpokládáme výraznou multimodalitu jejich informačního obsahu, a tedy nelze hovořit o skupině posílených synapsí v jedné neuronové síti. Spíše uvažujeme o systému navzájem propojených dílčích reprezentací rozprostřených napříč neurálními sítěmi, jež pokrývají různé informační modalidy, které danou vzpomínku tvoří. Propojení mezi jednotlivými komponentami komplexní paměťové stopy není patrně reciproční, tak jako v uvažovaném neurálním ansámbly uvnitř více či méně homogenní kolaterální neuronové sítě, ale spíše jednosměrné. Takováto organizace, v níž podstatnou roli může navíc hrát hierarchičnost jednotlivých komponent, pak může vést k pestré škále poruch vybavení vzpomínek, kdy některé komponenty komplexní paměti aktivovány jsou, zatímco jiné nikoli. Tato fragmentace ve vybavování může být ilustrována na složených sémantických vzpomínkách kombinujících pamatovaná fakta, tváře a související jména, kdy v případě obtíží ve vybavování si jednotlivých komponent narážíme častěji na problém vybavení jména než rozpo-
menutí se na podobu či fakta, která se s danou osobou pojí.

5 — Terje Lomo, Frequency potentiation of excitatory synaptic activity in the dentate area of the hippocampal formation., *Acta physiologica scandinavica*, suppl. 277, 1966, č. 68 (1966): 128; T. V. Bliss a T. Lomo, Long-Lasting Potentiation of Synaptic Transmission in the Dentate Area of the Anaesthetized Rabbit Following Stimulation of the Perforant Path, *The Journal of Physiology* 232, č. 2 (červenec 1973): 331–56, <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1973.sp010273>.

a particular activity due to which the transfer effectiveness increases or decreases. Thus, 'synaptic experience' of repeated excitation may be structurally stored, and upon the next encounter with an identical stimulus, the post-synaptic neuron can be excited even if the level of pre-synaptic activity is lower. The form of the predicted synaptic bolster had not been known until it was discovered by Terje Lømo⁵ whilst related molecular mechanisms continue to be under investigation. In Hebb's subsequent considerations that helped develop the neural principles of learning, the actual memory trace had the form of a subpopulation of anatomically interconnected neurons whose mutual links are functionally strengthened by the predicted principle of synaptic potentiation. This concept has prevailed until today and constitutes the basis for considerations concerning the form of even higher-order brain representations, i.e. a phenomenon a lot more general where memory represents just one of its forms. Memory traces or representations are constituted by a system of reinforced synapses among a group of neurons excited upon the primary encounter with the given sensation. In compliance with the Hebb's rule, their simultaneous activity leads to strengthening of mutual synaptic connections. In this form of a reinforced synapses system, the given sensation is 'imprinted, recorded, stored' in the neural network and is called (according to current consensus) a memory trace.

Today's concept of the memory trace phenomenon somewhat differs from the concept that determines the memory mechanistic narrative as known from the second half of the twentieth century. Particularly in the case of complex memory types such as semantic memory, and, most notably, episodic memory, we presume a significant multimodality of their information content, for which reason we cannot speak of a group of reinforced synapses within one neuron network. Instead, we think of the system as one consisting of mutually connected partial representations stretched across neural networks covering various information modalities that constitute the given memory. Presumably, the connection between individual components of the complex memory trace is not reciprocal – as it is in the aforementioned ensemble within a more or less homogenous collateral neuronal network – but rather unidirectional. Such organization in which, moreover, a major role may be played by a hierarchic nature of components can then result in a diverse range of memory recollection disorders whereby some components of complex memory are activated whereas others are not. This recollection fragmentation can be illustrated by compound, semantic recollections combining remembered facts, faces and related names, where – if a difficulty arises that affects recollection of their individual components – we encounter problems with name recollection more often than problems with recollection of the looks of the person or associated facts.

5 — Terje Lomo, Frequency potentiation of excitatory synaptic activity in the dentate area of the hippocampal formation., *Acta physiologica scandinavica*, suppl. 277, 1966, No. 68 (1966): 128; T. V. Bliss and T. Lomo, Long-Lasting Potentiation of Synaptic Transmission in the Dentate Area of the Anaesthetized Rabbit Following Stimulation of the Perforant Path, *The Journal of Physiology* 232, No. 2 (June 1973): 331–56, <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1973.sp010273>.

Topologický charakter autoasociativních neurálních sítí

Charakter zpracování informace je napříč různými částmi mozku diametrálně odlišný. Vzhledem k jeho principiálně stejné základní funkční jednotce – neuronu, který na buňkách, na něž synapticky projikuje, může vykazovat pouze excitační či inhibiční efekt, je rozmanitost informačních algoritmů nesena do značné míry architekturou vzájemných neuronálních zapojení. Logicky tedy ve stavbě mozku nalézáme různé typy prosífování mezi neurony, nesoucí charakter příslušných procesů. Síťování lze nalézt na různých úrovních – ať již nastíněné neuronální, tak na úrovni globální, kde jde o vzájemné propojení mezi jednotlivými sítěmi – tedy o sítě sítí.

Autoasociativní (rekurentní) neuronální sítě jsou charakterizovány systémem vzájemných synaptických propojení mezi jejich jednotlivými neurony. Konkrétně se jedná o rekurentní kolaterály, které odstupují z axonů pyramidových buněk a synapticky se pojí na jejich dendrity. Výstupní signál, zpracovaný neurony sítě, tedy směřuje nejen do další mozkové oblasti kmenem axonu, ale též vstupuje „zpět“ do těchto buněk skrze jejich dendritický systém **OBR. 1**.

Míra a charakter zpětnovazebnosti jsou různé v rozdílných částech mozku, kde rekurentní sítě nalézáme – tedy především v hipokampálním poli CA3 a v neokortexu. Předně, tyto dva systémy se liší v prostorové organizaci kolaterál, jež výrazně ovlivňuje jejich chování a úložnou kapacitu. Neokortex operuje s kolaterálami spíše malého dosahu – jde o rozsáhlý systém modulárního charakteru složený ze značného množství do jisté míry nezávislých jednotek s relativně vysokou mírou propojenosti, která dramaticky klesá se vzdáleností. Jinými slovy, čím dále jsme od sledované buňky, tím menší množství neuronů je s ní spojených a jde tedy o lokální zpětnovazebnost v rozsahu přibližně 1 mm². To umožňuje vykonávat současně velké množství paralelních operací, kdy každá může probíhat v (do značné míry) nezávislém modulu a od tohoto konstrukčního schématu se odvíjí multimodálnost kortikální aktivity. Naproti tomu CA3 hipokampu, anatomicky též velmi rozsáhlá, má konektomicky spíše globální charakter – denzita propojení s rostoucí vzdáleností příliš neklesá, tedy komunikují spolu i buňky od sebe značně vzdálené a struktura se v důsledku chová jako jeden celek. Dokonce to platí i pro bilaterální úhel pohledu vzhledem k silným vazbám mezi CA3 v obou hemisférách mozku. Zatímco v neokortexu je faktor propojenosti (či „naředitelnosti“ vzájemných spojení) ve zmiňovaném 1 mm² povrchu kůry zhruba 0,1 (tedy daná buňka je propojena s každou desátou další), v hipokampální CA3 je faktor asi 0,04, tedy čtyři ze sta⁶.

6 — Valentino Braitenberg a Almut Schutz, *Anatomy of the Cortex: Statistics and Geometry*. (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg, 2013), <https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=5595288>; M. Abeles, *Corticonics: Neural Circuits of the Cerebral Cortex*, 1. vyd. (Cambridge University Press, 1991), <https://doi.org/10.1017/CBO9780511574566>.

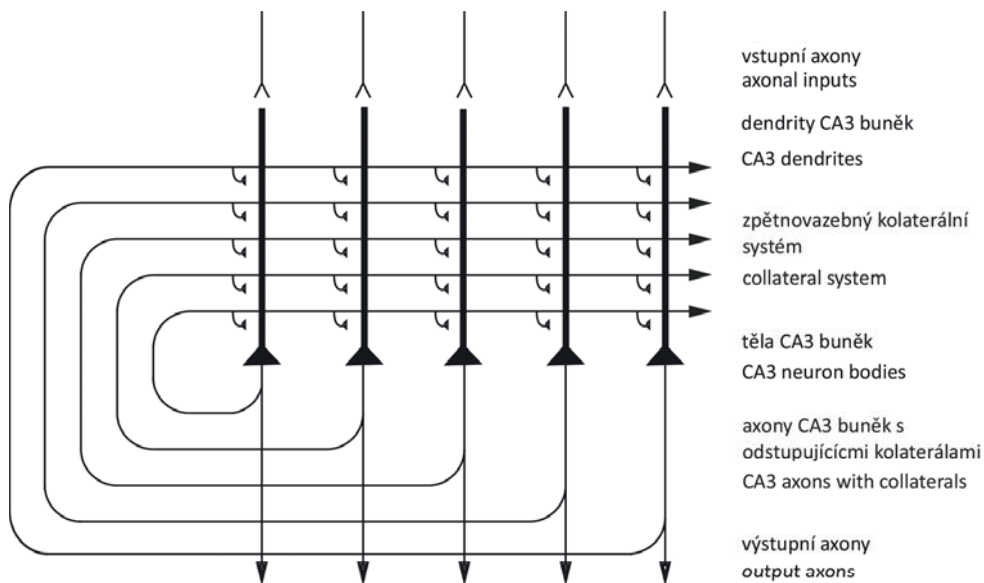
Topologic Nature of Auto-associative Neural Networks

The nature of information processing substantially differs across various brain areas. Given the fact that its basic functional units – neurons – are rather uniform in their output as it manifests only as an excitation effect or an inhibition effect on cells to which they synaptically project, the rich variety of information algorithms is determined to a significant extent by the architecture of mutual neural wirings. Logically, then, we find diverse types of networks among neurons in the brain and these types reflect the nature of corresponding processes. Networking can occur at various levels, be it the aforementioned neuron level or a global level where individual networks are mutually connected, thus forming networks of networks.

Auto-associative (recurrent) neural networks are characterized by a system of mutual synaptic interconnections among individual network members – specifically, recurrent collaterals that retreat from pyramidal cell axons and synaptically connect to their dendrites. Therefore, the output signal processed by network neurons is directed through the axon stem not only to another brain area, but it also targets ‘back’ into these cells through their dendritic system **FIG. 1**.

The extent and nature of feedback architecture are different in different brain parts containing recurrent networks – primarily in the hippocampal CA3 field and in neocortex. First of all, the two systems differ in spatial organization of collaterals which has a distinctive effect upon their processing and storage capacity. Neocortex mostly operates with short range collaterals – it is an extensive modular system consisting of a large number of units that are to some extent independent and have a large degree of interconnection that dramatically decreases with distance. In other words, the farther we are from the observed cell, the lesser number of neurons is connected to it; thus, we are talking about a local feedback feature within the range of approximately 1 mm². Thanks to this, it is possible to perform simultaneously a large number of parallel operations each of which can proceed in a module that is (to a large degree) independent, and it is exactly this construction concept from which the multimodality of cortical activity unwinds. On the other hand, the hippocampal CA3 region, also anatomically extensive, is connectomically rather global in its character – the interconnection density does not decrease too much with a growing distance – which means that even distant neurons communicate with one another and, consequently, the structure is closer to act as one whole unit. It even applies to a bilateral perspective due to strong bonds between CA3 in both hemispheres. In neocortex, the interconnection factor (‘dilutedness’ of mutual connections) in the aforementioned 1 mm² of the cortex surface is approximately 0.1 (i.e. a given cell is connected with one of ten others) whereas in the hippocampus CA3 the factor is about 0.04, i.e. four out of a hundred.⁶

6 — Valentino Braitenberg and Almut Schutz, *Anatomy of the Cortex: Statistics and Geometry*. (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin/Heidelberg, 2013), <https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=5595288>; M. Abeles, *Corticonics: Neural Circuits of the Cerebral Cortex*, 1. issue (Cambridge University Press, 1991), <https://doi.org/10.1017/CBO9780511574566>.



OBR. 1 Schéma zapojení kolaterální neuronové sítě. Z axonů buněk se oddělují kolaterály, které výstupní informaci neuronu vedou zpět na jeho vstupní výběžky.

FIG. 1 Collateral neuronal network wiring. Collaterals separate from cell axons and direct the neuronal output information back to its dendrites.

The recurrent type of wiring has an essential impact upon the dynamics of the collateral network activity. The effect of reverberating activity between inputs and outputs of the cells involved is reflected in natural prolongation of activity in a group of cells that was activated by the incoming information. In this way, a specific activity pattern may persist even after the input stimulation has faded away. This feature constitutes the basis of the physiological concept of ultra-short-term memory in whose mechanism we recognize this type of reverberation combined with synaptic plasticity⁷ (or, from a minimalist perspective, even without it). Another consequence of reverberation by collaterals is reprocessing of the actual signal. With respect to the limited interconnection (4% in the hippocampus CA3), each iteration potentially causes evolution of the momentarily active cell pattern. Due to the nature of the wiring, the signal may propagate even to those neuron dendrites that were not activated by the primary external information input which excited the primary cell group. In this way, the population pattern of the activity may shift and stabilize regarding the already established connections and the strength of neural network synaptic bonds. Thus, at this level of considerations we encounter the interface between the specificity of the incoming information and specificity of neuron connection patterns already stored which we regard as physiological substrate of memory trace. Dynamics of the interface neural activity is absolutely crucial for memory trace recollection and, consequently, for functionality of the entire memory system.

7 — Henry Markram et al., Regulation of Synaptic Efficacy by Coincidence of Postsynaptic APs and EPSPs, *Science* 275, No. 5297 (10. January 1997): 213–15, <https://doi.org/10.1126/science.275.5297.213>.

As described above, formation of new memory traces in the brain's recurrent neuronal networks consist in mutual synaptic bonding of the cell sub-group activated by the incoming information. Synaptic changes consist in modification of existing links (strengthening, weakening) or creation of new ones. Short-term synaptic changes are then consolidated into a long-term form, probably contributed to by repeated reactivation of the given neuron group in the course of sleep or immobility. The stored content therefore corresponds (at least when considering models) with the information perceived upon the first encounter with the given object, situation, person etc.

The question is how to implicate the form and creation of more abstract information not representing discreet stimuli but e.g. cross-points of their meanings? Topological mapping implies information abstraction from particular situation(s) and grasping thereof through creation of a scheme. In such a simple system – at the level of a single neural network – how can we understand the abstracting principle? Can we, in terms of a model, think of a representation that behaves as a category, i.e. does not correspond with any stimulus coded so far, due to the fact that it stands above their specific representations and relates to more general qualities? How can

Rekurentní typ zapojení má zásadní vliv na dynamiku aktivity v kolaterální síti. Efekt reverberující aktivity mezi výstupy a vstupy zúčastněných buněk se odráží v přirozeném prodloužení trvání vzruchové aktivity ve skupině buněk, která byla vstupní informací aktivována. Tímto způsobem v síti může přetrvávat specifický vzorec aktivity i po odeznění vstupní stimulace. Tato vlastnost vstupuje i do mechanismů ultrakrátkodobé paměti, u níž uvažujeme právě reverberaci tohoto typu v kombinaci se synaptickou plasticitou ⁷ či v minimalistickém pojetí i bez ní. Dalším důsledkem, jenž reverberace kolaterálami přináší, je opakované zpracovávání (reprocessing) vlastního signálu. Vzhledem k omezené propojenosti (4 % v hipokampální CA3) s každou iterací potenciálně dochází k evoluci v danou chvíli aktivního vzorce buněk. Signál z povahy zapojení může propagovat i na dendrity neuronů, které nebyly aktivovány prvotním externím informačním vstupem, jenž excitoval primární skupinu buněk. Tímto způsobem se populační vzorec aktivity může posunout a stabilizovat s ohledem na již preformovaná spojení a sílu synaptických vazeb v neurální síti. V této rovině uvažování narážíme tedy na rozhraní mezi specificitou příchozí informace a specifíčností již uložených vzorců neuronálních spojení, které považujeme za fyziologický substrát paměťových stop. Dynamika neurální aktivity tohoto rozhraní je zcela klíčová pro výbavnost paměťových stop a tedy i pro funkčnost celého paměťového systému.

7 — Henry Markram et al., Regulation of Synaptic Efficacy by Coincidence of Postsynaptic APs and EPSPs, *Science* 275, č. 5297 (10. leden 1997): 213–15, <https://doi.org/10.1126/science.275.5297.213>.

Jak bylo popsáno výše, formování nových paměťových stop ve zpětnovazebných neuronových sítích mozku spočívá ve vzájemném synaptickém provázání podskupiny buněk aktivovaných příchozí informací. Synaptické změny spočívají v modifikaci stávajících vazeb (posílení, oslabení), ev. ve vytvoření vazeb nových. Krátkodobé synaptické změny jsou posléze konzolidovány do dlouhodobé formy, patrně s přispěním opakované reaktivace zmíněné skupiny neuronů během spánku či imobility. Uložený obsah tedy (alespoň modelově) odpovídá informaci vnímané při prvotním setkání s daným objektem (či situací, osobou etc.).

Jak ale implikovat podobu a tvorbu abstraktnějších informací, které reprezentují nikoli diskrétní stimuly, ale např. jejich významové průsečíky? Topologické mapování implikuje abstrakci informace z konkrétní situace či situací, její uchopení skrze tvorbu schématu. Jak v tomto jednoduchém systému – na úrovni jediné neurální sítě, uvažovat o principu abstrakce? Lze modelově uvažovat o reprezentaci, jež se chová jako kategorie – tedy neodpovídá žádnému dosud kódovanému stimulu, neboť stojí nad jejich konkrétními reprezentacemi a vztahuje se k obecnějším kvalitám? Jak může být v neurální síti reprezentována židlovitost židle, džbánovitost džbánu či mrakovitost mraků? Uvažujme soubor různých objektů stejného typu, např. květiny, o nichž příslušná neurální informace během jednotlivých setkání s nimi vstupuje do

e.g. ‘chairness’ of a chair, ‘juggness’ of a jug, or ‘cloudness’ of a cloud be represented in a neural network? Let’s conceive of a set of various objects of the same type, such as flowers, and corresponding sensory information that enters the auto-associative network during individual encounters with them. Representations of a rose, a carnation, a tulip etc. will gradually be encoded in the network. Each of them will be represented by a unique group of neurons whose mutual interconnections will be synaptically strengthened. Given the joint attributes of individual flowers determined e.g. by their basic anatomy, it is likely that their individual representations will not be entirely dissimilar and will share the same sub-group of neurons. Of its own, the sub-group does not code any of the specific flowers already known. Nonetheless, given the features shared across all flowers, it will be part of all codes representing individual flowers. The degree of synaptic interlinkage will be very high for this ‘representative core’ as it is activated every time the network encounters the flower. That increases the probability that the specific pattern will be activated upon border stimuli that can merely evoke the category due to certain similarity. Within the considered model, such activation then facilitates the moment when the observer will realize that the object he is looking at is a flower. In this way the subject of this chapter proceeds to the phase of recollecting the stored information. This mechanism is common to specific recollections and more general stimuli categories.

In order to recall something from memory, its respective neural representation must be reactivated. According to a formalized, ‘laboratory’ type of thinking, in order to activate the stored activity pattern, it would be necessary to encounter anew the identical memory subject and thereby bring the identical information into the model neuron network as upon the first recording of the related memory trace. One might argue, though, that in the real world it is the other way around: it is very unlikely that the incoming information will be identical. Firstly, individual dimensions of our relationships to the environment are constantly changing, and so is, consequently, the specific form of sensory inputs, whether due to a change in spatial relationships between the observer and the object or changes in physical parameters of the environment (luminosity, temperature etc.) that inevitably bring a changed sensory information. Secondly, the environment itself is undergoing constant evolution that changes the nature of its features and, therefore, every new encounter brings about stimulation whose character is somewhat changed. We also need to account for transformations of the observer’s internal environment that interfere, in a modulatory way, with the cascade of sensory sensation processing, and therefore shapes the information that arrives at memory module inputs. For instance, we can assume that the resulting perception will be slightly different depending on various states of emotion (joy or sadness), even though it may have originated from the identical activity pattern in the primary sensory cortex. The above account of fluctuations in the entire observer-environment system is hopefully sufficient to illustrate the volatile nature of neural information upon repeated encounters with the subject of previously formed recollection. Moreover, considering the human memory, recollection of e.g. a face or a specific experience does not even require physical encounter with the inscribed perception and can be initiated in completely internal ways. In that case, the information entering the neuron network where the recollection should be activated is presumably even more different.

autoasociativní síť. Takto v síti bude postupně zakódována reprezentace pro růži, karafiát, tulipán atd. Každá z nich bude reprezentována unikátní skupinou neuronů, jejichž vzájemná propojení budou vlivem stimulace synapticky posílena. Vzhledem ke společným atributům jednotlivých květin, daným např. jejich základní anatomii, je pravděpodobné, že jejich jednotlivé reprezentace nebudou zcela nepodobné, ale budou sdílet stejnou podskupinu neuronů. Sama o sobě tato podskupina nekóduje žádnou z do té doby již poznanych konkrétních květin. Nicméně bude, vzhledem k vlastnostem sdíleným napříč všemi květinami, součástí všech kódů reprezentujících jednotlivé květiny. Míra synaptické provázanosti bude u tohoto „reprezentačního jádra“ velmi vysoká, neboť se aktivuje kdykoli se s květinou uvažovaná síť setká. To zvyšuje u daného vzorce i pravděpodobnost, že bude aktivován při hraničních stimulech, jež danou kategorii mohou pro jistou podobnost být jen evokovat. Jeho aktivací pak v uvažovaném modelu je zprostředkován okamžik, kdy si pozorovatel uvědomí, že objekt, který si v dané chvíli prohlíží, je květinou. Tím se téma této kapitoly posouvá k fázi vybavení uložené reprezentace. Tento mechanismus je společný jak pro konkrétní vzpomínky, tak pro obecnější kategorie stimulů.

Pro vybavení vzpomínky musí být navozena opětovná aktivace kódu, který ji reprezentuje. Ve formalizovaném (či „laboratorním“) typu uvažování by pro aktivaci uloženého vzorce aktivity bylo nezbytné opětovné setkání s identickým předmětem vzpomínky, které přivádí do modelové neuronové sítě stejnou informaci, jako tomu bylo při prvotním zápisu související paměťové stopy. Lze ovšem namítat, že v reálném světě naopak přichází informace identická s velkou pravděpodobností nebude. Jednak se neustále mění jednotlivé dimenze našich vzájemných vztahů k okolnímu prostředí a tím i konkrétní podoba sensorických vstupů, ať již změnou v prostorových vztazích mezi pozorovatelem a objektem či změnou ve fyzikálních parametrech okolí (světelnost, teplota atd.), které zákonitě přinášejí změněnou smyslovou informaci. Dále samo okolní prostředí podléhá neustálé evoluci, která mění charakter jeho vlastností, a každé opětovné setkání tedy přináší do jisté míry změněný charakter stimulace. Nutno též uvažovat proměnu vnitřního prostředí pozorovatele, která modulačně zasahuje do kaskády zpracování smyslových vjemů, a tedy též ovlivňuje podobu informace, která doputuje na vstupy paměťového modulu. Například lze předpokládat, že poněkud jiný bude výsledný vjem za různých emočních stavů (radost či smutek), přestože bude původně vycházet z identického vzorce aktivity v primární sensorické kůře. Uvedený výčet fluktuací v celém systému pozorovatel – prostředí snad dostatečně ilustruje volatilní charakter neurální informace při opakovaném setkání s předmětem dříve zformované vzpomínky. Dokonce, pokud bychom uvažovali lidskou paměť, tak vybavení vzpomínky např. na podobu tváře či konkrétní prožitek ani nevyžaduje fyzické setkání se zapsaným vjemem, a lze ji iniciovat zcela interními cestami. V takovém případě je vstupní informace do neuronové sítě, v níž má být daná vzpomínka aktivována, patrně odlišná ještě ve větší míře.

Jak je tedy možné, že i při stimulaci, jež ne zcela odpovídá původně zapsané neurální informaci, paměťový systém je schopen rozeznat významnou podobnost mezi uloženým „originálem“ a aktuálním vjemem, a tedy vybavit příslušnou vzpomínku? Nebo

How is it possible, then, that even upon stimulation that not entirely corresponds with the initially recorded neural information, the memory system is able to discern significant similarity between the stored ‘original’ and the current perception, thereby recalling the relevant recollection? Or how is it possible to apply a stored, abstracted scheme to an analogous situation that, however, was not previously experienced? The suggested mechanism is based exactly on dynamics of neuronal networks with feedback connections. The input information that corresponds with a stimulus similar to e.g., an object which the organism has encountered before and whose representation is stored in the network in the form of synaptic connections, is – for the above reasons – somewhat different from the past original. Therefore, it activates a group of neurons whose pattern largely overlaps with the pattern originally stored. As a result of recurrent neuron connections, the current activity is directed back to the dendrites of interconnected cells that also include the neurons that are not activated by the current stimulus but are part of the stored memory trace. Thanks to the fact that their synapses with currently active cells are reinforced, there is a high probability – compared to those that are not reinforced – that the activity in the network will lead to their activation as well. This may activate the entire cell population representing the stored memory trace, which means that the originally stored pattern is re-activated even though the current stimulation is incomplete or slightly different. What happens is a de-facto ‘completion’ of the pre-existing pattern, which is why the phenomenon is called ‘pattern completion’ (FIG. 2). The *pattern completion* mechanism was proposed by David Marr⁸ and later elaborated on in respect of auto-associative nature of hippocampus CA3 and neocortex primarily by Edmund Rolls and Alessandro Treves.⁹ Just like LTP that was initially studied theoretically but not until much later was it experimentally confirmed, pattern completion, too, was not experimentally proved until many years after the introduction thereof.¹⁰

The above suggests that there is a certain inevitable overlap – a degree of similarity between the momentarily active pattern and the stored neural pattern, as a result of which the stored pattern is activated. The minimum necessary extent of the overlap depends on parameters of mutual connectivity in the neural network, the level of synaptic potentiation among the elements of the pattern, intensity of incoming excitation etc. If the degree of difference between the stored pattern and the newly

8 — D. Marr, Simple Memory: A Theory for Archicortex, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences 262, No. 841 (1. July 1971): 23–81, <https://doi.org/10.1098/rstb.1971.0078>.

9 — Alessandro Treves and Edmund T. Rolls, Computational Constraints Suggest the Need for Two Distinct Input Systems to the Hippocampal CA3 Network, Hippocampus 2, No. 2 (2. April 1992): 189–99, <https://doi.org/10.1002/hipo.450020209>.

10 — Tom J. Willis et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment, Science 308, No. 5723 (6. May 2005): 873–76, <https://doi.org/10.1126/science.1108905>; Laura L. Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network, Journal of Neurophysiology 104, No. 1 (July 2010): 35–50, <https://doi.org/10.1152/jn.00202.2010>; R. P. Kesner, Behavioral Functions of the CA3 Subregion of the Hippocampus, Learning & Memory 14, No. 11 (14. November 2007): 771–81, <https://doi.org/10.1101/lm.688207>; Karel Jezek et al., Theta-Paced Flickering between Place-Cell Maps in the Hippocampus, Nature 478, No. 7368 (October 2011): 246–49, <https://doi.org/10.1038/nature10439>; Edmund T. Rolls, The mechanisms for pattern completion and pattern separation in the hippocampus, Frontiers in Systems Neuroscience 7 (2013), <https://doi.org/10.3389/fnsys.2013.00074>.

aplikovat uložené abstrahované schéma na analogickou, ale předtím nepoznanou situaci? Možný mechanismus vychází právě z dynamiky neuronálních sítí se zpětnovazebnými spoji. Vstupní informace odpovídající stimulu, jenž je podobný např. objektu, se kterým se organizmus již setkal a jehož reprezentace je v neuronové síti uložena formou posílených synaptických spojení, je z výše uvedených důvodů poněkud odlišná od někdejšího originálu. Proto aktivuje skupinu neuronů, jejichž vzorec má značný překryv se vzorcem původně uloženým. Vlivem rekurentního zapojení neuronů je aktuální aktivita směřována zpět na dendrity propojených buněk, mezi nimiž jsou i neurony, které aktuálním stimulem aktivovány nejsou, ale jsou součástí uložené paměťové stopy. Vzhledem k tomu, že jejich synapse s nyní aktivními buňkami jsou posílené, pravděpodobnost, že daná aktivita v síti povede i k jejich aktivaci, je oproti neposíleným synapsím vysoká. Tímto způsobem může dojít k evokování aktivity v celé populaci buněk, reprezentující uloženou paměťovou stopu, a tedy k reaktivaci původně uloženého vzorce, ačkoli momentální stimulace je neúplná či mírně odlišná. Protože jde de facto o „kompletaci“ preexistujícího vzorce, fenomén se nazývá „pattern completion“ (OBR. 2). Mechanismus *pattern completion* byl navržen Davidem Marrem⁸ a později rozpracován v souvislosti s autoasociativním charakterem hipokampové CA3 a neokortextem především Edmundem Rollsem a Alessandro Trevesem⁹. Podobně jako LTP, jež byla též nejprve postulována teoreticky a teprve posléze potvrzena experimentálně, *pattern completion* byl pokusně prokázán o mnoho let později po svém uvedení¹⁰.

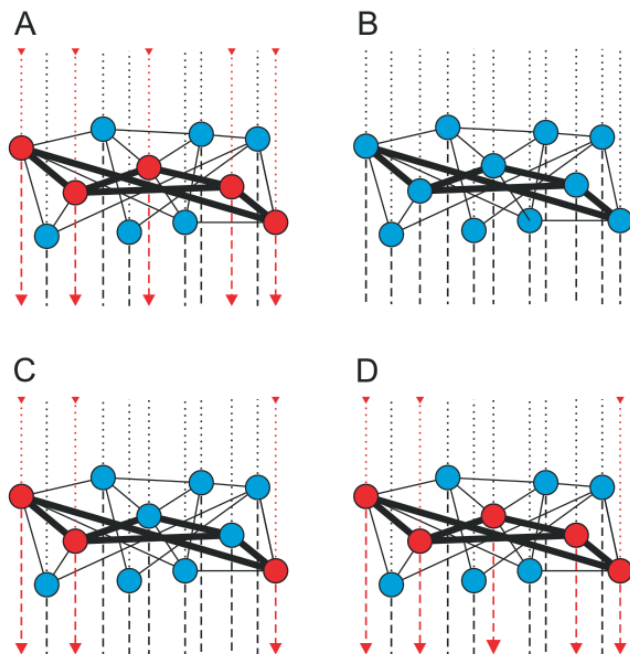
Z výše uvedeného vyplývá, že existuje jistý nezbytný překryv – míra podobnosti mezi aktuálně aktivním a uloženým neurálním vzorcem, který zajistí aktivaci uloženého. Jeho minimální nezbytná míra závisí na parametrech vzájemné propojenosti v neurální síti, úrovni potenciace mezi elementy vzorce, intenzitě přicházejících vzruchů atd. Pokud míra odlišnosti mezi uloženým vzorcem a nově přichází informací přesáhne reciproční kritickou mez, ke kompletaci zákonitě nedojde. U takto de Korelovaného přicházího stimulu lze předpokládat, že na jeho základě se zformuje nová reprezentace.

Princip kompletace uložených vzorců tedy umožňuje vybavit uložený vzorec aktivity – paměťovou stopu, mentální schéma či jiný druh reprezentace – na základě vstupní informace do určité míry odlišné. Odlišnost může mít podobu přítomnosti neurálního šumu, jehož přítomnost je přirozená a může aditivně růst napříč celou procesní kaskádou, jíž informace propaguje. Dále je to popsána proměnlivá povaha okolního světa.

8 — D. Marr, Simple Memory: A Theory for Archicortex, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences 262, č. 841 (1. červenec 1971): 23–81, <https://doi.org/10.1098/rstb.1971.0078>.

9 — Alessandro Treves a Edmund T. Rolls, Computational Constraints Suggest the Need for Two Distinct Input Systems to the Hippocampal CA3 Network, Hippocampus 2, č. 2 (2. duben 1992): 189–99, <https://doi.org/10.1002/hipo.450020209>.

10 — Tom J. Wills et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment, Science 308, č. 5723 (6. květen 2005): 873–76, <https://doi.org/10.1126/science.1108905>; Laura L. Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network, Journal of Neurophysiology 104, č. 1 (červenec 2010): 35–50, <https://doi.org/10.1152/jn.00202.2010>; R. P. Kesner, Behavioral Functions of the CA3 Subregion of the Hippocampus, Learning & Memory 14, č. 11 (14. listopad 2007): 771–81, <https://doi.org/10.1101/lm.688207>; Karel Jezek et al., Theta-Paced Flickering between Place-Cell Maps in the Hippocampus, Nature 478, č. 7368 (říjen 2011): 246–49, <https://doi.org/10.1038/nature10439>; Edmund T. Rolls, The mechanisms for pattern completion and pattern separation in the hippocampus, Frontiers in Systems Neuroscience 7 (2013), <https://doi.org/10.3389/fnsys.2013.00074>.



OBR. 2 Pattern completion v kolaterální neuronové síti. A. Vstupní informace (tečkovaná linie) aktivuje několik neuronů autoasociativní sítě, jejichž vzájemná spojení (tenká plná čára) se současnou aktivitou posílí (silná čára). B. Po odeznění stimulu v síti zůstává uložena soustava posílených spojů – paměťová stopa. C. Při setkání s fragmentem originálního stimulu je aktivována pouze část neuronů z původní skupiny. D. Díky posíleným synapsím se aktivita celé skupiny zkompletuje a výstupní informace (čárkovaná linie) odpovídá prvotní zkušenosti.

FIG. 2 Pattern completion in collateral neuronal network. A. The input information (dotted line) activates several neurons of the auto-associative network whose mutual connections (thin solid line) are boosted by the current activity (thick line). B. When the stimulus fades away, what remains stored in the network is a set of reinforced synapses – a memory trace. C. An encounter with a fragment of the original stimulus activates only part of neurons from the original group. D. Thanks to reinforced synapses, activity of the whole group gets completed and the output information (dashed line) corresponds with the primary experience.

Pattern completion ale pokrývá i eventualitu, kdy je vstupní informace nekompletní – všechny tyto varianty nejprve aktivují pouze fragment uloženého vzorce. Je zřejmé, že tato vlastnost je zcela klíčová pro funkčnost výbavnosti paměťového systému v přirozeném prostředí napříč živočišnou říší. Vedle modelového typu paměti, založeného na solitární reprezentaci v jedné neuronové síti, fenomén pattern completion také zároveň nabízí mechanismus vybavení komplexních vzpomínek, které mohou být rozprostřeny mezi různými paměťovými moduly mozku, na podkladě redukované stimulance. Například u epizodické paměti, která čítá rozměr času, prostoru, fakta a emoce, a u níž lze předpokládat, že tyto její části jsou distribuovány v odlišných částech sítě či mozku, lze prakticky vybavit celek vzpomínky otázkou směřující pouze k její jediné komponentě. Stimulus ve formě otázky „co se stalo v daný čas?“, či „na daném místě?“, vede obvykle k vybavení detailů ze zbylých rozměrů celé epizody. Stejný mechanismus tedy poslouží i pro zařazení vjemů do obecnějších kategorií, přestože se uvažovaný organismus s danými vjemy dosud neseťkal.

Průlomový vhled do projevů pattern completion přinesly nejprve experimenty behaviorální (např. Fenton, Arolfo a Bures 1994; Eichenbaum, Stewart a Morris 1990), poukazující na flexibilitu ve vybavení paměti při pozměněné¹¹ či neúplně¹² stimulaci. Základ dalších studií spočíval v tzv. morfovacím přístupu (morphing), kdy po ustanovení dvou rozdílných reprezentací na základě dvou různých sad stimulů je v sérii pozvolných kroků jeden set stimulů měněn v jiný¹³. Jejich postupnou prezentací je možno pozorovat efekt pattern completion až do stadia překročení míry dekorelace a kompletace vzorce druhého. Tento přístup ukázal existenci tohoto fenoménu jak u studií na lidských subjektech¹⁴, tak i na detailní úrovni neurálních populací u laboratorních modelů, především potkanů¹⁵, ale i u vyšších savců¹⁶. Tyto experimenty zároveň poskytují jedinečný vhled do základní topologické operace spočívající v postupné transformaci jedné verze topologického objektu v druhou na základě elementární shody v jejich morfologii, jako tomu je u příkladu eufemického morfování mezi „hrnkem a vdlkem“ (více níže).

Mechanismus pattern completion hraje tedy významnou roli nejen v procesech vybavování paměťových stop, ale je též nezastupitelný pro poznávací funkce organismu v mnohem obecnějším pohledu. Kognice je samozřejmě těsně spjatá s pamětí, přesto, některé její aspekty nejsou nezbytně navázané na reaktivaci konkrétních vzpomínek,

11 — H. Eichenbaum, C. Stewart, a Rg. Morris, Hippocampal Representation in Place Learning, *The Journal of Neuroscience* 10, č. 11 (1. listopad 1990): 3531–42, <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.10-11-03531.1990>.

12 — Andre A. Fenton, Maria Pia Arolfo, a Jan Bures, Place Navigation in the Morris Water Maze under Minimum and Redundant Extra-Maze Cue Conditions, *Behavioral and Neural Biology* 62, č. 3 (listopad 1994): 178–89, [https://doi.org/10.1016/S0163-1047\(05\)80016-0](https://doi.org/10.1016/S0163-1047(05)80016-0).

13 — Pia Rotshtein et al., Morphing Marilyn into Maggie Dissociates Physical and Identity Face Representations in the Brain, *Nature Neuroscience* 8, č. 1 (leden 2005): 107–13, <https://doi.org/10.1038/nn1370>; Wills et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment; Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network.

14 — Rotshtein et al., Morphing Marilyn into Maggie Dissociates Physical and Identity Face Representations in the Brain.

15 — Wills et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment; Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network.

16 — Athena Akrami et al., Converging Neuronal Activity in Inferior Temporal Cortex during the Classification of Morphed Stimuli, *Cerebral Cortex* 19, č. 4 (duben 2009): 760–76, <https://doi.org/10.1093/cercor/bhn125>.

arriving information exceeds a reciprocal critical limit, the completion will, naturally, not occur. We can assume that a de-correlated stimulus of this kind will lead to formation of a new representation.

Thus, the principle of stored pattern completion makes it possible to recall the stored pattern of an activity – memory trace, mental scheme or another type of representation – based on an input information that is to some extent different from the original. The difference can be manifested as neural noise whose presence is natural and can additively grow across the entire process cascade through which the information propagates. Alternatively, the difference can be the changing nature of the external world as described earlier. Furthermore, pattern completion also covers cases in which the input information is incomplete – all these alternatives initially activate only a fragment of the stored pattern. Clearly, this feature is absolutely crucial for the recall functionality of the memory system in natural environment across the Animalia kingdom. Besides the model-type of a memory that is based upon solitary representation in one neuron network, the pattern completion concept also offers a mechanism to recall complex memories that can be distributed across various memory modules in the brain based on reduced stimulation. For instance, as for episodic memory that comprises dimensions of time, space, facts and emotions which, presumably, are distributed in different networks of the brain, it is basically possible to recall the whole complex memory by a question aimed at just one of its components: a stimulus in the form of a question such as ‘What happened at the given time?’ or ‘at the given place’ typically initiates a recall of details of all other dimensions of the whole episode. Likewise, the same mechanism will serve to sort individual perceptions into more general categories even though the given organism has not yet encountered the given perception before.

A breakthrough insight into manifestations of pattern completion was initially made possible by behavioral experiments pointing to flexibility in memory recollection upon modified¹¹ or incomplete¹² stimulation (e.g. Fenton, Arolfo and Bures 1994; Eichenbaum, Stewart and Morris 1990). Further studies were based on ‘morphing’ where two different representations based on two different sets of stimuli are established and then, in a series of slow gradual steps, one set of stimuli is transformed into a different one.¹³ By way of their gradual presentations, it is possible to observe the pattern completion effect all the way to the stage of exceeding the critical de-correlation level and completing the second pattern. This approach revealed the existence of the phenomenon in studies of

11 — H. Eichenbaum, C. Stewart, and Rg. Morris, Hippocampal Representation in Place Learning, *The Journal of Neuroscience* 10, No. 11 (1. November 1990): 3531–42, <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.10-11-03531.1990>.

12 — Andre A. Fenton, Maria Pia Arolfo, and Jan Bures, Place Navigation in the Morris Water Maze under Minimum and Redundant Extra-Maze Cue Conditions, *Behavioral and Neural Biology* 62, č. 3 (Ilistopad 1994): 178–89, [https://doi.org/10.1016/S0163-1047\(05\)80016-0](https://doi.org/10.1016/S0163-1047(05)80016-0).

13 — Pia Rotshtein et al., Morphing Marilyn into Maggie Dissociates Physical and Identity Face Representations in the Brain, *Nature Neuroscience* 8, No.1 (leden 2005): 107–13, <https://doi.org/10.1038/nn1370>; Wills et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment; Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network.

ale spíše odkazují na vyšší funkce spojené se schopností abstrahovat různé kvality z prezentovaných podnětů, a jejich jednotlivosti či celky kategorizovat dle rozličných kritérií. Předpokládáme, jak bylo nastíněno výše, že reprezentace obecných kategorií, ať se již jedná o konkrétnější pohled (v čem spočívá „džbánovitost“ džbánu, „stromovitost“ stromu), či ještě abstraktnější kvality např. ontologické povahy, jsou v korových sítích mozku reprezentovány analogickou formou, ev. se nebudou principiálně lišit od reprezentací konkrétních vzpomínek. Dřívější i nedávné práce odkazují na umístění různých tříd kategorií napříč rozsáhlými oblastmi neokortexu, často seskupených dle jejich společných charakteristik¹⁷. Například abstraktní představy sociálního charakteru byly nalezeny v oblasti horního předního temporálního laloku lidského mozku¹⁸, naproti tomu kvantitativně orientované kategorie se nacházejí v regionu intraparietálního sulku¹⁹. Vzhledem k přítomnosti zpětnovazebných sítí široce napříč neokortexem se lze domnívat, že procesy zařazování do těchto abstraktních kategorií rovněž stojí na přítomnosti korelace mezi stimulem a uloženými reprezentacemi kategorií. Klasifikace stimulu k dané kategorii by tedy sdílela analogický mechanismus jako výše popsaná aktivace uložené vzpomínky.

Dynamiku pattern completion lze tedy považovat za úhelný mechanismus aktivace vzpomínek vázaných na kolaterální neuronové sítě, jakož i obecně kognitivních procesů spojených s klasifikací vjemů, nezbytných pro navazující motivační a rozhodovací mechanismy, vedoucí k adaptivnímu chování. Pro smysluplný celkový obraz zmíněné kaskády je nutné se ale ještě vypořádat s následující principiální námitkou: Pokud pattern completion směřuje k zařazení stimulu do existujících kategorií, hrozí reálné nebezpečí, že stimuly, které jsou odlišné povahy, ale sdílí podobné prvky, budou identicky klasifikovány. Tato systémová tendence, pakliže není korigována, přirozeně může mít dalekosáhlé negativní důsledky pro funkčnost paměťového systému i pro chování organismu v reálném světě, kdy adaptivnost často závisí na pozorném posuzování detailů. Na straně zápisu neurální informace hrozí nebezpečí, že stávající paměťová stopa bude překryta novou, podobnou a nastane vzájemná interference, na straně vybavení paměti hrozí riziko přílišné generalizace. Je zde tedy zapotřebí mechanismu, který dokáže původně subtilní rozdíly v neurální informaci zesílit, a touto cestou docílit toho, aby vjemy, lišící se v detailech, zcela nesplynuly. Rovněž z hlediska

17 — Eleonora Catricalà et al., State-Dependent TMS Reveals the Differential Contribution of ATL and IPS to the Representation of Abstract Concepts Related to Social and Quantity Knowledge, *Cortex* 123 (únor 2020): 30–41, <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2019.09.018>; Gabriella Vigliocco et al., The Neural Representation of Abstract Words: The Role of Emotion, *Cerebral Cortex* 24, č. 7 (červenec 2014): 1767–77, <https://doi.org/10.1093/cercor/bht025>; Rutvik H. Desai, Megan Reilly, a Wessel van Dam, The Multifaceted Abstract Brain, *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 373, č. 1752 (5. srpen 2018): 20170122, <https://doi.org/10.1098/rstb.2017.0122>.

18 — R. Zahn et al., Social Concepts Are Represented in the Superior Anterior Temporal Cortex, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104, č. 15 (10. duben 2007): 6430–35, <https://doi.org/10.1073/pnas.0607061104>.

19 — Marie Amalric a Stanislas Dehaene, Cortical Circuits for Mathematical Knowledge: Evidence for a Major Subdivision within the Brain's Semantic Networks, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 373, č. 1740 (19. únor 2017): 20160515, <https://doi.org/10.1098/rstb.2016.0515>.

human subjects¹⁴ as well as at the detail level of neural populations in laboratory models, primarily rats,¹⁵ but also in higher mammals.¹⁶ These experiments at the same time provide a unique insight into a basic topological operation consisting in gradual transformation of one version of a topological object into another based on elementary accord in their morphology such as in the case of euphemistic morphing between ‘mug and donut’ (more of this below).

Therefore, the pattern completion mechanism plays a significant role not only in processes of memory trace recollection but is also crucial for cognitive functions of an organism in a much more general perspective. Cognition is, naturally, closely associated with memory, but in spite of that some of its aspects are not necessarily linked to reactivation of specific recollections but rather refer to higher functions having to do with the ability to abstract various qualities from presented stimuli and to categorize their details or entireties by a variety of criteria. As outlined before, we assume that representations of general categories – whether focused on specific aspects thereof (what does ‘juggness’ of a jug, or ‘treeness’ of a tree consist in?) or even more abstract qualities of e.g. ontological nature – are represented in cortex networks of the brain in an analogous way, or will not fundamentally differ from representations of specific recollections. Earlier studies as well as more recent ones point to distribution of various category classes across extensive areas of neocortex, often grouped together according to their joint characteristics.¹⁷ For instance, abstract concepts of social nature have been found in the area of upper frontal temporal lobe of human brain¹⁸ whereas quantity-oriented categories are located in the region of intraparietal sulcus.¹⁹ Taking into account the wide-spread incidence of feedback-providing networks across the neocortex, we can assume that processes of allocations to abstract categories are also behind the correlation between the stimulus and the stored category representations. Accordingly, classification of stimuli by categories would share an analogical mechanism as the above described activation of stored recollections.

14 — Rotshtein et al., Morphing Marilyn into Maggie Dissociates Physical and Identity Face Representations in the Brain.

15 — Wills et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment; Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network.

16 — Athena Akrami et al., Converging Neuronal Activity in Inferior Temporal Cortex during the Classification of Morphed Stimuli, *Cerebral Cortex* 19, No.4 (2009): 760–76, <https://doi.org/10.1093/cercor/bhn125>.

17 — Eleonora Catricalà et al., State-Dependent TMS Reveals the Differential Contribution of ATL and IPS to the Representation of Abstract Concepts Related to Social and Quantity Knowledge, *Cortex* 123 (February 2020): 30–41, <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2019.09.018>; Gabriella Vigliocco et al., The Neural Representation of Abstract Words: The Role of Emotion, *Cerebral Cortex* 24, No. 7 (July 2014): 1767–77, <https://doi.org/10.1093/cercor/bht025>; Rutvik H. Desai, Megan Reilly, and Wessel van Dam, The Multifaceted Abstract Brain, *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 373, No. 1752 (5. August 2018): 20170122, <https://doi.org/10.1098/rstb.2017.0122>.

18 — R. Zahn et al., Social Concepts Are Represented in the Superior Anterior Temporal Cortex, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104, No. 15 (10. April 2007): 6430–35, <https://doi.org/10.1073/pnas.0607061104>.

19 — Marie Amalric and Stanislas Dehaene, Cortical Circuits for Mathematical Knowledge: Evidence for a Major Subdivision within the Brain’s Semantic Networks, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 373, No. 1740 (19. February 2017): 20160515, <https://doi.org/10.1098/rstb.2016.0515>.

strategie zápisu vjemů sice vzdáleně, ale stále souvisejících do neuronové sítě (např. podoby predátora a partnera, kteří mohou sdílet podobnou fyziognomii) se jeví výhodné vstupní podobnosti dekorelovat – snížit související překryv mezi kódy (pattern separation), a uložit je ve zpětnovazebném systému jako ortogonalizované vzorce. Opět jde o mechanismus, jenž byl stejně jako pattern completion nejprve postulován teoretickými přístupy Davidem Marrem²⁰.

20 — David Marr, A Theory of Cerebellar Cortex, *The Journal of Physiology* 202, č. 2 (1. červen 1969): 437–70, <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1969.sp008820>.

Neurální reprezentace prostoru

Prostor je jedna za základních entit okolního světa. Společně s časem tvoří základní fyzikální i intuitivní rozměr světa, v němž nacházíme sami sebe. Prostor v jeho základních třech dimenzích tvoří tak široce intuitivně srozumitelný koncept, že dostal i významný metaforický rozměr. Metafora prostoru tak slouží i pro uchopení jevů, které s prostorem samy o sobě mají jen velmi málo či nic společného. Fundamentální způsob, jakým je prostorová informace v mozku zpracovávána a uchována, byl prokázán až v polovině 20. století, kdy Edward C. Tolman experimentálně potvrdil hypotézu kognitivní mapy²¹. Teprve mnohem později byl objeven její korelát v části mozku označované jako hipokampus²². Jeho anatomie a fyziologie poskytuje nedocenitelný vhled do organizace prostorové reprezentace a paměti, z nichž usuzujeme i na obecnější mechanismy fungování mozku.

21 — Edward C. Tolman, Cognitive maps in rats and men, *Psychological Review* 55, č. 4 (1948): 189–208, <https://doi.org/10.1037/h0061626>.

22 — J. O'Keefe a J. Dostrovsky, The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat, *Brain Research* 34 (1971): 171–75, [https://doi.org/10.1016/0006-8993\(71\)90358-1](https://doi.org/10.1016/0006-8993(71)90358-1); John O'Keefe a Lynn Nadel, *The hippocampus as a cognitive map* (Oxford: New York: Clarendon Press; Oxford University Press, 1978).

Anatomie hipokampu

Hipokampus je makroskopicky rozsáhlá struktura mediálního temporálního laloku v lidském mozku. U laboratorních hlodavců, kteří jsou obvyklým experimentálním subjektem jeho studia, je umístěn pod parietální kůrou a propaguje kaudálně směrem laterálním a ventrálním. Hipokampus u člověka je asi stokrát větší než u laboratorního potkana. Napříč druhy je tvar struktury přípodobňován k mořskému koníku či ke „cornu Ammonis“, rohu berana, atributického zvířete staroegyptského boha Ammona. Vývojově jde o starou verzi mozkové kůry (archikortex), identifikovanou již u plazů a ptáků, která, oproti savčímu typu mozkové kůry (neokortex), má redukovaný počet vrstev.

Consequently, we may regard the pattern completion dynamics as the key mechanism that activates recollections bound to collateral neuronal networks as well as generally cognitive processes associated with classification of perceptions that are indispensable for follow-up motivational and decision-making mechanisms enabling adaptive behavior. To obtain a meaningful picture of the said cascade, though, we need to deal with the following principal objection: If pattern completion results in allocating stimuli to existing categories, then a real danger arises that stimuli of a different nature which, however, share similar elements, will be categorized identically. This systemic tendency, unless corrected, may certainly have far-reaching negative consequences for functionality of the memory system as well as for the behavior of the organism in real world where adaptability often depends on watchful observation of details. The danger looming on the side of neural information storing is that the existing memory trace will be overwritten by a new, similar one, and the two will interfere with one another, whilst on the side of the memory recall there is a risk of excessive generalization. Some mechanism is required, then, that would be able to boost the differences in neural information – originally only subtle ones – and thereby make sure that perceptions differing in small details will not completely merge. Also, in terms of strategy for recording of perceptions that are only remotely associated, but still are, into the neuron network (e.g. images of a predator and a partner who may share similar physiognomy), it seems advantageous to de-correlate the input similarities, i.e. decrease the relating overlap between codes (pattern separation) and store them in the feedback system as orthogonalized patterns. Once again, pattern separation is a mechanism that was first posited by theoretical approaches of David Marr,²⁰ just like the concept of pattern completion.

20 — David Marr, A Theory of Cerebellar Cortex, *The Journal of Physiology* 202, No. 2 (1. July 1969): 437–70, <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1969.sp008820>.

Přestože má velmi kompaktní a i makroskopicky dobře definovatelnou strukturu, funkčně je výhodné jej nahlížet společně s oblastmi entorhinální kůry. Ty plní roli informační brány, přes kterou do hipokampu vstupují signály zpracované velkou částí sensorického neokortexu, a zároveň se do ní informace po zpracování hipokampem vrací. Struktura hipokampu je v porovnání s jinými mozkovými systémy, přes jeho velikost, mimořádně jednoduchá (**OBR. 3**). V základním uspořádání jde o trísynaptický systém, jehož jednotlivé moduly mají zcela jinou strukturu, a tedy i funkci. Tři hlavní neuronální sítě hipokampálního obvodu – gyrus dentatus, CA3 a CA1 – jsou zapojené do série a informace skrze ně kaskádovitě propaguje. Vstupní informace přichází z druhé vrstvy entorhinální kůry, výstupní signál jde přímo či přes subikulum zpět do hlubokých vrstev entorhinální kůry. Jak je patrné, ve spojení s entorhinální kůrou, která je hlavní branou informačního vstupu i výstupu, představuje hipokampus trísynaptickou smyčku, jejíž existenci popsal již nestor neuronální doktríny Ramon Y Cajal²³. V anatomické nomenklatuře jako „vlastní hipokampus“ je označován celek „CA“ polí, tradičně CA4, CA3, CA2 a CA1, kdy CA4 je považován za přetrvávající anatomický omyl²⁴ a považujeme jej za hilární region, náležící ke gyrus dentatus. Jako hipokampální formaci popisujeme vlastní hipokampus současně s gyrus dentatus a subikulem a jako parahipokampální oblast pak předešlý celek v součinnosti s okolními korovými okruhy u vyšších savců. Pro potřeby této práce bude termín hipokampus používán ve významovém smyslu hipokampální formace.

Přestože Cajalův trísynaptický model představuje základní anatomické hipokampové zapojení, vzájemná komunikace jednotlivých oblastí je pestřejší. Hlavní informační vstup tzv. perforující drahou z povrchových vrstev entorhinální kůry končí především na dendritech granulárních buněk gyrus dentatus, ale zároveň další vlákna stejné dráhy propojují neokortex i se všemi poli Amonova rohu. Tato vstupní informační brána je stratifikována do dvou svazků: první vychází ze druhé vrstvy entorhinální kůry a terminuje v gyrus dentatus a CA3, druhá část opouští třetí vrstvu entorhinální kůry a končí v CA1 a subikulu. Mezi gyrus dentatus a CA3 informaci vede systém mechoových vláken. Hilární oblast na pomezí gyrus dentatus a CA3 (nevhodně nazývaná CA4) je zapojena naopak recipročně a vysílá vlákna zpět ke granulárním buňkám s inhibičním vlivem. Anatomicky korektně jde o polymorfni vrstvu gyrus dentatus. Z CA3 hlavní informační tok směřuje do CA1 formou Schafferových kolaterál a z CA1 výsledek hipokampových operací pak zpět do hlubokých vrstev entorhinální kůry buď

23 — Per Andersen, ed., *The hippocampus book* (Oxford; New York: Oxford University Press, 2007).

24 — T. W. Blackstad, *Commissural Connections of the Hippocampal Region in the Rat, with Special Reference to Their Mode of Termination*, *The Journal of Comparative Neurology* 105, č. 3 (říjen 1956): 417–537, <https://doi.org/10.1002/cne.901050305>; D. G. Amaral, *A Golgi Study of Cell Types in the Hilar Region of the Hippocampus in the Rat*, *The Journal of Comparative Neurology* 182, č. 4 Pt 2 (15. prosinec 1978): 851–914, <https://doi.org/10.1002/cne.901820508>; Andersen, *The hippocampus book*.

Neural Representations of Space

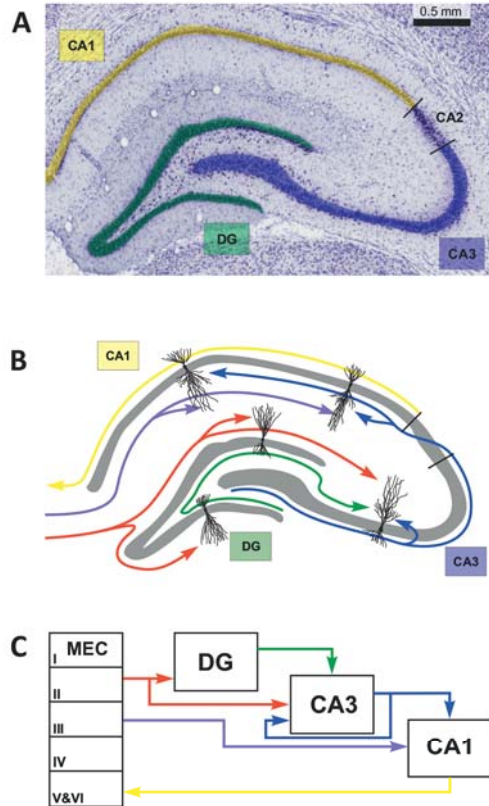
Space is one of the fundamental entities of the external world. Besides time it constitutes a fundamental physical as well as intuitive dimension of the world in which we are present. In its three basic dimensions, space is a concept that is so widely intuitively comprehensible that it has, in addition, acquired a substantial metaphorical dimension. In this way, space metaphors make it possible to grasp phenomena that in themselves have little or nothing in common with space. The fundamental way in which spatial information is processed and stored in the brain was not known until the middle of the 20th century when Edward C. Tolman experimentally proved the cognitive map hypothesis,²¹ and it took even longer to discover its correlate in the part of the brain that is referred to as hippocampus.²² Its anatomy and physiology provides an invaluable insight into the organization of spatial representation and memory from which we can understand more general mechanisms of brain functioning.

21 — Edward C. Tolman, Cognitive maps in rats and men, *Psychological Review* 55, No.4 (1948): 189–208, <https://doi.org/10.1037/h0061626>.

22 — J. O'Keefe and J. Dostrovsky, The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat, *Brain Research* 34 (1971): 171–75, [https://doi.org/10.1016/0006-8993\(71\)90358-1](https://doi.org/10.1016/0006-8993(71)90358-1); John O'Keefe and Lynn Nadel, *The hippocampus as a cognitive map* (Oxford: New York: Clarendon Press; Oxford University Press, 1978).

Hippocampus Anatomy

Hippocampus is a macroscopically extensive structure of the medial temporal lobe of the human brain. In laboratory rodents that are typically used as experimental subjects of hippocampus studies, it is located under the parietal cortex and propagates caudally in both lateral and ventral directions. Hippocampus in humans is about 100 times larger than in lab rats. Across species, its structural shape is likened to a sea-horse or 'cornu Ammonis' – horn of a ram, the attribute-animal of Ammon, the early Egyptian god. Developmentally, it is an old version of brain cortex (archikortex) identified already in reptiles and birds. Compared to the mammal-type cortex (neokortex), it has a reduced number of layers. Despite having a very compact and macroscopically well-defined structure, in terms of functionality it is convenient to view it in association with neighboring areas of entorhinal cortex which fulfill the role of an information gateway through which the signals processed by a large part of sensory neocortex enter the hippocampus and to which the information returns having been processed by the hippocampus. Compared to other brain systems, the structure of hippocampus is – despite its size – exceptionally simple (FIG. 3). In its basic arrangement, it is a three-synapsis system whose individual modules have completely different structures and, consequently, different functions. The main three neural networks of the hippocampal circuit – gyrus dentatus, CA3 and CA1 – are serially connected and information propagates through them in a cascade manner. The input information arrives from the 2nd layer of the



OBR. 3 Anatomie hipokampu. A. Koronální řez dorzálním hipokampem laboratorního potkana (barvení dle Nissla). Barevně jsou vyznačeny granulární (DG) a pyramidální (CA) vrstva obsahující těla hlavních neuronů. B. Zjednodušený diagram vnitřního propojení hipokampových polí odvozený z anatomického uspořádání v A. Základní trisynaptická smyčka je znázorněna postupně červenou (perforující dráha), zelenou (mechová vlákna), modrou (Schafferovy kolaterály) a žlutou barvou (výstupní dráha). Fialově je označena temporoammonická dráha C. Konektomické schéma zapojení z B.

FIG. 3 Hippocampus anatomy. A. Coronary section across the dorsal hippocampus of a laboratory rat (stained according to Nissl). The colors mark the granular (DG) and pyramidal (CA) layers containing bodies of principal neurons. B. Simplified diagram of internal connectivity of hippocampal subfields as derived from the anatomical arrangement in A. The basic tri-synaptic loop is shown, in turn, in red (perforant path), green (mossy fibers), blue (Schaffer collaterals) and yellow colors (output pathway). The violet connection represents the temporo-ammonic path. C. Connectome of the wiring under B.

entorhinal cortex and the output signal returns either directly or via the subiculum back to the deep layers of the entorhinal cortex. As we can see, the hippocampus – in conjunction with the entorhinal cortex, the main gateway for information input and output – represents a three-synapsis loop whose existence was already described by the doyen of the neuronal doctrine Ramon Y Cajal.²³ Anatomical nomenclature uses the term ‘hippocampus proper’ referring to the entirety of ‘CA’ fields – traditionally CA4, CA3, CA2 and CA1 – where CA4 is considered a persisting anatomical error.²⁴ It is regarded as a hilar region belonging to gyrus dentatus. The term hippocampus formation refers to the hippocampus proper, the gyrus dentatus and the subiculum, whilst the para-hippocampus area refers to the aforementioned entirety cooperating with surrounding cortex districts in higher mammals. For the purpose of this paper, the term hippocampus will be used in the sense of the hippocampus formation.

23 — Per Andersen, ed., *The hippocampus book* (Oxford; New York: Oxford University Press, 2007).

24 — T. W. Blackstad, *Commissural Connections of the Hippocampal Region in the Rat, with Special Reference to Their Mode of Termination*, *The Journal of Comparative Neurology* 105, No.3 (October 1956): 417–537, <https://doi.org/10.1002/cne.901050305>; D. G. Amaral, *A Golgi Study of Cell Types in the Hilar Region of the Hippocampus in the Rat*, *The Journal of Comparative Neurology* 182, No.4 Pt 2 (15. December 1978): 851–914, <https://doi.org/10.1002/cne.901820508>; Andersen, *The hippocampus book*.

Although the Cajal’s three-synapsis model represents the basic anatomical hippocampus wiring, mutual communication among individual areas is more diverse. The main information input via so-called perforant path originating in the entorhinal cortex surface layers terminates mostly at dendrites of the gyrus dentatus granular cells, but other fibers of the same path simultaneously connect the neocortex with all cornu Ammonis fields. This information input gateway is stratified into two bundles: the first originates in the 2nd layer of the entorhinal cortex and terminates in the gyrus dentatus and CA3, the second part leaves the 3rd layer of the entorhinal cortex and terminates in CA1 and the subiculum. Between the gyrus dentatus and CA3, information is transferred by a system of mossy fibers. On the other hand, the hilar area at the boundary between the gyrus dentatus and CA3 (inappropriately called CA4) is wired in a reciprocal manner and sends the fibers back to granular cells with inhibiting effect. To use an anatomically correct terminology, we should speak of gyrus dentatus polymorphic layer. From CA3, the main information flow proceeds to CA1 in the form of Schaffer collaterals, and the outcome of hippocampus operations then returns from CA1 back to the entorhinal cortex deep layers, either directly or via the subiculum. Each of the said areas is composed of three layers, one of which contains so-called main cells of the given area. As a matter of definition, the type of cells whose axons abandon the relevant part of hippocampus and engage in external communication is referred to as the main cell (granular cells in the gyrus dentatus and pyramidal cells in CA areas).

přímo, či přes subikulum. Každá z uvedených oblastí je komponována ze tří vrstev, z nichž jedna obsahuje tzv. hlavní buňky dané části. Jako hlavní buňka (granulární bb. v gyrus dentatus a pyramidové bb. v CA oblastech) je definován ten typ, jehož axony příslušnou část hipokampu opouštějí a komunikují tak navenek.

Neurální reprezentace prostoru v hipokampu

Neuronální základ hipokampové reprezentace prostoru byl popsán J. O'Keefem a J. Dostrovskim v r. 1971. V dnes již klasickém experimentu byly do hipokampu laboratorního potkana implantovány mikroelektrody registrující extracelulárně aktivitu několika principiálních neuronů v podoblasti CA1. Zprvu víceméně náhodou byla zaznamenána souvislost mezi aktivitou těchto buněk a pozicí subjektu v experimentální aréně. Objev byl zprvu přijímán velmi rezervovaně, neboť takto přímočarý vztah mezi aktivitou jednotlivé buňky a chováním zvířete v prostoru byl ve značném kontrastu s tehdejší diskurzem nahlížejícím na jednotlivý neuron sice jako na základní element CNS, ale se značnou skepsí ohledně možnosti z jeho individuální aktivity extrahovat nesenou informaci o tak pokročilém mentálním konstrukt, jako je prostor. Nicméně toto kontroverzní pozorování se podařilo publikovat, fenomén place cells (neuronů místa) se brzy etabloval a O'Keefova domovská laboratoř na University College v Londýně se stala epicentrem pro studium vztahů mezi aktivitou v hipokampu a jeho přilehlých strukturách a prostorovým chováním. Brzy po objevu začala vznikat podoba širší představy, která place cells dala teoretický základ s přesahem nad rámec hipokampového kódování prostoru. Především začalo být jasné, že prostor jako entita je jednou z mnoha kvalit, které by v mozku mohly být kódovány analogickým způsobem, a že fenomén patrně ilustruje principiální způsob, jakým mozek vykonává podstatnou část své kognitivní kapacity²⁵.

25 — O'Keefe a Nadel,
The hippocampus as a cognitive map.

Základní funkční charakteristikou hlavních buněk hipokampu je prostorová modulace jejich aktivity, nazývaná též 'spatial tuning' (**OBR. 4 A**). Typický poziční neuron je aktivní pouze v určité části prostředí, v níž se frekvence jeho akčních potenciálů graduálně mění od nuly až po lokální maximum, jež může nabývat hodnot od několika po nižší desítky Hz. Tato receptivní zóna je nazývána 'firing field' a její rozsah a umístění v prostoru je vysoce individuální pro každý neuron kódující dané prostředí. Vzhledem ke značnému počtu a variabilitě v prostorové modulaci aktivity

Neural Representation of Space in Hippocampus

The neuronal basis of hippocampal spatial representation was described by J. O'Keefe and J. Dostrovski in 1971. In what is now considered a classical experiment, microelectrodes were implanted into a laboratory rat's hippocampus in order to register extracellular activity of principal neurons in CA1 sub-area. More or less as a coincidence, a relationship was recorded between activity of these cells and position of the subject in the experimental arena. The discovery was initially received with a great deal of reservations since such a straightforward relationship between individual cell activity and behavior of the animal in space was in sharp contradiction with the then discourse that, despite regarding an individual neuron as a fundamental element of the CNS, was largely skeptical about the possibility of extracting from its individual activity a relayed information of such an advanced mental construct as space. Nevertheless, the authors managed to have their observation published, the 'place cells phenomenon' soon became a well-established one and O'Keefe's home lab at the University College in London became an epicenter for studies of relationships between the hippocampus and adjacent structures on the one hand and spatial behavior on the other. Soon after the discovery, a concept started taking shape which gave the place cells a theoretical basis exceeding the framework of the hippocampus space coding. Above all, it became clear that space as an entity is one of many qualities that could be coded analogically and that the phenomenon presumably illustrates the principal way in which the brain performs a substantial part of its cognitive capacity.²⁵

25 — O'Keefe and Nadel, *The hippocampus as a cognitive map*.

The basic functional characteristics of principal hippocampal cells is a spatial modulation of their activity, also known as 'spatial tuning' (FIG. 4 A). A typical place neuron is active only in a certain part of the environment in which the frequency of its action-potentials gradually changes from zero up to the local maximum that can acquire values from several Hz to lower tens of Hz. This receptive zone is called 'firing field' and its scope and location is highly individual for each neuron that codes the given environment. Regarding the large number and variability in spatial modulation of the hippocampus neurons activity, each physically accessible place of a typical environment is mapped by a whole set of cells. Such is the emergence of a population-code that provides – thanks to mutual overlaps of individual receptive zones – precise information on the subject's position in space. Reciprocally, the subject's location can be reconstructed in a relatively simple manner by decoding the activity of the relevant neuron group, insofar as the information on their individual spatial modulation is available.

Accordingly, the sum of all place-neurons with their space-coding features constitutes a physiological substrate of neural representation of space. Actual representation of a specific space, or a space-cognitive map thereof, is then constituted

hipokampových neuronů je každé fyzicky dosažitelné místo typického prostředí mapováno celým souborem buněk. Vzniká tak populační kód, který vzhledem k vzájemným překryvům individuálních receptivních zón poskytuje přesnou informaci o poloze subjektu v prostoru. Recipročně, polohu subjektu lze poměrně jednoduše zrekonstruovat dekodováním aktivity příslušné skupiny neuronů, je-li k dispozici informace o jejich individuální prostorové modulaci.

Suma všech pozičních neuronů s jejich prostor-kódujícími vlastnostmi tedy tvoří fyziologický substrát neurální reprezentace prostoru. Vlastní reprezentace konkrétního prostředí či jeho prostorově kognitivní mapa je pak tvořena podskupinou těchto neuronů, které individuálně mapují jeho jednotlivé části. Míra zapojení populace do konkrétních reprezentací se liší dle různých hledisek, reflektujících jak charakter daného prostředí (jeho velikost, denzita stimulů, emoční kontext), tak i anatomicky. Hovoříme o tzv. sparsitě, již lze vyjádřit jako proporcii aktivních buněk v daném prostředí z celku celé dostupné populace. Sparzita je rozdílná napříč jednotlivými částmi trisynaptického hipokampového okruhu. V oblasti gyrus dentatus je v důsledku výrazné inhibice tato hodnota extrémní, tedy naprosté minimum buněk vykazuje poziční selektivitu²⁶ a naopak, značné procento neuronů je velmi málo aktivních. Tato charakteristika je dále kontrastována faktem, že gyrus dentatus je jedním ze dvou míst savčího mozku (vedle subventrikulární zóny laterální mozkové komory), kde probíhá neurogeneze i v dospělém věku. Díky tomuto dosud nepochopenému paradoxu je v ohledu populačního kódování prostoru neurální obvod gyrus dentatus nejvíce enigmatický z celého hipokampového okruhu. V autoasociativní oblasti CA3, která přijímá signál především z GD, je sparzita stále vysoká, nicméně zde jsou naše znalosti o neuronálním kódování a anatomické architektuře mnohem rozsáhlejší, a lze tedy postavit kompletnější mechanistický obraz vztahu mezi strukturou a funkcí. Vlivem značné inhibice, charakteristické ostatně pro celou oblast hipokampu, je pravděpodobnost aktivity CA3 neuronu kdekoli v daném prostředí okolo 5–10 %²⁷. Tento poměr v kombinaci s faktem, že aktivita daného neuronu není omezena na jediné prostředí, ale může reprezentovat i místa v jiných prostorových kontextech, značně umocňuje

26 — M. W. Jung a B. L. McNaughton, Spatial Selectivity of Unit Activity in the Hippocampal Granular Layer, *Hippocampus* 3, č. 2 (1993): 165–82, <https://doi.org/10.1002/hipo.450030209>; Jill K. Leutgeb et al., Pattern Separation in the Dentate Gyrus and CA3 of the Hippocampus, *Science* (New York, N.Y.) 315, č. 5814 (16. únor 2007): 961–66, <https://doi.org/10.1126/science.1135801>; Verónica Piatti, Laura Ewell, a Jill Leutgeb, Piatti VC, Ewell LA, Leutgeb JK. Neurogenesis in the dentate gyrus: carrying the message or dictating the tone. *Front Neurosci* 7: 50, *Frontiers in neuroscience* 7 (4. duben 2013): 50, <https://doi.org/10.3389/fnins.2013.00050>.

27 — Erika Cerasti a Alessandro Treves, How Informative Are Spatial CA3 Representations Established by the Dentate Gyrus?, *PLoS computational biology* 6 (29. duben 2010): e1000759, <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000759>; Charlotte B. Alme et al., Place Cells in the Hippocampus: Eleven Maps for Eleven Rooms, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 111, č. 52 (30. prosinec 2014): 18428–35, <https://doi.org/10.1073/pnas.1421056111>.

by a sub-group of these neurons that individually map its individual coordinates. The extent to which the population is involved in specific representations differs by various aspects reflecting both the character of the given environment (size, stimulus density, emotional context) and the anatomy. We use the term ‘sparsity’ which can be expressed as a proportion of active cells in the given environment as against the entire available population. Sparsity differs across individual parts of the tri-synaptic hippocampus circuit. In the gyrus dentatus area, the value is extreme due to significant inhibition, i.e. a bare minimum of cells manifests place selectiveness,²⁶ on the contrary, substantial percentage of neurons manifest low activity. This characteristic further contrasts with the fact that the gyrus dentatus is one of 2 places in the mammal brain (besides the sub-ventricular zone of the lateral brain chamber) where neurogenesis proceeds even in an adult age. Thanks to this paradox that has yet to be comprehended, the gyrus dentatus (GD) neural circuitry, in terms of population-coding in space, is the most enigmatic circuit of the entire hippocampus area. In the auto-associative area of CA3 which receives signals primarily from GD, sparsity is still high, but here our knowledge of neural coding and anatomical architecture is much more extensive, thanks to which we can build a more complete mechanistic image of the structure-function relationship. Due to substantial inhibition that is, by the way, typical for the entire hippocampus area, the probability of CA3 neuron activity anywhere in the given environment is approximately 5-10%.²⁷ This ratio, along with the fact that activity of a given neuron is not limited to a single environment but can also represent places in other spatial contexts, hugely multiplies the CA3 area storage capacity. Without having to recycle population activity patterns across environments, it can be estimated that the CA3 area can hold space maps for many thousands of contexts, providing that we only consider coding in spatial domains.

Sizes of receptive zones are not uniform and depend on multiple factors. On average, the largest firing fields are formed in CA1 whilst zones that are smaller by approx. 20% as well as zones roughly the same size are detected in DG and CA3. Besides the anatomical aspect, what also significantly impacts the size of receptive zones is

26 — M. W. Jung and B. L. McNaughton, Spatial Selectivity of Unit Activity in the Hippocampal Granular Layer, *Hippocampus* 3, No.2 (1993): 165–82, <https://doi.org/10.1002/hipo.450030209>; Jill K. Leutgeb et al., Pattern Separation in the Dentate Gyrus and CA3 of the Hippocampus, *Science* (New York, N.Y.) 315, No. 5814 (16. February 2007): 961–66, <https://doi.org/10.1126/science.1135801>; Verónica Piatti, Laura Ewell, and Jill Leutgeb, Piatti VC, Ewell LA, Leutgeb JK. Neurogenesis in the dentate gyrus: carrying the message or dictating the tone. *Front Neurosci* 7: 50, *Frontiers in neuroscience* 7 (2013): 50, <https://doi.org/10.3389/fnins.2013.00050>.

27 — Erika Cerasti and Alessandro Treves, How Informative Are Spatial CA3 Representations Established by the Dentate Gyrus?, *PLoS computational biology* 6 (2010): e1000759, <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000759>; Charlotte B. Alme et al., Place Cells in the Hippocampus: Eleven Maps for Eleven Rooms, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 111, No. 52 (30. December 2014): 18428–35, <https://doi.org/10.1073/pnas.1421056111>.

úložnou kapacitu CA3 oblasti. Aniž by bylo třeba vzorce populační aktivity recyklovat napříč prostředím, lze odhadovat, že CA3 oblast pojme prostorové mapy pro mnoho tisíc kontextů, uvažovali-li bychom pouze kódování v prostorové doméně.

Velikost receptivních zón není jednotná a podílí se na ní více faktorů. V průměru největší firing fields se formují v CA1, o cca 20 % menší a zhruba stejně velké zóny jsou pozorovány v DG a CA3. Kromě anatomického hlediska se výrazně do velikosti receptivních zón propisuje velikost prostředí, s níž pozitivně koreluje²⁸. Zatímco v nejčastěji užívaných arénách o ploše cca 40–50 dm² zabírá průměrně velká zóna neuronů v oblasti CA1 plochu cca 2–3 dm², ve větších prostředích (250 dm²) je to přibližně 10 dm²²⁹. Pakliže by došlo k zvětšení již známého prostředí, pak je efekt nárůstu plochy firing field ještě větší³⁰. Další podstatnou proměnou je anatomická lokalizace neuronu na dorso-ventrální ose hipokampu. Zatímco výše uvedené hodnoty platí pro neuronální odpovědi z dorzální části hipokampu, směrem ventrálním se velikost firing fields výrazně zvětšuje. V experimentu s extrémně rozsáhlým prostředím ve formě lineární dráhy o délce 18 m (obvyklá délka je okolo 2 m) byla registrována aktivita CA3 neuronů napříč dorzálním i ventrálním pólem hipokampu, která ukázala na variabilitu ve velikosti zón mezi cca 1 m (dorzální CA3) až 10 m (ventrální CA3)³¹. V neposlední řadě se na velikosti, byť menší měrou, podílí faktor novosti a familiarity prostředí. V novém, do té doby nenavštíveném prostředí mají nově ustavené receptivní zóny větší velikost o cca 10 % v porovnání se zónami stejných neuronů poté, co se experimentální subjekt s prostředím opakovaně seznámil³². Transientní rozšíření firing fields lze pozorovat v řádu zlomku sekund až sekund v okamžiku reaktivity již uložené paměťové stopy³³.

Aktivita hipokampových place cells je tedy výrazně modulována jak prostorem, tak kontextem a tvoří unikátní reprezentaci (kognitivní mapu) pro dané prostředí. V kontextuálně rozdílných prostředích pak zpravidla nalezneme i rozdílnou prostorovou reprezentaci (**OBR. 4 B**), třebaže tato prostředí mohou být do jisté míry vzájemně vizuálně podobná³⁴. Tento typ změny v kódování napříč kontexty nazýváme „globální

28 — R. U. Muller a J. L. Kubie, The Effects of Changes in the Environment on the Spatial Firing of Hippocampal Complex-Spike Cells, *Journal of Neuroscience* 7, č. 7 (1. červenec 1987): 1951–68, <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.07-07-01951.1987.1987>

29 — EunHye Park, Dino Dvorak, a André A. Fenton, Ensemble Place Codes in Hippocampus: CA1, CA3, and Dentate Gyrus Place Cells Have Multiple Place Fields in Large Environments, *PLOS ONE* 6, č. 7 (7 2011): e22349, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0022349>.

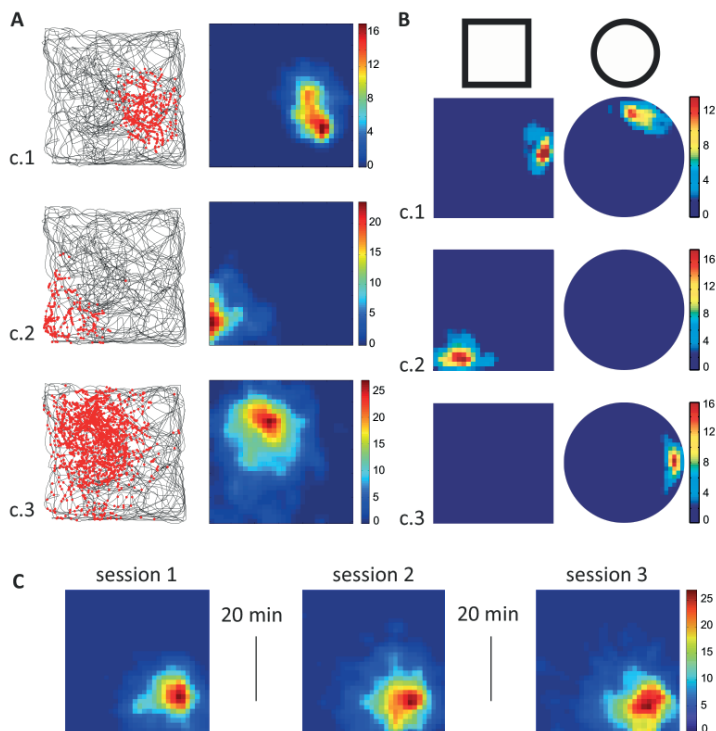
30 — Muller a Kubie, The Effects of Changes in the Environment on the Spatial Firing of Hippocampal Complex-Spike Cells. 1987

31 — Kirsten Brun Kjelstrup et al., Finite Scale of Spatial Representation in the Hippocampus, *Science* 321, č. 5885 (4. červenec 2008): 140–43, <https://doi.org/10.1126/science.1157086>.

32 — Caswell Barry et al., Grid cell firing patterns signal environmental novelty by expansion, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 109, č. 43 (23. říjen 2012): 17687–92, <https://doi.org/10.1073/pnas.1209918109>.

33 — Frantisek Zitricky a Karel Jezek, Retrieval of Spatial Representation on Network Level in Hippocampal CA3 Accompanied by Overexpression and Mixture of Stored Network Patterns, *Scientific Reports* 9, č. 1 (prosinec 2019): 11512, <https://doi.org/10.1038/s41598-019-47842-w>.

34 — Stefan Leutgeb et al., Independent Codes for Spatial and Episodic Memory in Hippocampal Neuronal Ensembles, *Science* 309, č. 5734 (22. červenec 2005): 619–23, <https://doi.org/10.1126/science.1114037>; Alme et al., Place Cells in the Hippocampus.



OBR. 4 Prostorová modulace aktivity tří reprezentativních hipokampových pozičních neuronů („place cells“). Vlevo – tenká plná čára reprezentuje trajektorii pohybu experimentálního potkana v aréně po dobu 10 minut. Červené body kumulativně znázorňují akční potenciály sledovaného neuronu místa dle pozice, v níž se potkan nacházel v okamžiku jejich emise. Vpravo – frekvenční mapa daného neuronu. B. Kontextově prostorová aktivita tří pozičních neuronů ve dvou rozličných prostředích (čtverec a kruh). C. Stabilita hipokampové mapy v čase. Záznam aktivity jednoho neuronu během tří seancí v identické aréně, odělených přestávkami. Velikost strany arény – 60 cm. Doba strávená v aréně – 10 minut. Jednotka barevné škály – Herz.

FIG. 4 Spatial modulation of activity in three representative hippocampus ‘place-cells’. Left: the thin solid line represents a movement trajectory of an experimental rat in an arena for a period of 10 minutes. The red points cumulatively visualize action-potentials of the observed place-neuron according to the position of the rat at the time of the emission thereof. Right: Frequency-map of the given neuron. B. Context-spatial activity of three place-neurons in two different environments (square and circle). C. Hippocampus map stability over time. Recorded activity of a neuron in three seances in an identical arena, separated by breaks. Size of the arena side – 60 cm. Time spent in the arena – 10 minutes. Color scale unit – Herz.

remapování“, odkazujíc k zásadní změně celého kódu. Naopak, pokud je změna v prostředí jen dílčí a přitom zůstane zachován jeho širší kontext (např. na stěně místnosti se objeví jiný obraz), prostorový kód související neurální aktivity se zpravidla změní jen nepatrně. Změna kódu v takovém případě nastane obvykle nikoli ve změně pozic receptivních zón jako u globálního remapování, nýbrž jen v úrovni aktivity některých neuronů v místech původních zón. Vlastní kostra celé mapy zůstává stabilní. Tyto frekvenční změny označujeme jako „frekvenční remapování“³⁵. Zmíněné dva typy změn hipokampových reprezentací představují víceúrovňovou podobu reakcí hipokampového kódování na pozměněné okolní podmínky. Frekvenční remapování umožňuje flexibilní implementaci dílčích změn ve známém prostředí do stávající mapy, aniž by byla nutná její širší reorganizace. V tomto smyslu daná populační mapa sama o sobě představuje prvek schématu odkazující na topologický přístup k prostoru. Byť obsahuje detailní informace o konstelaci kódovaného prostředí, je velmi tvárná a ve svém základu robustní vůči změnám v okolí, dokud nepřesáhnou kritickou mez, při níž je pak ustavena mapa nová cestou globální změny kódu. Globální remapování tak nastane přirozeně mezi zjevně rozdílnými kontexty, ev. i v případě, kdy okolní změny jsou takového rozsahu, že aktuální vjemy dostatečně nekorelují s uloženou reprezentací.

Klíčovou vlastností hipokampového kódu pro prostor, jež jej kvalifikuje jako fyziologický substrát prostorové paměti, je jeho časová stabilita (**OBR. 4C**) – prostorová buněčná odpověď je stabilní napříč dny, týdny až měsíci³⁶. Zároveň ale tato nezbytná státnost je vyvažována dynamikou pomalých změn v populaci kódujících buněk. Tento prvek je podstatný pro trvalou udržitelnost funkčnosti daného engramu – napříč delším časovým obdobím se prostorová modulace jednotlivých elementů může postupně oslabovat, zatímco u jiných, do té doby neaktivních buněk, mohou vznikat nová pole aktivity, a tyto neurony pak vstupují do souboru tvořícího populační kód. Teprve práce z posledních let díky dostupnosti technik umožňujících dostatečně stabilní nahrávky ze stejných neuronů napříč mnoha dny charakterizují míru konstantní remodelace prostorové mapy³⁷. Ukazuje se, že remodelace je komplexní jev, který není statický, ale závisí na více faktorech, jak pokud jde o charakter stimulů v mapovaném prostředí, tak ve smyslu druhovém, kdy např. napříč laboratorními hlodavci je remodelační drift populačního kódu výrazně vyšší u myších modelů nežli u laboratorních potkanů. Kombinace efektu

35 — Leutgeb et al., Independent Codes for Spatial and Episodic Memory in Hippocampal Neuronal Ensembles.

36 — L. T. Thompson a P. J. Best, Place Cells and Silent Cells in the Hippocampus of Freely-Behaving Rats, *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 9, č. 7 (červenec 1989): 2382–90.

37 — Yaniv Ziv et al., Long-Term Dynamics of CA1 Hippocampal Place Codes, *Nature Neuroscience* 16, č. 3 (březen 2013): 264–66, <https://doi.org/10.1038/nn.3329>.

the size of the environment which it positively correlates with.²⁸ In most frequently used areas of approx. 40–50 sq dm, an average-size neuron zone in the CA1 area occupies approx. 2 sq dm whereas in larger environments (250 sq dm) it would be about 10 sq dm.²⁹ Should the already known environment grow larger, the effect of firing field area increase is even larger.³⁰ Another important variable is the anatomical location of the neuron on the dorso-ventral axis of the hippocampus. Whilst the above values apply to neuronal responses from the hippocampus dorsal part, the size of firing fields in the ventral direction grows substantially. In an experiment using an extremely extensive environment in the form of linear route 18 m long (commonly used length is around 2 m), CA3 neuron activity was registered across both the dorsal and the ventral hippocampus poles, pointing to variability of zone sizes between approx. 1 m (dorsal CA3) and 10 m (ventral CA3).³¹ Last but not least, another factor co-impacting the size, albeit to a lesser degree, is the factor of environment newness and familiarity. In a new environment, not visited yet, the newly established receptive zones are bigger in size by approx. 10% compared to zones of the same neurons after the experimental subject has repeatedly get familiarized with the environment.³² Transient expansion of firing fields can be observed in the order or fractions of a second to seconds upon reactivating the memory traces already stored.³³

As we have seen, activity of hippocampus place cells is markedly modulated by both space and context, forming a unique representation (cognitive map) for the given environment. In contextually diverse environments we usually find different spatial maps (FIG. 4 B), although the environments may be to some extent visually similar.³⁴ This type of coding changes in a wide range of contexts is known as ‘global remapping’ referring to the fundamental change of the entire code. If, on the contrary, the change in the environment is but a partial one whilst the wider context is preserved (e.g. a different painting appears on the wall in a familiar room), the space code of the corresponding neural activity tends to change negligibly. In cases like that, code changes occur not in the receptive zone position change, as they do in global remapping, but only in some neuron activity levels in places

28 — R. U. Muller and J. L. Kubie, The Effects of Changes in the Environment on the Spatial Firing of Hippocampal Complex-Spike Cells, *Journal of Neuroscience* 7, No. 7 (1. July 1987): 1951–68, <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.07-07-01951.1987>.

29 — EunHye Park, Dino Dvorak, and André A. Fenton, Ensemble Place Codes in Hippocampus: CA1, CA3, and Dentate Gyrus Place Cells Have Multiple Place Fields in Large Environments, *PLOS ONE* 6, č. 7 (7 2011): e22349, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0022349>.

30 — Muller and Kubie, The Effects of Changes in the Environment on the Spatial Firing of Hippocampal Complex-Spike Cells.

31 — Muller and Kubie, The Effects of Changes in the Environment on the Spatial Firing of Hippocampal Complex-Spike Cells.

32 — Caswell Barry et al., Grid cell firing patterns signal environmental novelty by expansion, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 109, No. 43 (23. October 2012): 17687–92, <https://doi.org/10.1073/pnas.1209918109>.

33 — Frantisek Zitricky and Karel Jezek, Retrieval of Spatial Representation on Network Level in Hippocampal CA3 Accompanied by Overexpression and Mixture of Stored Network Patterns, *Scientific Reports* 9, No. 1 (December 2019): 11512, <https://doi.org/10.1038/s41598-019-47842-w>.

34 — Stefan Leutgeb et al., Independent Codes for Spatial and Episodic Memory in Hippocampal Neuronal Ensembles, *Science* 309, No. 5734 (22. July 2005): 619–23, <https://doi.org/10.1126/science.1114037>; Alme et al., Place Cells in the Hippocampus.

neustále nově rekrutovaných buněk a následné časové stability v jejich prostorové odpovědi napříč týdny tak zajišťuje teoreticky časově neomezené trvání neurální reprezentace daného prostoru, pakliže systém nezkolabuje z jiných, patologických příčin. Druhý podstatný aspekt proměnlivosti prostorového kódu v čase je občasná nezbytnost jej přizpůsobit změněným podmínkám v prostředí. Ty mohou být jak náhlé, kdy do konstelace vnímaných stimulů skokovitě vstoupí či ubude nový prvek, či dojde ke změně ve vzájemných vztazích zúčastněných elementů, aniž by se měnil jejich počet. Dle rozsahu zmíněných změn se promění i podoba prostorového kódu, kdy při malých změnách mohou být změny nepozorovatelné, zatímco při rozsáhlejších mohou nabývat dramatické podoby globálního remapování. Experimenty s rotačními či translačními změnami v konstelaci orientačních stop ukázaly, že jednotlivé elementy kognitivní mapy mohou být různou měrou vázány na vzdálené či lokální objekty či atributy daného prostředí. Ve výsledku tak může být celá mapa přearanžována, přičemž neurony těsně vázané k příslušným orientačním stopám zachovávají tento prostorový vztah a jejich receptivní zóny (firing fields) se posouvají v souladu se změnami v rozmístění stop³⁸. V kontextu výše uvedeného je ale nezbytné zdůraznit, že popsaný rozpad neurální reprezentace nastává až při skutečně rozsáhlých změnách v okolí, či alespoň při změnách výrazných orientačních stop, neboť při změnách dílčího rázu se uplatňuje proces 'pattern completion', který naopak změny toleruje, přispívá ke stabilitě reprezentace a okolní změny se do stávající mapy zakomponují formou frekvenčního remapování či funkčním zapojením dalších neuronů do aktivní populace.

38 — James J. Knierim, Dynamic Interactions between Local Surface Cues, Distal Landmarks, and Intrinsic Circuitry in Hippocampal Place Cells, *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 22, č. 14 (15. červenec 2002): 6254–64, <https://doi.org/20026608>; James J. Knierim a Geeta Rao, Distal Landmarks and Hippocampal Place Cells: Effects of Relative Translation versus Rotation, *Hippocampus* 13, č. 5 (2003): 604–17, <https://doi.org/10.1002/hipo.10092>.

Topologické aspekty funkce hipokampu

Je zřejmé, že reálný svět, tedy svět vně laboratorních podmínek, je komplexní, daleko přesahující purismus umělé vytvořených experimentálních aparatur. Když uvažujeme o prostoru, činíme tak často jako o abstraktní, formalizované entitě, nejčastěji v eukleidovském smyslu, bez jeho „osídlení“ objekty, významy, jinými bytostmi. Je zřejmé, že pro adaptivní chování se bez „zabydleného“ prostoru neobejdeme a že takovýto prostor nebude prostředím jen s izolovanými objekty, ale bude zároveň s nimi vyplněn i jejich významy a vzájemnými vztahy. Navíc prostor coby jedna z dimenzí epizodické paměti je v přeneseném smyslu nositelem v něm prožitých vzpomínek, a ty by tedy měly v prostorové reprezentaci též být zahrnuty či s ní asociovány. A i kdybychom z komplexního neurálního kódu chtěli extrahovat pouze prostorové vztahy, dojdeme k poznání, že i minimálně strukturovaný prostor není významově uniformní, ale nervový systém jej a priori významově strukturuje. To je přesvědčivě ilustrováno

of the original zones. The actual skeleton of the whole map remains stable. These frequency changes are referred to as ‘rate remapping’.³⁵ The two types of hippocampal representation changes constitute a multi-level concept of hippocampus coding responses to modified external conditions. Rate remapping enables flexible implementation of partial changes in a familiar environment into the existing map without any need for wider reorganization thereof. In this sense, the given population map in itself represents a scheme-element referring to topological approach to space. Although it contains detailed information on coded environment constellation, it is highly formative and fundamentally robust with respect to external changes up to a critical threshold beyond which a new map is established by way of a global code change. Thus, global remapping occurs naturally between conspicuously different contexts, or in instances when the external changes are so extensive that current perceptions do not sufficiently correlate with the stored representation.

The key feature of a hippocampus code for a space that qualifies it as a physiological substrate of spatial memory, is its stability over time (FIG. 4C) – the spatial cell response is stable over days, weeks or months.³⁶ At the same time, however, the required static stability is balanced by the dynamics of slow changes in the coding cell population. This element is essential for permanent sustainability of the given engram’s functionality – over longer periods of time, spatial modulation of individual elements may gradually weaken whereas new fields of activity may emerge in other cells, up until then inactive, and these neurons then enter the suite constituting the population code. Studies from the last few years – thanks to techniques that make it possible to make sufficiently stable recordings of the same neurons over periods of many days – are finally able to characterize the degree of spatial map ongoing re-modelling.³⁷ It turns out that re-modelling is a complex phenomenon that is not static but depends on multiple factors, both in terms of the character of stimuli in the mapped environment and in terms of species. Thus, for instance, population code re-modelling drift in laboratory rodents is significantly higher in mouse models than in rats. The effect of ongoing recruitment of new cells combined with subsequent stability of their spatial response over whole weeks ensures what in theory can be limitless duration of the space neural representation unless the system collapses for other,

35 — Leutgeb et al., Independent Codes for Spatial and Episodic Memory in Hippocampal Neuronal Ensembles.

36 — L. T. Thompson and P. J. Best, Place Cells and Silent Cells in the Hippocampus of Freely-Behaving Rats, *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 9, No. 7 (July 1989): 2382–90.

37 — Yaniv Ziv et al., Long-Term Dynamics of CA1 Hippocampal Place Codes, *Nature Neuroscience* 16, No. 3 (March 2013): 264–66, <https://doi.org/10.1038/nn.3329>.

i v samotné hipokampové reprezentaci prostoru, která se v distribuci jejího informačního pokrytí nejeví jako jednoduše, ale akcentuje předem dané kvality prostoru i v jeho očištěné laboratorní verzi. Výmluvný důkaz je patrný již z distribuce receptivních zón v obdélníkovém či čtvercovém prostředí. Podél stěn a zejména v rozích je akumulace firing fields mnohem vyšší nežli ve středu arény. Tyto části prostředí, které jsou laboratorními hlodavci (a lze předpokládat, že totéž můžeme vztáhnout i na člověka) vyhodnocovány jako bezpečnější v porovnání se středovými partiemi či obecně otevřeným prostorem, jsou tedy „přereprezentovány“. Neurální mašinerie do jejich mapování tedy vkládá větší kapacitu jak procesní, tak úložnou. Tento fakt vnáší do neurální reprezentace prostoru další známky topologické organizace, kdy uniformní kódování prostoru ustupuje v něm obsaženým významům. Analogické známky inkoherecí v hustotě kódování jsou dále vyjádřeny v souvislosti s objekty či kvalitami, které jsou do prostorové konfigurace umístěny jako součást experimentu. Typicky lze pozorovat, že v blízkosti objektů spojených s odměnou či jiným apetitivním počítkem je prostorové kódování zahuštěnější. Poskytuje tedy výrazně detailnější mapu a s ní spojenou přesnější informaci o poloze subjektu a jeho vztahu k relevantním elementům. Na úrovni hipokampu tento typ informace může reprezentovat jak fyzické místo, v němž se preferovaná kvalita nalézá, a po jejím odstranění mapa po nějakou dobu zůstává nezměněna, tak se může jednat o informaci vázanou na biologicky významný objekt, a po jeho eliminaci se tento prvek z celkové mapy vytratí též. V posledním případě je přesun objektu na jiné místo v mapovaném prostoru následován přesunem související receptivní zóny.

Jedním ze základních přístupů testování topologického charakteru prostorové reprezentace je manipulace se zevními podmínkami, jež zasahuje do geometrie prostředí. Tímto způsobem lze testovat, do jaké míry se hipokampová kognitivní mapa chová topograficky a do jaké topologicky. Klasickým experimentem je změna proporce délky stěn arény, v níž se subjekt pohybuje. V takových případech se vazba buněčné odpovědi na atributy prostředí projikuje do proporční změny velikosti receptivní zóny. Zvětšení prostředí ze čtvercového na obdélníkové protažením pouze dvou protilehlých stěn způsobí proporční zvětšení firing field těch neuronů, které ve své aktivitě reflektují stěnu, jejíž fyzická délka byla změněna³⁹ (OBR. 5). Celková mapa se tedy nemění, jen se plasticky přizpůsobuje vnějším úpravám. Toto chování neurální reprezentace odkazuje k topologickému charakteru mapy spíše než k topografickému.

39 — J. O'Keefe a N. Burgess, Geometric Determinants of the Place Fields of Hippocampal Neurons, *Nature* 381, č. 6581 (30. květen 1996): 425–28, <https://doi.org/10.1038/381425a0>.

Naproti tomu graduální změna (morfining) mezi dvěma vzdálenějšími variantami geometrie prostředí dává komplexnější výsledky. Pokud je subjekt vystaven nezávisle kruhovému a čtvercovému prostředí podobné velikosti a vytvoří si pro ně dvě nezávislé mapy (globální remapování), potom během morfovací sekvence s mezikroky, při kterých je prostředí postupně deformováno (např. z kruhu na čtverec) se

pathological reasons. The second crucial aspect of spatial code mutability over time is that from time to time it is necessary to adjust the code to altered environmental conditions. They can either be abrupt, if a new element jumps in or jumps out of the perceived stimuli constellation, or some change occurs in mutual relations among participating elements whilst their number is unchanged. Depending on the extent of such changes, the shape of the spatial code changes as well: if the changes are small, the code changes may be unobservable whereas more extensive changes may have a dramatic effect of global remapping. Experiments with rotation or translation changes in constellations of orientation traces have shown that individual cognitive map elements can be to various degrees bound to distant or local objects or attributes of the given environment. As a result, the whole map can be re-arranged while neurons closely bound to relevant orientation traces retain the spatial relationship whilst their receptive zones (firing fields) shift according to changes in trace arrangements.³⁸ In the above context, however, it should be noted that the disintegration of neural representation will only occur upon really extensive environmental changes, or at least upon significant changes in orientation cues, because if the changes are just partial, the 'pattern completion' process which tolerates changes and contributes to stability of the representation will come into effect and the environmental changes will be integrated into the existing map in the form of rate remapping or functional recruitment of other neurons into the active population.

38 — James J. Knierim, Dynamic Interactions between Local Surface Cues, Distal Landmarks, and Intrinsic Circuitry in Hippocampal Place Cells, *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 22, No. 14 (15. July 2002): 6254–64, <https://doi.org/20026608>; James J. Knierim and Geeta Rao, Distal Landmarks and Hippocampal Place Cells: Effects of Relative Translation versus Rotation, *Hippocampus* 13, No. 5 (2003): 604–17, <https://doi.org/10.1002/hipo.10092>.

Topological Aspects of Hippocampus Functionality

Clearly, the real world – the world outside of laboratory conditions – is a complex one and far exceeds the purism of artificially created experimental devices. We often conceive of space as an abstract, formalized entity, most commonly in the Euclidian sense, as if it was not 'populated' by objects, meanings, other creatures. Obviously, for the purpose of adaptive behavior considerations, we cannot do without taking also the 'populated space' into account, i.e. a space that is not just an environment with isolated objects but besides them it will also include their meanings and mutual relationships. Furthermore, space being one of episodic memory dimensions, it is, in the figurative sense, a carrier of recollections experienced therein and those should also be included in or associated with the spatial representation. Even if we wanted to extract merely the spatial relationships from the complex neural code, we would find out that a space that is structured even to a minimum extent is not uniform in terms of impact on the observer but on the contrary, the nervous system will a-priori impose a structure of meanings into it. This is persuasively illustrated in

reprezentace zhruba v polovině deformační řady skokovitě prostřídají⁴⁰. Reprezentace pro kruh je nahrazena mapou pro čtverec. Pokud ovšem subjekt obě prostředí kóduje v rámci jedné globální mapy a rozdíly se projikují do frekvenčních změn při zachovaných receptivních zónách (frekvenční remapování), morfovací sekvence se projeví v postupné transformaci frekvenčních změn mezi verzemi mapy pro kruh a čtverec⁴¹ (OBR. 6). Tyto experimenty mají zřejmou paralelu v morfování „mezi hrnkem a vdolkem“ ilustrující kontrast mezi topologickým přístupem (jedna mapa s frekvenčními rozdíly) a objektovým pohledem, kdy hrnek a vdolek mají zcela odlišné praktické významy, mozek je tedy kóduje nezávisle, a jejich morfování je provázáno předpokládaným náhlým skokem mezi souvisejícími reprezentacemi. Je tedy zřejmé, že topologický charakter flexibilního kódování prostoru v případech, kdy je relevantní rozlišovat mezi jeho různými kontexty, ustupuje představám více dedikovaných reprezentací. Analogická tolerance prostorového kódu byla prokázána i u koridorových arén⁴². Tyto experimenty ukázaly, že jednou ustavená reprezentace je flexibilní a tolerantní i vůči rozsáhlým geometrickým změnám angulárního či metrického charakteru, potvrzují její topologický charakter.

Dalšími poznatky odkazujícími na topologickou redukci prostorového kódu plynou z dat z experimentů s prostředími, jejichž konfigurace vykazuje repetitivní podobné prvky. Klasickou prací je experiment porovnávající hipokampové prostorové kódy populací buněk ve dvou propojených vizuálně identických prostředích⁴³. Podstatná část receptivních zón aktivních place cells byla identická v obou prostředích, což svědčí o tendenci k redukci komplexity v kódování propojených prostředí oproti tvorbě zcela nezávislých kódů pro obě části. Další experiment s podobným závěrem porovnával prostorový kód klasické prázdné arény (s kontinuální dvoudimenzionální prostupností) s pozičně identickým prostorem poté, co byl segmentován

40 — Wills et al., Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment; Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network.

41 — Jill K. Leutgeb et al., Progressive Transformation of Hippocampal Neuronal Representations in 'Morphed' Environments, *Neuron* 48, č. 2 (20. říjen 2005): 345–58, <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2005.09.007>; Colgin et al., Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network.

42 — Katalin M. Gothard, William E. Skaggs, a Bruce L. McNaughton, Dynamics of Mismatch Correction in the Hippocampal Ensemble Code for Space: Interaction between Path Integration and Environmental Cues, *Journal of Neuroscience* 16, č. 24 (15. prosinec 1996): 8027–40, <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.16-24-08027.1996>; Yuri Dabaghian, Vicky L Brandt, a Loren M Frank, Reconciling the hippocampal map as a topological template, ed. Howard Eichenbaum, *eLife* 3 (20. srpen 2014): e03476, <https://doi.org/10.7554/eLife.03476>,

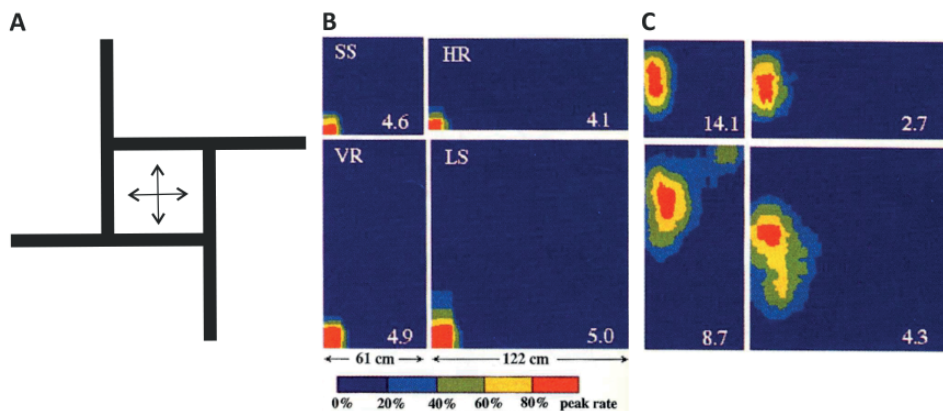
43 — W. E. Skaggs a B. L. McNaughton, Spatial Firing Properties of Hippocampal CA1 Populations in an Environment Containing Two Visually Identical Regions, *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 18, č. 20 (15. říjen 1998): 8455–66.

the actual hippocampal spatial representation which does not appear to be uniform in distribution of its information coverage but it accentuates pre-determined space qualities even in its purified laboratory version. An articulate proof is provided by the receptive zone distribution in rectangular or square environments. Along walls, and in corners in particular, firing fields accumulation is much higher than in the center of the arena. These parts of the environment which the laboratory rodents evaluate as safer than the central parts or any open space in general (and we can assume that the same applies to humans) are accordingly 'over-represented'. Thus, the neural machinery dedicates a larger processing and storage capacity to the mapping thereof. This fact enriches the spatial representation by further signs of topological organization whereby uniform space coding gives space to meanings contained therein. Analogical signs of code density incoherencies are also manifested with respect to objects or qualities that are placed into spatial configuration as part of an experiment. Typical observation is that spatial coding is denser in the proximity of objects associated with reward or another biologically important value. In this way we are provided with a much more detailed map and, consequently, with more precise information on location of the subject and its relationship to relevant elements. At the hippocampus level, this type of information may represent either a physical place at which the preferred quality is located (in which case the map remains unchanged for some time after the quality has been removed), or it can be a piece of information bound to a biologically significant object (in which case this element disappears from the overall map once the object has disappeared). In the latter case, a shift of the object to another place in the mapped space is followed by a shift of the relating receptive zone.

One of the basic approaches in testing out the topological nature of spatial representation is manipulation with external conditions interfering with the environment geometry. In this way we can test to what extent the hippocampal cognitive map behaves topographically and to what extent topologically. A classic experiment consists in changing the mutual proportion of wall lengths in the arena within which the subject is tested. In such cases the link between cell response and changes in environmental attributes is projected into a proportional change in the receptive zone size. Enlargement of the space from square to oblong by prolonging only two opposite walls will cause proportional firing field enlargement in those neurons whose activity reflect the wall whose physical length has been changed³⁹ (FIG. 5). Thus, the overall map does not change but it plastically adjusts to external modifications. This neural representation behavior refers to a topological nature of the map rather than topographical.

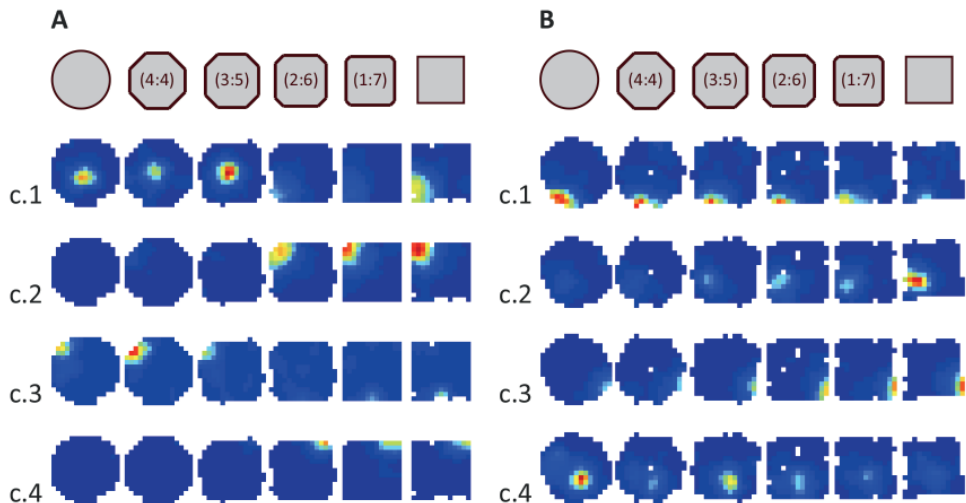
39 — J. O'Keefe and N. Burgess, Geometric Determinants of the Place Fields of Hippocampal Neurons, *Nature* 381, No. 6581 (1996): 425–28, <https://doi.org/10.1038/381425a0>.

On the other hand, a gradual change (morphing) between two more distant space geometry alternatives produces more complex results. If the subject is independently exposed to circular and square-shaped environments of similar sizes and creates two



OBR. 5 Flexibilita hipokampové reprezentace prostoru. A. Schéma experimentální aparatury, umožňující změnu proporce délky jejích stěn. B. Frekvenční mapy dvou pozičních neuronů v odpovědi na manipulaci s délkou stran arény. Původní podoba vlevo nahoře (SS, standard square). HR – horizontal rectangle, VR- vertical rectangle, LS – large square. Upraveno dle O'Keefe, J. & Burgess, N. Geometric determinants of the place fields of hippocampal neurons. *Nature* 381, 425–428 (1996).

FIG. 5 Flexibility of hippocampus space representation. A. Scheme of experimental device that enables changes in wall length proportion. B. Frequency maps of two place-neurons in response to manipulation with arena wall lengths. Original shape top left (SS, standard square). HR – horizontal rectangle, VR – vertical rectangle, LS – large square. Adjusted according to O'Keefe, J. & Burgess, N. Geometric determinants of the place fields of hippocampal neurons. *Nature* 381, 425–428 (1996).



OBR. 6 Dva typy hipokampového remapování a jejich rozdílná odpověď na graduální změnu zevního prostředí. A. Globální remapování, charakterizované dvěma nezávislými reprezentacemi pro kruhovou a čtvercovou variantu arény, které se během morfovací sekvence (zde uprostřed) skokovitě navzájem prostrídají. B. Frekvenční remapování představuje jedinou mapu, jež má variantu pro každé prostředí. Tyto varianty se liší frekvenčními maximy v aktivitě jednotlivých neuronů. Odpověď na morfovací sekvenci je graduální. Záznam z A. a B. pochází od dvou různých subjektů a každý ukazuje aktivitu čtyř pozicních neuronů napříč morfovací sekvencí. Upraveno dle Colgin, L. L. et al. Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network. *J. Neurophysiol.* 104, 35–50 (2010).

FIG. 6 Two types of hippocampus re-mapping and their different responses to a gradual change in the external environment. A. Global re-mapping distinguished by two independent representations for a circle-shaped and square-shaped version of the arena which interchange in a single bounce in the course of the morphing sequence (middle). B. Frequency re-mapping represents a single map that has a different version for each environment. These versions differ by frequency peaks in individual neuron activities. Response to morphing sequence is gradual. A. and B. records come from two different subjects and each shows the activity of four place-neurons throughout the morphing sequence. Adjusted according to Colgin, L. L. et al. Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network. *J. Neurophysiol.* 104, 35–50 (2010).

do kvasi-unidimenzionální verze vložkou ve tvaru dvou do sebe zaklesnutých hřebenovitých přepážek⁴⁴. V takovém případě se experimentální subjekt nemůže ve čtvercovém prostoru pohybovat libovolně, ale je jím nucen procházet jedinou předem danou traverzující trajektorií mezi protilehlými stranami. Tato transformace prostoru má za následek i změnu v jeho reprezentaci, kdy z klasické dvoudimenzionální mapy vzniká reprezentace vytvořeného koridoru (v tomto experimentu pozorovaná v mediální entorhinální kůře). V mapě dochází opakovaně k resetování části prostorového kódu a k jakési recyklaci úseku, který se zdánlivě při průchodem prostředím několikrát opakuje. Opakovanou aplikaci jednoho fragmentu mapy v různých částech arény lze uvažovat jako prvek využití mentálního schématu v analogických situacích.

44 — Dori Derdikman et al., Fragmentation of Grid Cell Maps in a Multicompartment Environment, *Nature Neuroscience* 12, č. 10 (říjen 2009): 1325–32, <https://doi.org/10.1038/nn.2396>.

independent maps for it (global remapping), then, in the course of the morphing sequence with mid-steps in which the environment is gradually deformed e.g. from a circle to a square, both representations will – roughly in the middle of the deformation series – interchange in a step-like manner.⁴⁰ Circle representation will be replaced with a map for square. Should, however, the subject be coding both environments within a single global map where the changes get projected into rate changes while the reception zones are preserved (rate remapping), the morphing sequence will be manifested in gradual transformation of rate changes between square and circle map versions⁴¹ (FIG. 6). There is an obvious parallel between these experiments and the morphing between ‘mug and donut’ that illustrates the contrast between the topological approach (a single map with frequency differences) and the object perspective when the mug and the donut have entirely different practical meanings and, therefore, are coded by the brain independently whilst their morphing is accompanied by a predicted, abrupt ‘jump’ between relating representations. It is, therefore, obvious that topological nature of flexible space coding in cases where it is relevant to distinguish among its various contexts gives way to the concept of multiple dedicated representations. An analogous spatial code tolerance has been demonstrated also in corridor arenas.⁴² These experiments have shown that once established, representations are flexible and tolerant of angular or metric geometrical changes, even extensive ones, thereby confirming their topological character.

Further findings pointing to spatial code topological reduction have been provided by data from experiments with environments whose configurations manifest similar repetitive elements. In a classical experiment, hippocampus spatial codes of cell populations were compared between two interconnected, visually identical environments.⁴³ Substantial part of active place-cell receptive zones was in both environments identical, which reflects the tendency toward reduction of complexity in the coding of interconnected environments as opposed to creation of utterly independent codes for each part. In another experiment which led to a similar conclusion, spatial code of a empty arena (with continual two-dimensional permeability) was compared with an identical space after it has been segmented into quasi-unidimensional version by an inlay in the shape of two hairpin-shaped partitions locked into one

40 — Wills et al., *Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment*; Colgin et al., *Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network*.

41 — Jill K. Leutgeb et al., *Progressive Transformation of Hippocampal Neuronal Representations in ‘Morphed’ Environments*, *Neuron* 48, No. 2 (20. October 2005): 345–58, <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2005.09.007>; Colgin et al., *Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network*.

42 — Katalin M. Gothard, William E. Skaggs, and Bruce L. McNaughton, *Dynamics of Mismatch Correction in the Hippocampal Ensemble Code for Space: Interaction between Path Integration and Environmental Cues*, *Journal of Neuroscience* 16, No. 24 (15. December 1996): 8027–40, <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.16-24-08027.1996>; Yuri Dabaghian, Vicky L Brandt, and Loren M Frank, *Reconceiving the hippocampal map as a topological template*, ed. Howard Eichenbaum, *eLife* 3 (20. August 2014): e03476, <https://doi.org/10.7554/eLife.03476>.

43 — W. E. Skaggs and B. L. McNaughton, *Spatial Firing Properties of Hippocampal CA1 Populations in an Environment Containing Two Visually Identical Regions*, *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 18, No. 20 (15. October 1998): 8455–66.

Závěr

Z výše uvedených poznatků plyne, že hipokampový systém poskytuje přirozenou kostru – skafold pro kódování prostoru a prostorových vztahů. Charakter hipokampové reprezentace prostoru vykazuje zcela zřetelné topologické prvky zabudované do jejích různých úrovní, včetně samotného základu. Na tento fyziologický rámec jsou pak funkčně navázány další informace o kvalitách, objektech či o dalším obsahu mapovaného prostředí. Zajišťuje tak fundament pro reprezentaci vzájemně provázaných vztahů, které jsou strukturovány v rozmanitých dimenzích, a tyto dimenze pak dále provázané a seskupené do hierarchicky vyšších entit. U lidí prostorová reprezentace svojí intuitivností poskytuje obecně srozumitelné schéma, široce používané v organizaci a zpracování i ne-prostorových informací. Idea prostoru díky svým topologickým atributům tak představuje efektivní metaforu, jež usnadňuje provádění jinak obtížně uchopitelných abstraktních mentálních operací a propisuje se touto cestou do našeho obecného chápání okolního i vnitřního světa.

Poděkování

Práce na manuskriptu byla provedena za podpory projektu Národní ústav pro neurologický výzkum – NPO-NEURO-D (Program EXCELES, ID: LX22NPO5107) – Financováno Evropskou unií – Next Generation EU, Cooperatio NEUR a GAČR č. 22-16717S

another.⁴⁴ In that situation, the experimental subject cannot move within the square-space arbitrarily but is forced to follow a single, predetermined traversing trajectory between opposite walls. This space transformation causes a change in its representation: the classical two-dimensional map will change to a representation of the newly created corridor (which, in this specific experiment, was observed in the medial entorhinal cortex). In this map, part of the spatial code gets repeatedly reset and the section which is seemingly repeated several times over as it passes through the environment is, in a way, recycled. Repeated application of one map fragment to different parts of the arena can be regarded as an element of mental scheme utilization in analogous situations.

44 — Dori Derdikman et al., Fragmentation of Grid Cell Maps in a Multicompartment Environment, *Nature Neuroscience* 12, No. 10 (October 2009): 1325–32, <https://doi.org/10.1038/nn.2396>.

Conclusion

The aforesaid findings imply that the hippocampal system provides a natural scaffold for coding of space and spatial relationships. The nature of hippocampal space representation manifests very distinctive topological elements built into its various levels including the base. This physiological framework has further information functionally linked to it concerning qualities, objects or other types of content of the mapped environment. Thus, it constitutes a basis for representation of mutually interconnected relationships that are structured in diverse dimensions, and these are further interlinked and grouped into hierarchically higher entities. In humans, spatial representation – thanks to its intuitive nature – provides a generally comprehensible scheme widely utilized in organizing and processing of non-spatial information. Given its topological attributes, the idea of space represents an effective metaphor that makes it easier to perform abstract mental operations that would otherwise be difficult to grasp, and thereby projects into our general understanding of external and internal worlds.

Acknowledgment

This manuscript has been drafted under the support of the project ‘National Institute for Neurological Research – NPO-NEURO-D (Program EXCELES, ID: LX22NPO5107)’ financed by the European Union – Next Generation EU Cooperatio NEUR and GA CR No. 22-16717S

Literatura

Abeles, M. *Corticomics: Neural Circuits of the Cerebral Cortex*. 1. vyd. Cambridge University Press, 1991. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511574566>.

Akrami, Athena, Yan Liu, Alessandro Treves a Bharathi Jagadeesh. Converging Neuronal Activity in Inferior Temporal Cortex during the Classification of Morphed Stimuli. *Cerebral Cortex* 19, č. 4 (duben 2009): 760–76. <https://doi.org/10.1093/cercor/bhn125>.

Alme, Charlotte B., Chenglin Miao, Karel Jezek, Alessandro Treves, Edvard I. Moser a May-Britt Moser. Place Cells in the Hippocampus: Eleven Maps for Eleven Rooms. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 111, č. 52 (30. prosinec 2014): 18428–35. <https://doi.org/10.1073/pnas.1421056111>.

Amalric, Marie a Stanislas Dehaene. Cortical Circuits for Mathematical Knowledge: Evidence for a Major Subdivision within the Brain's Semantic Networks. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 373, č. 1740 (19. únor 2017): 20160515. <https://doi.org/10.1098/rstb.2016.0515>.

Amaral, D. G. A Golgi Study of Cell Types in the Hilar Region of the Hippocampus in the Rat. *The Journal of Comparative Neurology* 182, č. 4 Pt 2 (15. prosinec 1978): 851–914. <https://doi.org/10.1002/cne.901820508>.

Andersen, Per, ed. *The hippocampus book*. Oxford; New York: Oxford University Press, 2007.

Barry, Caswell, Lin Lin Ginzberg, John O'Keefe a Neil Burgess. Grid cell firing patterns signal environmental novelty by expansion. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 109, č. 43 (23. říjen 2012): 17687–92. <https://doi.org/10.1073/pnas.1209918109>.

Blackstad, T. W. Commissural Connections of the Hippocampal Region in the Rat, with Special Reference to Their Mode of Termination. *The Journal of Comparative Neurology* 105, č. 3 (říjen 1956): 417–537. <https://doi.org/10.1002/cne.901050305>.

Bliss, T. V. a T. Lomo. Long-Lasting Potentiation of Synaptic Transmission in the Dentate Area of the Anaesthetized Rabbit Following Stimulation of the Perforant Path. *The Journal of Physiology* 232, č. 2 (červenec 1973): 331–56. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1973.sp010273>.

Braitenberg, Valentino, a Almut Schutz. *Anatomy of the Cortex: Statistics and Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg, 2013. <https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=5595288>.

References

- Abeles, M. 1991. *Corticonics: Neural Circuits of the Cerebral Cortex* (1st edn.,).
- Akrami, A. et al. 2009. Converging Neuronal Activity in Inferior Temporal Cortex during the Classification of Morphed Stimuli, *Cereb. Cortex* 19, 760–76.
- Alme, C.B. et al. 2014. Place cells in the hippocampus: eleven maps for eleven rooms, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 111, 18428–35.
- Amalric, M. and S. Dehaene 2017. Cortical circuits for mathematical knowledge: evidence for a major subdivision within the brain’s semantic networks, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 373, 20160515.
- Amaral, D.G. 1978. A Golgi study of cell types in the hilar region of the hippocampus in the rat, *J. Comp. Neurol.* 182, 851–914.
- Andersen, P. (ed.) 2007. *The hippocampus book* (Oxford ; New York).
- Barry, C. et al. 2012. Grid cell firing patterns signal environmental novelty by expansion, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 109, 17687–92.
- Blackstad, T.W. 1956. Commissural connections of the hippocampal region in the rat, with special reference to their mode of termination, *J. Comp. Neurol.* 105, 417–537.
- Bliss, T.V. and T. Lomo 1973. Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dentate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path, *J. Physiol.* 232, 331–56.
- Braitenberg, V. and A. Schutz 2013. *Anatomy of the Cortex: Statistics and Geometry*. (Berlin, Heidelberg).
- Catricalà, E. et al. 2020. State-dependent TMS reveals the differential contribution of ATL and IPS to the representation of abstract concepts related to social and quantity knowledge, *Cortex* 123, 30–41.
- Cerasti, E. and A. Treves 2010. How Informative Are Spatial CA3 Representations Established by the Dentate Gyrus?, *PLoS Comput. Biol.* 6, e1000759.

Catricalà, Eleonora, Francesca Conca, Anna Fertonani, Carlo Miniussi a Stefano F. Cappa. State-Dependent TMS Reveals the Differential Contribution of ATL and IPS to the Representation of Abstract Concepts Related to Social and Quantity Knowledge. *Cortex* 123 (únor 2020): 30–41. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2019.09.018>.

Cerasti, Erika a Alessandro Treves. How Informative Are Spatial CA3 Representations Established by the Dentate Gyrus? *PLoS computational biology* 6 (29. duben 2010): e1000759. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000759>.

Colgin, Laura L., Stefan Leutgeb, Karel Jezek, Jill K. Leutgeb, Edvard I. Moser, Bruce L. McNaughton a May-Britt Moser. Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network. *Journal of Neurophysiology* 104, č. 1 (červenec 2010): 35–50. <https://doi.org/10.1152/jn.00202.2010>.

Dabaghian, Yuri, Vicky L Brandt a Loren M Frank. Reconceiving the hippocampal map as a topological template. Editoval Howard Eichenbaum. *eLife* 3 (20. srpen 2014): e03476. <https://doi.org/10.7554/eLife.03476>.

deCharms, R. Christopher a Anthony Zador. Neural Representation and the Cortical Code. *Annual Review of Neuroscience* 23, č. 1 (březen 2000): 613–47. <https://doi.org/10.1146/annurev.neuro.23.1.613>.

Derdikman, Dori, Jonathan R. Whitlock, Albert Tsao, Marianne Fyhn, Torkel Hafting, May-Britt Moser a Edvard I. Moser. Fragmentation of Grid Cell Maps in a Multicompartment Environment. *Nature Neuroscience* 12, č. 10 (říjen 2009): 1325–32. <https://doi.org/10.1038/nn.2396>.

Desai, Rutvik H., Megan Reilly a Wessel van Dam. The Multifaceted Abstract Brain. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 373, č. 1752 (5. srpen 2018): 20170122. <https://doi.org/10.1098/rstb.2017.0122>.

Dias, Brian G a Kerry J Ressler. Parental olfactory experience influences behavior and neural structure in subsequent generations. *Nature neuroscience* 17, č. 1 (leden 2014): 89–96. <https://doi.org/10.1038/nn.3594>.

Eichenbaum, H, C Stewart a Rg Morris. Hippocampal Representation in Place Learning. *The Journal of Neuroscience* 10, č. 11 (1. listopad 1990): 3531–42. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.10-11-03531.1990>.

Fenton, Andre A., Maria Pia Arolfo a Jan Bures. Place Navigation in the Morris Water Maze under Minimum and Redundant Extra-Maze Cue Conditions. *Behavioral and Neural Biology* 62, č. 3 (listopad 1994): 178–89. [https://doi.org/10.1016/S0163-1047\(05\)80016-0](https://doi.org/10.1016/S0163-1047(05)80016-0).

- Colgin, L.L. *et al.* 2010. Attractor-Map Versus Autoassociation Based Attractor Dynamics in the Hippocampal Network, *J. Neurophysiol.* 104, 35–50.
- Dabaghian, Y., V.L. Brandt and L.M. Frank 2014. Reconciving the hippocampal map as a topological template, *eLife* 3, e03476.
- deCharms, R.C. and A. Zador 2000. Neural Representation and the Cortical Code, *Annu. Rev. Neurosci.* 23, 613–47.
- Derdikman, D. *et al.* 2009. Fragmentation of grid cell maps in a multicompartement environment, *Nat. Neurosci.* 12, 1325–32.
- Desai, R.H., M. Reilly and W. van Dam 2018. The multifaceted abstract brain, *Philos. Trans. R. Soc. B Biol. Sci.* 373, 20170122.
- Dias, B.G. and K.J. Ressler 2014. Parental olfactory experience influences behavior and neural structure in subsequent generations, *Nat. Neurosci.* 17, 89–96.
- Eichenbaum, H., C. Stewart and R. Morris 1990. Hippocampal representation in place learning, *J. Neurosci.* 10, 3531–42.
- Fenton, A.A., M.P. Arolfo and J. Bures 1994. Place navigation in the morris water maze under minimum and redundant extra-maze cue conditions, *Behav. Neural Biol.* 62, 178–89.
- Gothard, K.M., W.E. Skaggs and B.L. McNaughton 1996. Dynamics of Mismatch Correction in the Hippocampal Ensemble Code for Space: Interaction between Path Integration and Environmental Cues, *J. Neurosci.* 16, 8027–40.
- Hebb, D.O. 1949. *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory* (New York).
- Jezek, K. *et al.* 2011. Theta-paced flickering between place-cell maps in the hippocampus, *Nature* 478, 246–49.
- Jung, M.W. and B.L. McNaughton 1993. Spatial selectivity of unit activity in the hippocampal granular layer, *Hippocampus* 3, 165–82.
- Kapl, S. *et al.* 2022. Context-independent expression of spatial code in hippocampus, *Sci. Rep.* 12, 20711.

Gothard, Katalin M., William E. Skaggs a Bruce L. McNaughton. Dynamics of Mismatch Correction in the Hippocampal Ensemble Code for Space: Interaction between Path Integration and Environmental Cues. *Journal of Neuroscience* 16, č. 24 (15. prosinec 1996): 8027–40. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.16-24-08027.1996>.

Hebb, D. O. *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory*. New York: Psychology Press, 1949. <https://doi.org/10.4324/9781410612403>.

Jezek, Karel, Espen J. Henriksen, Alessandro Treves, Edvard I. Moser a May-Britt Moser. Theta-Paced Flickering between Place-Cell Maps in the Hippocampus. *Nature* 478, č. 7368 (říjen 2011): 246–49. <https://doi.org/10.1038/nature10439>.

Jung, M. W. a B. L. McNaughton. Spatial Selectivity of Unit Activity in the Hippocampal Granular Layer. *Hippocampus* 3, č. 2 (1993): 165–82. <https://doi.org/10.1002/hipo.450030209>.

Kesner, R. P. Behavioral Functions of the CA3 Subregion of the Hippocampus. *Learning & Memory* 14, č. 11 (14. listopad 2007): 771–81. <https://doi.org/10.1101/lm.688207>.

Kjelstrup, Kirsten Brun, Trygve Solstad, Vegard Heimly Brun, Torkel Hafting, Stefan Leutgeb, Menno P. Witter, Edvard I. Moser a May-Britt Moser. Finite Scale of Spatial Representation in the Hippocampus. *Science* 321, č. 5885 (4. červenec 2008): 140–43. <https://doi.org/10.1126/science.1157086>.

Knierim, James J. Dynamic Interactions between Local Surface Cues, Distal Landmarks, and Intrinsic Circuitry in Hippocampal Place Cells. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 22, č. 14 (15. červenec 2002): 6254–64. <https://doi.org/20026608>.

Knierim, James J. a Geeta Rao. Distal Landmarks and Hippocampal Place Cells: Effects of Relative Translation versus Rotation. *Hippocampus* 13, č. 5 (2003): 604–17. <https://doi.org/10.1002/hipo.10092>.

Leutgeb, Jill K., Stefan Leutgeb, May-Britt Moser, a Edvard I. Moser. Pattern Separation in the Dentate Gyrus and CA3 of the Hippocampus. *Science (New York, N.Y.)* 315, č. 5814 (16. únor 2007): 961–66. <https://doi.org/10.1126/science.1135801>.

Leutgeb, Jill K., Stefan Leutgeb, Alessandro Treves, Retsina Meyer, Carol A. Barnes, Bruce L. McNaughton, May-Britt Moser a Edvard I. Moser. Progressive Transformation of Hippocampal Neuronal Representations in ‘Morphed’ Environments. *Neuron* 48, č. 2 (20. říjen 2005): 345–58. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2005.09.007>.

Leutgeb, Stefan, Jill K. Leutgeb, Carol A. Barnes, Edvard I. Moser, Bruce L. McNaughton a May-Britt Moser. Independent Codes for Spatial and Episodic Memory in Hippocampal Neuronal Ensembles. *Science* 309, č. 5734 (22. červenec 2005): 619–23. <https://doi.org/10.1126/science.1114037>.

- Kesner, R.P. 2007. Behavioral functions of the CA3 subregion of the hippocampus, *Learn. Mem.* 14, 771–81.
- Kjelstrup, K.B. et al. 2008. Finite Scale of Spatial Representation in the Hippocampus, *Science* 321, 140–43.
- Knierim, J. J. 2002. Dynamic interactions between local surface cues, distal landmarks, and intrinsic circuitry in hippocampal place cells, *J. Neurosci. Off. J. Soc. Neurosci.* 22, 6254–64.
- Knierim, J.J. and G. Rao 2003. Distal landmarks and hippocampal place cells: effects of relative translation versus rotation, *Hippocampus* 13, 604–17.
- Leutgeb, J.K. et al. 2005a. Progressive Transformation of Hippocampal Neuronal Representations in ‘Morphed’ Environments, *Neuron* 48, 345–58.
- Leutgeb, J.K. et al. 2007. Pattern separation in the dentate gyrus and CA3 of the hippocampus, *Science* 315, 961–66.
- Leutgeb, S. et al. 2005 b. Independent Codes for Spatial and Episodic Memory in Hippocampal Neuronal Ensembles, *Science* 309, 619–23.
- Lomo, T. 1966. Frequency potentiation of excitatory synaptic activity in the dentate area of the hippocampal formation., *Acta Physiol. Scand.* 1966 (suppl. 277), 128.
- Markram, H. et al. 1997. Regulation of Synaptic Efficacy by Coincidence of Postsynaptic APs and EPSPs, *Science* 275, 213–15.
- Marr, D. 1969. A theory of cerebellar cortex, *J. Physiol.* 202, 437–70.
- Marr, D. 1971. Simple memory: a theory for archicortex, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 262, 23–81.
- Moser, E. et al. 2014. Grid cells and cortical representation, *Nat. Rev. Neurosci.* 15.
- Muller, R.U. and J.L. Kubie 1987. The effects of changes in the environment on the spatial firing of hippocampal complex-spike cells, *J. Neurosci.* 7, 1951–68.

Lomo, Terje. Frequency potentiation of excitatory synaptic activity in the dentate area of the hippocampal formation. *Acta physiologica scandinavica*, suppl. 277, 1966, č. 68 (1966): 128.

Markram, Henry, Joachim Lübke, Michael Frotscher a Bert Sakmann. Regulation of Synaptic Efficacy by Coincidence of Postsynaptic APs and EPSPs. *Science* 275, č. 5297 (10. leden 1997): 213–15. <https://doi.org/10.1126/science.275.5297.213>.

Marr, D. Simple Memory: A Theory for Archicortex. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 262, č. 841 (1. červenec 1971): 23–81. <https://doi.org/10.1098/rstb.1971.0078>.

Marr, David. A Theory of Cerebellar Cortex. *The Journal of Physiology* 202, č. 2 (1. červen 1969): 437–70. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1969.sp008820>.

Moser, Edvard, Yasser Roudi, Menno Witter, Clifford Kentros, Tobias Bonhoeffer, a May-Britt Moser. Grid cells and cortical representation. *Nature reviews. Neuroscience* 15 (11. červen 2014). <https://doi.org/10.1038/nrn3766>.

Muller, R. U. a J. L. Kubie. The Effects of Changes in the Environment on the Spatial Firing of Hippocampal Complex-Spike Cells. *Journal of Neuroscience* 7, č. 7 (1. červenec 1987): 1951–68. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.07-07-01951.1987>.

O'Keefe, J., a N. Burgess. Geometric Determinants of the Place Fields of Hippocampal Neurons. *Nature* 381, č. 6581 (30. květen 1996): 425–28. <https://doi.org/10.1038/381425a0>.

O'Keefe, J. a J. Dostrovsky. The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat. *Brain Research* 34 (1971): 171–75. [https://doi.org/10.1016/0006-8993\(71\)90358-1](https://doi.org/10.1016/0006-8993(71)90358-1).

O'Keefe, John a Lynn Nadel. *The hippocampus as a cognitive map*. Oxford: New York: Clarendon Press; Oxford University Press, 1978.

Park, EunHye, Dino Dvorak a André A. Fenton. Ensemble Place Codes in Hippocampus: CA1, CA3, and Dentate Gyrus Place Cells Have Multiple Place Fields in Large Environments. *PLOS ONE* 6, č. 7 (7 2011): e22349. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0022349>.

Piatti, Verónica, Laura Ewell a Jill Leutgeb. Piatti VC, Ewell LA, Leutgeb JK. Neurogenesis in the dentate gyrus: carrying the message or dictating the tone. *Front Neurosci* 7: 50. *Frontiers in neuroscience* 7 (4. duben 2013): 50. <https://doi.org/10.3389/fnins.2013.00050>.

Rolls, Edmund T. The mechanisms for pattern completion and pattern separation in the hippocampus. *Frontiers in Systems Neuroscience* 7 (2013). <https://doi.org/10.3389/fnsys.2013.00074>.

- O'Keefe, J. and N. Burgess 1996. Geometric determinants of the place fields of hippocampal neurons, *Nature* 381, 425–28.
- O'Keefe, J. and J. Dostrovsky 1971. The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat, *Brain Res.* 34 (Netherlands), 171–75.
- O'Keefe, J. and L. Nadel 1978. *The hippocampus as a cognitive map* (Oxford: New York).
- Park, E., D. Dvorak and A.A. Fenton 2011. Ensemble Place Codes in Hippocampus: CA1, CA3, and Dentate Gyrus Place Cells Have Multiple Place Fields in Large Environments, *PLOS ONE* 6, e22349.
- Piatti, V., L. Ewell and J. Leutgeb 2013. Piatti VC, Ewell LA, Leutgeb JK. Neurogenesis in the dentate gyrus: carrying the message or dictating the tone. *Front Neurosci* 7: 50, *Front. Neurosci.* 7, 50.
- Rolls, E.T. 2013. The mechanisms for pattern completion and pattern separation in the hippocampus, *Front. Syst. Neurosci.* 7.
- Rotshtein, P. et al. 2005. Morphing Marilyn into Maggie dissociates physical and identity face representations in the brain, *Nat. Neurosci.* 8, 107–13.
- Skaggs, W.E. and B.L. McNaughton 1998. Spatial firing properties of hippocampal CA1 populations in an environment containing two visually identical regions, *J. Neurosci. Off. J. Soc. Neurosci.* 18, 8455–66.
- Thompson, L.T. and P. J. Best 1989. Place cells and silent cells in the hippocampus of freely-behaving rats, *J. Neurosci. Off. J. Soc. Neurosci.* 9, 2382–90.
- Thomson, E. and G. Piccinini 2018. Neural Representations Observed, *Minds Mach.* 28, 191–235.
- Tolman, E.C. 1948. Cognitive maps in rats and men, *Psychol. Rev.* 55 (US), 189–208.
- Treves, A. and E.T. Rolls 1992. Computational constraints suggest the need for two distinct input systems to the hippocampal CA3 network, *Hippocampus* 2, 189–99.
- Vigliocco, G. et al. 2014. The Neural Representation of Abstract Words: The Role of Emotion, *Cereb. Cortex* 24, 1767–77.

- Rotshtein, Pia, Richard N A Henson, Alessandro Treves, Jon Driver a Raymond J Dolan. Morphing Marilyn into Maggie Dissociates Physical and Identity Face Representations in the Brain. *Nature Neuroscience* 8, č. 1 (leden 2005): 107–13. <https://doi.org/10.1038/nn1370>.
- Skaggs, W. E. a B. L. McNaughton. Spatial Firing Properties of Hippocampal CA1 Populations in an Environment Containing Two Visually Identical Regions. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 18, č. 20 (15. říjen 1998): 8455–66.
- Thompson, L. T. a P. J. Best. Place Cells and Silent Cells in the Hippocampus of Freely-Behaving Rats. *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience* 9, č. 7 (červenec 1989): 2382–90.
- Thomson, Eric a Gualtiero Piccinini. Neural Representations Observed. *Minds and Machines* 28, č. 1 (březen 2018): 191–235. <https://doi.org/10.1007/s11023-018-9459-4>.
- Tolman, Edward C. Cognitive maps in rats and men. *Psychological Review* 55, č. 4 (1948): 189–208. <https://doi.org/10.1037/h0061626>.
- Treves, Alessandro a Edmund T. Rolls. Computational Constraints Suggest the Need for Two Distinct Input Systems to the Hippocampal CA3 Network. *Hippocampus* 2, č. 2 (2. duben 1992): 189–99. <https://doi.org/10.1002/hipo.450020209>.
- Vigliocco, Gabriella, Stavroula-Thaleia Kousta, Pasquale Anthony Della Rosa, David P. Vinson, Marco Tettamanti, Joseph T. Devlin a Stefano F. Cappa. The Neural Representation of Abstract Words: The Role of Emotion. *Cerebral Cortex* 24, č. 7 (červenec 2014): 1767–77. <https://doi.org/10.1093/cercor/bht025>.
- Wills, Tom J., Colin Lever, Francesca Cacucci, Neil Burgess a John O'Keefe. Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment. *Science* 308, č. 5723 (6. květen 2005): 873–76. <https://doi.org/10.1126/science.1108905>.
- Zahn, R., J. Moll, F. Krueger, E. D. Huey, G. Garrido a J. Grafman. Social Concepts Are Represented in the Superior Anterior Temporal Cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104, č. 15 (10. duben 2007): 6430–35. <https://doi.org/10.1073/pnas.0607061104>.
- Zitricky, Frantisek a Karel Jezek. Retrieval of Spatial Representation on Network Level in Hippocampal CA3 Accompanied by Overexpression and Mixture of Stored Network Patterns. *Scientific Reports* 9, č. 1 (prosinec 2019): 11512. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-47842-w>.
- Ziv, Yaniv, Laurie D. Burns, Eric D. Cocker, Elizabeth O. Hamel, Kunal K. Ghosh, Lacey J. Kitch, Abbas El Gamal a Mark J. Schnitzer. Long-Term Dynamics of CA1 Hippocampal Place Codes. *Nature Neuroscience* 16, č. 3 (březen 2013): 264–66. <https://doi.org/10.1038/nn.3329>.

Wills, T.J. et al. 2005. Attractor Dynamics in the Hippocampal Representation of the Local Environment, *Science* 308, 873–76.

Zahn, R. et al. 2007. Social concepts are represented in the superior anterior temporal cortex, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 104, 6430–35.

Zitricky, F. and K. Jezek 2019. Retrieval of spatial representation on network level in hippocampal CA3 accompanied by overexpression and mixture of stored network patterns, *Sci. Rep.* 9, 11512.

Ziv, Y. et al. 2013. Long-term dynamics of CA1 hippocampal place codes *Nat. Neurosci.* 16, 264–66.

Prostor a čas v architektuře a díle Magdaleny Jetelové

Michael A. Arbib

Space and Time in Architecture and the Works of Magdalena Jetelová

Michael A. Arbib

Abstrakt

Článek vychází z konceptů kognitivních věd a v menší míře i neurovědy, které přispívají k pochopení architektonického návrhu a architektonického zážitku. Mezi tyto koncepty patří afordance, atmosféra a topologická představa grafu světa, který zachycuje prvky kognitivní mapy prostřednictvím uzlů vyjadřujících významná místa a hran ztělesňujících přímé cesty mezi nimi. Úvahy o vztahu mezi hledáním cesty v prostoru a v čase se opírají o studium funkce hipokampu. Článek některé myšlenky zpochybňuje a zároveň obohacuje konfrontací architektury s uměním Magdaleny Jetelové, přičemž poetiku prostoru a času vnímá z hlediska různého pojetí času: čas sdílené historie, čas autobiografických vzpomínek, čas tvorby uměleckého díla či stavby umělcem nebo architektem a čas prožívání a chování každého jednotlivce ve vztahu k tomuto konstruktu – a v případě performativního umění také čas, jak jej v každém představení prožívají účinkující. Téma doplňuje osm případových studií, z nichž pět se zaměřuje na tvorbu Magdaleny Jetelové, dvě na architekturu Liny Bo Bardi a Jørna Utzona a jedna na choreografii Anny Smith, která klade důraz na souhru prostoru a času, včetně akce a interakce tanečníků.

Abstract

The article recalls concepts from cognitive science, and to a lesser extent neuroscience, that contribute to understanding the experience and design of architecture. These concepts include affordances, atmosphere, and the topological notion of a world graph that captures elements of a cognitive map through nodes for significant places and edges for direct paths between them. A study of hippocampus supports reflection on the relation between wayfinding in space and in time. The present paper challenges and enriches these ideas by confronting the architecture with the art of Magdalena Jetelová, while beginning to develop one approach to a poetics of space and time where the notions of time are diverse: the time of shared history, the time of autobiographical memory, the time of the artist or architect's creation of an artwork or building, and the time of the experience and behavior of each individual in relation to that construct – and in performance art we have also time as experienced in each performance by the performers. The discussion is enriched by eight case studies, five focused on Magdalena Jetelová's work, two on the architecture of Lina Bo Bardi and Jørn Utzon, and one on the choreography developed by Anna Smith that emphasizes the interplay of space and time that includes the actions and interactions of her dancers.

Předmluva a poděkování

Pro uvedení do souvislostí uvádím, že v listopadu 2021 jsem měl to potěšení strávit dva týdny v České republice na pozvání Tomáše Vlčka jako hostující odborník v rámci Fulbrightova programu. 4. listopadu jsme společně s Tomášem a Jaroslavem Nešetřilem navštívili Liberec, kde měl Tomáš možnost setkat se s Magdalenou Jetelovou a projednat s ní plány připravované výstavy jejího díla, jejímž byl kurátorem a která se měla konat v sále bývalých lázní Oblastní galerie v Liberci. Během návštěvy jsme poobědvali s Magdalenou Jetelovou na pozvání Osamu Okamury, děkana Fakulty umění a architektury Technické univerzity v Liberci; zde jsem měl krátkou příležitost vyměnit si s ní své názory.

Následně mě Tomáš s Jarikem požádali o přednášku pod titulem ‘Atmosphere and Affordances: Mental Situatedness and Creativity’ / Atmosféra a afordance: Mentální situovanost a kreativita / na mezioborové vědecké konferenci *Topologie a poetika prostoru*, která se konala v květnu 2022 v Liberci a v Praze v souvislosti s libereckou výstavou *Proměny místa a prostoru*. Název přednášky zvolili tak, abych se mohl vrátit k tématům, o kterých jsme v Česku diskutovali v roce 2021; já sám jsem se ale rozhodl přijmout novou výzvu a konfrontovat tato témata s pokusem o lepší pochopení životního díla M. Jetelové. Tento článek přináší aktualizovaný obsah dané přednášky. Zahrnuje rozšířené pojednání na téma „Atmosféra a afordance“, vynechává však krátký rozbor týkající se mentální situovanosti a vývoje lidské tvořivosti, protože jsem dospěl k závěru, že jejich podrobné pojednání by zabralo příliš mnoho stran.

V tomto článku podrobněji popisují dílo Magdaleny Jetelové a pokusím se prozkoumat, jakým způsobem může souviset s mým vlastním dílem. V předchozím návrhu tohoto článku jsem napsal, že jsem „na vlastní oči viděl pouze malý vzorek díla Magdaleny Jetelové, a to v Muzeu hlavního města Prahy“; poté jsem si však přečetl informaci Ellen King (2000), že „o díle Jetelové se poprvé dozvěděla na výstavě Documenta 8 v německém Kasselu v roce 1987, kde Jetelová představila masivní konstrukci složenou z dřevěných sloupů a překladů pod názvem *Determination’s Other Side / Druhá strana determinace* /.“ Tehdy jsem si uvědomil, že jsem dílo Jetelové viděl už dříve – na exkurzi během sympozia na téma ‘Visuomotor Coordination: Amphibians, Comparisons, Models, and Robots’ / Vizuomotorická koordinace: Obojživelníci, srovnání, modely a roboti /, které jsme uspořádali spolu s mým kolegou z Kasselu Peterem Ewertem (Ewert & Arbib, 1989); nezapamatoval jsem si však jméno sochařky, a tudíž jsem si do té doby nespojil starou vzpomínku s novými zážitky – což je pozoruhodný příklad toho, jak může rekonstrukce starých vzpomínek v nových souvislostech přetvářet naše chápání minulosti.

Prostudoval jsem katalog liberecké výstavy i pojednání o díle Jetelové na internetu a postupně jsem začal chápat, jakým způsobem by konverzace s jejím dílem a architekturou mohla navázat na myšlenky popsané v mé knize *When Brains Meet Buildings: A Conversation Between Neuroscience and Architecture / Když se mozek*

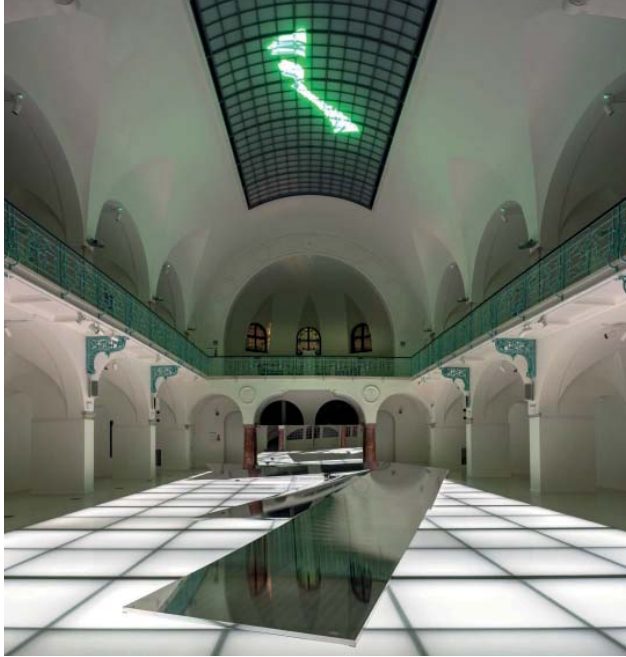
Preamble and Acknowledgements

By way of background: I had the pleasure of spending two weeks in the Czech Republic in November of 2021 as a Fulbright Visiting Expert at the of invitation of Tomáš Vlček. On November 4th, Tomáš, Jaroslav Nešetřil and I visited Liberec so that Tomáš could meet with Magdalena Jetelová to discuss plans for a forthcoming exhibition of her work he would curate, to be held in the Hall of the Former Swimming Pool in the Regional Gallery in Liberec, Czech Republic. During the visit we had lunch as guests of Osamu Okamura, Dean of Arts and Architecture at the Technical University of Liberec, and there I had the opportunity to share ideas, briefly, with Magdalena Jetelová.

Subsequently, Tomáš and Jarik invited me to give a talk entitled ‘Atmosphere and Affordances: Mental Situatedness and Creativity’ at the Interdisciplinary Research Conference on *Topology and Poetics of Space* held in Liberec and Prague in May 2022 in conjunction with the Liberec exhibition *Transformations of place and space*. They chose the title of the talk to allow me to revisit themes I had discussed in Czechia in 2021, but I decided to take on a new challenge by confronting those themes with an attempt to get a feeling for Jetelová’s oeuvre. This paper provides an updated account of that talk. It includes an extended discussion of ‘Atmosphere and Affordances’, but omits the talk’s brief discussion of mental situatedness and the evolution of human creativity since I decided that it would take too many pages to discuss them properly.

The present paper extends my understanding of Magdalena Jetelová’s work and seeks to explore ways in which it may relate to my own. In the previous draft of this paper, I wrote that ‘I have only seen first hand a small sample of Magdalena Jetelová’s work, at the City Museum of Prague’, but have since read Ellen King’s (2000) statement that ‘[she] first became aware of Jetelová’s work at the 1987 Documenta 8, in Kassel, Germany, at which she presented *Determination’s Other Side*, a massive construction composed of post and lintel wooden components’. I recognized then that I had seen Jetelová’s work before – on an excursion during a Symposium on ‘Visuomotor Coordination: Amphibians, Comparisons, Models, and Robots’ co-organized with my Kassel colleague Peter Ewert (Ewert & Arbib, 1989) but had not memorized the name of the sculptor, and thus had not hitherto connected the old memory and the new experiences – a striking example of the way in which reconstructing old memories in new contexts can reshape one’s understanding of the past.

I studied both the catalogue of the Liberec exhibition and the discussion of Jetelová’s work on the Internet to begin to understand how the conversation with her work and architecture might build on ideas in my book *When Brains Meet Buildings: A Conversation Between Neuroscience and Architecture* (Arbib, 2021). More importantly, since the previous draft was written, Jetelová has sent me further materials concerning her work, commented on that draft, and engaged in an extended Skype discussion. Some of that personal communication is paraphrased below, with the notation ‘Jetelová (pc)’.



OBR. 1 Sál bývalého bazénu Oblastní galerie v Liberci upravený pro výstavu Magdaleny Jetelové *Proměny místa a prostoru*, jejímž kurátorem byl Tomáš Vlček.

FIG. 1 The Hall of the Former Swimming Pool in the Regional Gallery in Liberec configured for Magdalena Jetelová's exhibition *Transformations of place and space*, curated by Tomáš Vlček.

setkává s budovami: Konverzace mezi neurovědou a architekturou / (Arbib, 2021). Další důležitou skutečností je, že od napsání předchozího návrhu článku mi M. Jetelová zaslala další materiály týkající se její práce, vyjádřila se k mému návrhu, a dokonce jsme vedli dlouhý rozhovor přes Skype. Část této osobní komunikace parafrázuji níže s odkazem na osobní rozhovor „Jetelová (pc)“.

Chceme-li rozšířit dialog mezi neurovědou a architekturou (která je zde vnímána ve vztahu k budovám z hlediska jejich návrhu a následného zážitku) a lépe pochopit dílo Magdaleny Jetelové, musíme se zamyslet nad tím, jakým způsobem se liší návrh budovy od návrhu sochy. Po budově se pohybujeme a využíváme ji různými způsoby. Architekt musí navrhnout budovu tak, aby obsahovala místa, která budou splňovat praktické i estetické potřeby potenciálních budoucích uživatelů – prostředí, které bude podporovat dokonce i zkoumání a smysl pro hru. Architekt neustále putuje mezi fyzickým místem stavby a programovými potřebami, které budou budovu utvářet – situovaností v geografickém prostoru a v prostoru praktického vnímání zaměřeného na akci, stejně jako pocitů. Magdalena Jetelová je sochařka a konceptuální umělkyně; zabývá se ale také landartem, takže velká část její tvorby se potkává se situací architekta, který se zajímá o fyzické místo stavby. Jetelová (pc) chce smazat rozdíl mezi architekturou a svým dílem¹, protože mnohé její instalace jsou navrženy tak, aby se v nich člověk v rámci svého zážitku pohyboval. Klíčovým rozdílem je tedy, zdá se, skutečnost, že budovy mají podporovat praktické činnosti tím, že například ložnice, kuchyně a koupelny v domě nebo bytě uspokojují základní lidské potřeby, zatímco sochy nikoli.

1 — Podrobně řečeno, Jetelová (pc) chce smazat rozdíl mezi tzv. „dobrou“ architekturou a její prací, a zároveň odmítá srovnání s většinou staveb, které běžně působí jako „katastrofa“ a které „zaneřádily“ naše města. Já však do svého pojednání o zastavěném prostředí zahrnuji i tzv. „špatnou“ architekturu, částečně proto, abychom mohli (na jiném místě) diskutovat o tom, jak můžeme budovy zlepšit, aby lépe podporovaly blaho lidstva a ekosféry.

Zásadní otázkou tohoto článku není vytyčení hranic, ale spíše zamyšlení nad tím, co lze vyvodit z rozhovoru mezi myšlenkami knihy *When Brains Meet Buildings* a dílem Jetelové.

To extend my conversation between neuroscience and architecture (considered here as related to buildings as they are designed and experienced) to a rapprochement with the work of Magdalena Jetelová, we must consider some of the ways in which the design of a building differs from the design of a sculpture. We move around a building and use it in diverse ways. The architect must design a building with places that could meet the needs, both practical and aesthetic, of potential future users of that building – an environment that even supports exploration and a sense of play. The architect goes back and forth between the physical site and programmatic needs that will shape a building – a situatedness in geographical space and in the space of practical action-oriented perception, as well as feelings. Magdalena Jetelová is a sculptor and a conceptual artist – but she is also a land artist, so much of her work meets the architect in its concern with a physical site. Indeed, Jetelová (pc) wants to blur the distinction between architecture and her work¹ since many of her installations are designed to be moved through as they are experienced. The key distinction, then, seems to be that buildings are to be used to support practical actions in the way that, for example, basic human needs are met by the bedrooms, kitchens and bathrooms of a house or apartment, whereas sculptures are not.

The crucial issue for this paper is not to draw boundaries, but rather to see what can be learned from the conversation between the ideas of *When Brains Meet Buildings* and the works of Jetelová.

¹ — More fully, Jetelová (pc) wants to blur the distinction between 'good' architecture and her work while rejecting comparison with the 'common disaster' of most buildings that clutter our cities. However, I include 'bad' architecture in my discussion of the built environment, in part so that one can (elsewhere) discuss how buildings can be improved to better support the well-being of humans and the ecosphere.

Úvod

Název konference *Topologie a poetika prostoru* a název výstavy *Proměny místa a prostoru* kladou důraz na prostor, ale v tomto článku se budeme postupně zabývat různými způsoby vnímání a pojmání času. Nejprve se však zamysleme nad tím, co píše Gaston Bachelard ve své knize *Poetika prostoru / The poetics of space /: ...vztah nového básnického obrazu k archetypu dřímajícímu v hlubinách nevědomí... není... vztahem kauzálním... Básnický obraz nepodléhá vnitřnímu tahu. Není ozvěnou minulosti. Naopak: skrze brilantnost obrazu se rozeznívá ozvěnou vzdálená minulost... (Bachelard, 1958, s. xvi).*

Bohužel se s tímto názorem neztotožňuji, možná proto, že se snažím porozumět spíše kognitivním procesům než básnickému vyjádření a pojem „archetyp“ mi nepřipadá užitečný.² Na jiném místě (Arbib, 2019) stručně uvádím, v jakém smyslu můžeme zasvěceně metaforicky hovořit o „poetice architektonické formy“, když rozehráme kontrast mezi významem a zvukem básně s funkcí a formou budovy. Básník se nám snaží sdělit, „o čem básně je“ – ale dělá ještě mnohem víc výběrem slov, jejichž zvuk a forma vytištěná na stránce obohacují „základní“ význam o emocionální přesah, který by jiné kombinace jiných slov na stejné téma postrádaly. Stejně tak architekt při navrhování budovy překračuje rámec uspokojování praktických potřeb; pro umělce však může taková základní funkčnost hrát jen malou roli, pokud vůbec nějakou roli hraje. Umělec nabízí spíše určité poselství, stejně jako básník, a také otevřenost, díky níž pozorovatel může objevit nové významy, z nichž některé umělec zamýšlel, jiné ne – jedná se o odhalování poselství a jeho variací v čase.

Ačkoli pojem „archetyp“ neshledávám užitečným, ani se nedomnívám, že „skrze brilantnost obrazu se rozeznívá ozvěnou vzdálená minulost“, zajímají mne obrazy, které napadají umělce nebo architekta, a jejich vliv, vědomý, či často nevědomý, na představivost (Zumthor, 2012) a související mechanismy fungování mozku (Arbib, 2021, kapitola 10). Obrazy, které nás napadají, mohou být ozvěnou minulých zkušeností a zážitků, ale představivost umělce nebo architekta vytváří syntézu, která umožňuje nové vyjádření, jež může být zdrojem budoucích obrazů. Jen výjimečně tyto nové obrazy přetvářejí nebo oživují naše obrazy ze vzdálené minulosti – ale ano, poeticky to můžeme vyjádřit tak, že minulost zní ozvěnou v tomto novém obrazu. Zde se skutečně zabýváme jak minulostí v celé její aktuálnosti, kterou nikdy nemůžeme poznat, tak příběhy, dějinami a vzpomínkami, jejichž hybná síla a pohyb vpřed neustále přetvářejí to, co o této minulosti víme.

2 — Ačkoli odmítám jungovské pojetí archetypů zakotvených v lidském vědomí, připouštím jeho použití v případové studii č. 1 ve vztahu k obrazu (pyramidě), který je v určitých kulturách mezi lidmi značně rozšířen – jedná se o historický spíše než biologický koncept. Bachelardova trajektorie vedla od filozofie vědy k poetice, takže mou trajektorii lze považovat za dralehcabovskou (pozpátku Bachelard, pozn. překl.).

Introduction

The conference title *Topology and Poetics of Space* and that of the exhibition *Transformations of place and space* place the emphasis on space, but as the paper progresses, we will bring in the consideration of multiple perspectives on time. But first, consider what Gaston Bachelard writes in his book *The poetics of space*: ... the relation of a new poetic image to an archetype lying dormant in the depths of the unconscious, ... is not ...a causal one. ... The poetic image is not subject to an inner thrust. It is not an echo of the past. On the contrary: through the brilliance of an image, the distant past resounds with echoes ... (Bachelard, 1958, p. xvi).

Alas, this perspective does not resound with me, perhaps because I seek an understanding of cognitive processes rather than poetic expression and do not find the notion of ‘archetype’ helpful.² Elsewhere (Arbib, 2019), I briefly suggest a sense in which one may insightfully speak metaphorically of ‘the poetry of architectural form’ by playing off the counterpoint between the meaning and the sound of a poem with the function and form of a building. The poet seeks to convey ‘what the poem is about’ – but does much more by choosing words whose sound and whose form on the printed page enrich the ‘basic’ meaning with an emotional overlay that other combinations of other words about the same theme would lack. In the same way, the architect goes beyond satisfying practical needs in designing a building, but for the artist such basic functionality may play little if any role. Rather, the artist may offer a message, as may the poet, and also an openness to the observer’s discovery of new meanings, some intended by the artist, some not – an unfolding of the message and its variations in time.

2 — While I reject the Jungian notion of archetypes embedded in human consciousness, I accept its use in Case Study 1 for an image (the pyramid) widely held by humans in certain cultures – a historical rather than a biological concept. Bachelard’s trajectory was from philosophy of science to the poetic, so my trajectory may be seen as Dralhecabian.

Though I do not find the notion of ‘archetype’ useful, nor consider that ‘through the brilliance of an image, the distant past resounds with echoes’, I have been concerned with the images that come to mind for the artist or architect, and how they may inform the imagination (Zumthor, 2012), sometimes consciously, often non-consciously, and studied the brain mechanisms involved (Arbib, 2021, Chapter 10). The images that come to mind may each be an echo of past experience, but the imagination of the artist or architect forms a synthesis that provides a new expression that may be the source of future images. Only rarely will these new images reshape or revitalize our images of the distant past – but yes, then it is poetic to say that the past resounds with echoes of this new image. Here we are indeed concerned with both the past in all its actuality that we can never know, and the stories and histories and memories whose forward momentum keeps reshaping what it is that we understand of that past.

Klíčovým tématem mé práce je vnímání a představivost jako výsledky *mentální* konstrukce, které pro architekta vrcholí určením toho, co je potřeba udělat v procesu *fyzické výstavby* budovy. Vnímání, ať už praktické nebo kontemplativní, může určovat naše chování a také ukládat vzpomínky na události, které utvářejí náš život. Protože vnímání lze interpretovat jako akt mentální konstrukce, lze vzpomínky chápat jako rekonstrukce (s různou přesností) těchto konstrukcí – jsou to v jistém smyslu také konstrukty. Když se nám tedy vybaví různé vzpomínky, naše představivost může tyto konstrukty rozebrat, přetvořit a znovu složit novým způsobem, což vede k novým nápadům, které mohou ovlivnit rodící se návrh.³

3 — Podrobnosti této analýzy nás dovedou k tzv. teorii schémat, jejímž cílem je propojit jednání, vnímání a představivost způsobem, který lze zkoumat na kognitivní úrovni, a přesto může být, alespoň v některých případech, spojen s analýzou nervových mechanismů v lidském i jiném mozku (Arbib, 2021, kapitoly 2 a 3). V tomto článku se však zaměřuji jiným směrem.

Případová studie č. 1. Magdalena Jetelová a její Domestikace pyramid

Cyril Foiret (2015) při popisu výstavy Magdaleny Jetelové „Domestikace pyramid“ / Domestication of Pyramids / píše: „Propojení východního archetypálního monumetu – pyramidy – a její absolutní geometrie s ‚humanizovanou‘ západní architekturou... vyvolává otázky týkající se povahy naší kultury, kdy se naše stabilní souřadnice, které nás ukotvují ve světě, stávají relativními.“

Jetelové „pyramida“ je však pouhá iluze – je nám ukázáno něco, co by *mohlo* být protnutím pyramidy s interiérem muzea. To, co vidíme, je fragment *pomyslného* celku, který pokračuje za hranice muzea a který můžeme mentálně rekonstruovat jako pyramidu. To zapadá do našeho obecného tématu vnímání jako mentální konstrukce. Jde tedy o to, jaké asociace může umělec předpokládat při vytváření situace, která má poskytnout určité zamýšlené zážitky. Kontrapunktem, který dílo obohacuje, jsou vlastní nečekané vzpomínky diváka, které zážitek rozšíří, nebo dokonce změní. Tento kontrapunkt odpovídá rozdílu mezi budovou nebo městským prostředím, které nabízí jasné vodítko k nalezení cesty, a prostředím (jako jsou Benátky), které umožňuje nalézt potěšení ve zkoumání nebo záměrném „ztracení cesty“ (Arbib, 2021, kapitola 6; Mollerup, 2013).

A crucial theme in my work has been that perception and imagination are acts of *mental* construction that for the architect culminate in specifying what is to be done in the process of *physical construction* of a building. Perception, whether practical or contemplative, can guide behavior and also lay down memories of the episodes that shape our lives. Since perception can be interpreted as an act of mental construction, memories can be understood as reconstructions (of varying accuracy) of constructions – they are in some sense constructs too. Thus, when diverse memories come to mind, our imagination can disassemble various constructs and transform and reassemble them in new ways to yield new ideas that may influence the emerging design.³

3 — The details of this analysis take us into a version of what is called schema theory that is designed to link action, perception and imagination in a way that can be explored at a cognitive level and yet can, in some cases at least, be linked to the analysis of neural mechanisms in human and non-human brains (Arbib, 2021, Chapters 2 and 3). But in this paper, my focus must be elsewhere.

Case Study 1. Magdalena Jetelová's Domestication of Pyramids

Describing Magdalena Jetelová's 'Domestication of Pyramids', Cyril Foiret (2015) writes: 'The intersection of the eastern archetypal monument – the pyramid – and its absolute geometry with "humanized" western architecture, ... raises questions concerning the nature of our culture, whereby our stable coordinates which anchor us in the world become relative.'

However, Jetelová's 'pyramid' is an illusion – we are shown what *could be* the intersection of a pyramid with the interior of the museum. What we see is a fragment of an *imagined* whole which continues beyond the borders of the Museum and which we can mentally reconstruct as a pyramid. This fits in with the general theme of perception as mental construction. The issue then is what associations the artist can assume in creating a situation that will afford certain intended experiences. The counterpoint is that the work is enriched if the audience can bring unanticipated memories that expand or even change the experience. This counterpoint corresponds to the tradeoff between a building or urban environment that offers clear guides to wayfinding and one (like Venice) that allows one to find delight in exploration or intentional 'waylosing' (Arbib, 2021, Chapter 6; Mollerup, 2013).





OBR. 2 Tři pohledy na červenou pyramidu protínající interiér muzea
FIG. 2 Three views of the red pyramid intersecting the interior of the museum

Případová studie č. 2. Magdalena Jetelová – Projekt Island 1992

Středoatlantický hřbet tvoří geologickou hranici mezi Severní a Jižní Amerikou a Evropou. Je tvořen pohořím, které se táhne v délce 15 000 km, přičemž většina se nachází pod hladinou oceánu. Asi 350 kilometrů je viditelných jako pásmo, které v polovině protíná Island. *Projekt Island* Magdaleny Jetelové je záznamem neboli inscenovanou světelnou performancí/fotografií. Autorka v tomto díle využila lasersy (speciální paprsky soustředěného světla), aby zmapovala tzv. podmořský mezikontinentální předěl na Islandu. Zeměpisně se jedná o hranici tektonických desek. (<https://publicdelivery.org/magdalena-Jetelová-iceland/>).

Jetelová zvýraznila hřeben protínající povrch islandské krajiny laserovým světlem, aby ukázala cosi, co je skryté hluboko na dně oceánu. Umění nám představuje úžasný geologický objev – kontinentální drift. Ačkoli někteří autoři spatřují konflikt mezi uměním a vědou, v tomto díle věda evokuje umění, které zase vyvolává naši reakci na vědu. Z jednoduché představy přímky vyplývá komplexní pochopení dynamických sil, které formovaly kontinenty definující náš svět. Osvětlení prostoru zde vyvolává úvahy o geologických procesech, které v hloubi času přetvářely naši planetu.

Rozhovor mezi uměním a vědou se zde zaměřuje nikoli na složitosti vědeckého výzkumu, ale spíše na myšlenky, které nám věda zprostředkovává a které mění naše vědomí světa. Další příklad této prospěšné interakce uvádí Juhani Pallasmaa (2018), který říká, že: James Turrell vytvořil zážitky světla a umožnil nám vidět „taktilní světlo“ a „staré světlo“, kosmické světlo, které putovalo tisíce světelných let vesmírem, než dopadlo na naši sítnici; tento zážitek nám dokonce umožňuje dotknout se času a vnímat nekonečno a věčnost.

Přesto věda zůstává tím, co nás učí žasnout nad tisíci světelných let. Široký záběr nové vědy nakonec vstoupí do běžného povědomí a běžné mluvy a může tak ovlivnit nejen způsob, jakým prožíváme svůj každodenní život, ale také myšlení, které umělci (a architekti!) vnášejí do své práce, a způsob, jakým je „široká veřejnost“ může ocenit (Arbib, 2021, s. 61).

Case Study 2. Magdalena Jetelová's Iceland Project 1992

The Mid-Atlantic Ridge is the geological boundary between the Americas and Europe. It forms a mountain range that stretches 15,000 kilometers, with most of the ridge located at the ocean's bed. It is visible to for about 350 kilometers as a range that cuts Iceland midway. *Iceland Project* by Magdalena Jetelová is a recording or staged light performance/photography. In this work, the artist leveraged lasers (special beams of focused lights) to map out what's known as the undersea intercontinental divide in Iceland. In geography, this refers to the boundary of a divergent tectonic plate. (<https://publicdelivery.org/magdalena-Jetelová-iceland/>).

Jetelová highlighted the ridge with laser light crossing the surface of the Icelandic countryside to show something concealed deep in the ocean. Here, the art brings an amazing discovery of geology – continental drift – into our view. Where some writers see art and science as in conflict, in this work science evokes the art that in turn evokes our response to the science. The simple idea of a straight line unfolds into a complex understanding of the dynamic forces that have shaped the continents that define our world. The illumination of space here plunges us into reflections on the geological processes that reshaped our planet in Deep Time.

The conversation between art and science here focuses not on the intricacies of the scientific research, but rather on ideas that reflect back from the science to change our consciousness of the world. Another example of this beneficial interaction occurs in Juhani Pallasmaa's (2018) comment that James Turrell has articulated experiences of light, and enabled us to see 'tactile light' and 'old light', cosmic light that has travelled thousands of light years through outer space before hitting our retina; this experience even permits us to touch time and sense infinity and eternity.

Yet it was science that taught us the awe of thousands of light years. The broad strokes of new science eventually enter into common parlance and thus may affect not only the way we experience our everyday lives but also the mind-set that artists (and architects!) bring to their work, and the way in which 'the general public' may come to appreciate them (Arbib, 2021, p. 61).



OBR. 3 Fotografie laserového světla osvětlujícího virtuální hranici tvořenou Středoatlantickým hřbetem protínajícím Island

FIG. 3 Photographs of laser light illuminating the virtual boundary created by the Mid-Atlantic Ridge as it crosses Iceland



Od topografie k topologii

Topografie úzce souvisí s etymologií *geometrie* ve významu zemských rozměrů. Týká se rozmístění míst a útvarů ve vztahu k jiným útvarům v rámci pozemského prostoru, které lze definovat pomocí euklidovské geometrie nebo kartézského systému souřadnic. Zájem o topografii určitého regionu nás může dovést ke studiu jeho historie z hlediska prostoru. Toto pojetí zřetelně rezonuje s landartem, který je tak důležitou součástí tvorby Magdaleny Jetelové. Topografie je navíc důležitým aspektem pro architektky, kteří budovu situují ve vztahu k místu, kde bude postavena, i k okolnímu prostředí.

Matematické definice topologie naopak neberou ohledy na základní topografické prostorové uspořádání. Topologie dala zrod mnoha studiím s různou mírou abstrakce, ale zde se zaměříme pouze na jednu – na spojení mezi významnými místy. Tím odhlédneme od konkrétních forem, které utvářejí umělecké nebo architektonické dílo, a budeme věnovat pozornost jejich neuvěřitelné flexibilitě.

Dalším klíčovým matematickým pojmem je *transformace*. Různá odvětví matematiky pracují s konkrétním souborem transformací a hledají odpověď na otázku, jaké vlastnosti objektu zůstávají zachovány bez ohledu na uplatnění konkrétních transformací z dané kategorie. Klasickým příkladem je euklidovská geometrie, která umožňuje libovolnou translaci (ve smyslu přemístění jinak nezměněného objektu na jiné místo), rotaci nebo odraz. Tímto způsobem se například z trojúhelníku nemůže stát čtverec a dva trojúhelníky jsou ekvivalentní pouze tehdy, když mají stejné úhly. Nás však často více zajímá, jaká transformace vede ke vzniku „objektu“ s požadovanými vlastnostmi. Pokud se snažíme uspořádat kusy nábytku v existující místnosti, pak euklidovská geometrie nám poskytne transformace, z nichž vybereme vhodné uspořádání.

Topologický přístup použitý v tomto článku považuje libovolné dva objekty za stejné, pokud mají stejný „graf“. Zaměřuje se na způsob, jakým jsou jednotlivé části objektu uspořádány nebo propojeny. Než to vysvětlím na příkladu, rád bych zdůraznil, že tato topologie poskytuje pouze částečný pohled na prostor, který zabírá konkrétní budova, a proto příslušné matematické vztahy (i když je zde nebudu popisovat) sahají daleko za hranice topologie. Příklad z euklidovské geometrie jsme si již uvedli. Na druhou stranu, pokud chceme navrhnout střechu, která bude mít určitý tvar, můžeme použít diferenciální geometrii a najít způsob, jak zachovat obecný tvar a zároveň jej přetvořit tak, aby odpovídal rozměrům budovy a dalším omezením. Pokud tedy proces tvorby návrhu využívá matematiku, zahrnují poetika i praktičnost prostoru více než topologii, pokud chápeme topologii jako určitý nástroj v rámci rozsáhlého souboru nástrojů matematiky.

Omlouvám se čtenářům, kteří nejsou zběhlí v matematice a považují toto celé za zbytečné odchylení se od tématu, ale vzhledem k tomu, že jsem vystudoval matematiku, je pro mě důležité vyjadřovat se přesně, pokud jde o matematickou terminologii.

From Topography to Topology

Topography is closely related to the etymology of *geometry* as meaning the measurement of the earth. It concerns the disposition of places and forms in relation to others in a terrestrial space that can be defined in Euclidean terms or Cartesian coordinates. A concern with the topography of a region may lead us to study its history in spatial terms. This notion clearly resonates with the land art that has been so important a part of Magdalena Jetelová's work. Moreover, topography provides a major concern for architects who situate a building in relation to the site on which it is built as well as the surrounding environment.

By contrast, the mathematical definitions of topology ride roughshod over the crucial spatial layout of topography. Topology has developed many studies of diverse abstractions, but below I will focus on just one – the connections between significant places. This abstracts away from the particular forms that shape a work of art or architecture yet draws attention to their mind-bending flexibility.

Another crucial mathematical notion is that of *transformation*. Different branches of mathematics will offer a particular set of transformations and ask what properties of an object are preserved no matter what transformations from that class are applied. For the classic example, Euclidean geometry allows any translation (in the sense of moving an otherwise unaltered object to another location), rotation, or reflection. In this way, for example, a triangle cannot become a square, and two triangles are equivalent if and only if their angles are the same. However, we are often more interested in finding which transformation yields an 'object' with desired properties. If we are trying to arrange pieces of furniture in an existing room, then Euclidean geometry provides the transformations from which we select the appropriate arrangement. The approach to topology in this paper views any two objects as being the same if they have the same 'graph'. It focuses on the way the parts of something are organized or connected.

Before I use an example to explain this, let me stress that this topology gives only a partial view of the spaces that a building occupies, and so the relevant mathematics (though I won't describe them here) extends far beyond topology. We have already seen an example from Euclidean geometry. On the other hand, if we wish to design a roof with a certain sort of shape, then we may turn to differential geometry to find a way to preserve the general form while reshaping it to match the dimensions of the building and other constraints. Thus, in those cases where mathematics is engaged in the design process, both the poetics and practicality of space involve more than topology when we understand topology as a particular tool within the extensive toolkit of mathematics.

I apologize to the non-mathematical reader who finds all this an unnecessary digression, but – having been trained as a mathematician – it is important for me to make the attempt to be precise when mathematical terminology is involved. Nonetheless,

Nicméně uznávám, že termín „topologie“ se používá neformálně a v obecném slova smyslu znamená, že návrh budovy nebo sochy lze nápaditě měnit a opakovaně tak přetvářet původní návrh, než je nalezena verze, která projektanta skutečně uspokojí. Jetelová (pč) říká, že topologie není konec procesu a přesahuje přetváření, k němuž dochází při návrhu jednoho díla, a zdůrazňuje, že Umění není hotové. Každé dílo otevírá další kroky, jako ve štafetovém běhu.

OBR. 4 znázorňuje problém „Sedmi mostů v Královci“, který je východiskem našeho pojetí topologie a který bude hrát důležitou roli v našem pojednání o architektonickém návrhu. Problém byl následující: Vzhledem k tomu, že město má sedm mostů, lze naplánovat procházku městem tak, aby návštěvník přešel každý most jen jednou? Můžete vyzkoušet mnoho různých tras – bez úspěchu; matematik Leonhard Euler však v roce 1736 vyřešil tento konkrétní problém tak, že vyřešil mnohem obecnější úlohu. Vynechal podrobnosti topografie zobrazené vlevo a vytvořil graf (jako soubor uzlů či vrcholů, z nichž každý je spojen jednou nebo více hranami) zobrazený vpravo – každá část pevniny je vyjádřena uzlem zobrazeným jako čtverec označený příslušným písmenem, a každý most spojující příslušné pevniny je vyjádřen hranou spojující dva uzly. Všimněte si, že pokud se vám podaří najít cestu grafem, kdy přejdete po každé hraně pouze jednou, bude existovat procházka, která přejde každý most pouze jednou. Euler neřešil přímo problém města Královce; místo toho zvažoval *všechny* takové grafy! Položil si otázku: Je-li dán graf, existuje „cesta“ grafem, která projde každou hranou pouze jednou? Definoval *stupeň* vrcholu jako počet hran, které se ho dotýkají, a dokázal, že požadovaná procházka existuje pouze tehdy, je-li graf spojitý (při zadání libovolných dvou vrcholů musí existovat cesta z jednoho do druhého) a obsahuje přesně dva vrcholy lichého stupně nebo neobsahuje žádný vrchol lichého stupně. Tato obecná věta rychle vyřeší problém Královce: Protože všechny čtyři uzly mapy Královce jsou lichého stupně, neexistuje žádná cesta, která by každou hranou procházela jen jednou.

Problém Královce nepátral po různých formách, které tvoří město, ale zkoumal vzorec pohybu, který využívá prostor určitým způsobem. A přesto genialita matematika Eulera spočívala v tom, že opustil tento fyzický prostor a vytvořil abstraktní graf, který každou část pevniny zmenšil na jediný bod a každý most protáhl tak, aby získal přímkou spojující dva z těchto bodů. Eulerova věta nám říká, že bychom se museli (kdybychom se ocitli v Královci jeho doby) vzdát touhy přejít přes každý most pouze jednou – ale přesto bychom se mohli svobodně procházet městem a kochat se různými výhledy, které se nám při přecházení každého mostu naskytanou, i když bychom museli alespoň jeden most přejít více než jednou. Rád bych zdůraznil, že se nemusíte řídit matematikou prokazující Eulerovu větu – a přesto ji můžete použít v mnoha nových situacích, nejen při plánování procházek.

Krása teorie grafů spočívá v tom, že abstrahuje od prostorové struktury, aby ji obnažila na její podstatu a umožnila nám představit si, co je možné, nebo rozpoznat, co není možné, a přenést to následně do naší zkušenosti se skutečným prostorem, jímž procházíme v čase. Později si řekneme více o grafech ve vztahu ke kognitivním

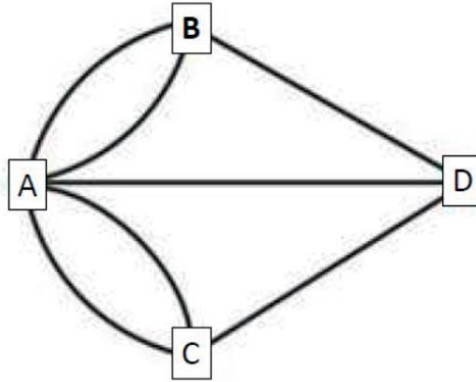
I accept that the term ‘topology’ is used informally perhaps in the general sense that the design of a building or a sculpture can be varied in imaginative ways to transform an initial design repeatedly before a version is found that truly satisfies the designer. Jetelová (pc) comments that topology is not an end to the process and goes beyond the reshaping that occurs in the design of a single work to stress that Art is not too finished. Each work opens up further steps, as in a relay race.

FIG. 4 illustrates the ‘Seven Bridges of Königsberg’ problem which motivates the present approach to topology, and which will play an important role in our discussion of architectural design. The problem posed was this: Given the seven bridges, can one plan a walk through the town that crosses each bridge once and only once? You can try many different routes without success, but in 1736, the mathematician Leonhard Euler solved this particular problem by solving a much more general problem. He abstracted away the details of topography shown at left to formulate the graph (in the sense of a collection of nodes each joined by one or more edges) shown at right – with a nodes for each landmass, shown as a square labelled with the corresponding letter, and an edge joining two nodes for each bridge joining the corresponding land masses. Note that there is a walk that crosses each bridge once and only once if we can find a path through the graph that crosses each edge once and only once.

Instead of looking directly at the Königsberg problem, Euler considered *all* such graphs! He asked: given a graph, is there a ‘walk’ through the graph that traverses each edge once and only once? He defined the *degree* of a node as the number of edges touching it and proved that a walk of the desired form exists only if the graph is connected (given any two nodes, there must be a path from one to the other) and has exactly zero or two nodes of odd degree. The general theorem quickly solves the Königsberg problem: Since all four nodes of the Königsberg map have odd degree, no path exists that traverses each edge once and only once.

The Königsberg problem did not ask about the various forms that constitute the city, but did ask about a pattern of movement that exploits the space in a particular way. And yet the genius of the mathematician Euler was to abandon that physical space and call forth an abstract graph that shrank each area of land to a single point and stretched each bridge into a line connecting two of these points. Euler’s theorem tells us that (had we been in the Königsberg of his time) we would have had to abandon the desire to walk once and only once over each bridge – but still would have left us free to take a walk in the city and enjoy the different views we encounter as we cross each bridge, even though we would have to cross at least one bridge more than once. Let me stress that you don’t have to follow the mathematics that was required to prove Euler’s theorem – you can still use it in many new situations, not just for planning walks.

The beauty of graph theory is that it abstracted from a spatial structure to strip it to its essence and allowed us to imagine possibilities, or recognize impossibilities, that we could then bring back to our experience of an actual space as we passed through it in time. Later, I will say more about graphs in relation to cognitive maps, leading



OBR. 4 Pokud se zaměříme na konektivitu, můžeme tyto dva obrázky v jistém smyslu považovat za topologicky ekvivalentní – stačí každý kus pevniny zmenšit a vyjádřit pouhým uzlem a každý most protáhnout tak, aby tvořil hranu.

FIG. 4 When we focus on connectivity, we may consider these two figures as in some sense topologically equivalent – just shrink each land mass down to a node and stretch each bridge into an edge.

mapám, což nás přivede k otázkám architektonické kreativity, které mohou mít určitou relevanci i k velmi odlišné tvořivosti Magdaleny Jetelové. Nyní se však podíváme na další dva klíčové pojmy: afordance a atmosféra.

Afordance a atmosféry

Afordance jako pozvánka k akci/indikace akce

Pojem afordance představil J. Gibson (1977) ve své knize *The Senses as Perceptual Systems / Smysly jako percepční systém* /: „Afordance prostředí představují to, co dané prostředí živočichovi nabízí, co mu poskytuje nebo dodává, ať už v dobrém, nebo ve zlém. V anglickém slovníku se vyskytuje sloveso *to afford* (poskytnout, dopřát – pozn. překl.), ale podstatné jméno *affordance* nikoli. Vymyslel jsem si ho. Mám jím na mysli něco, co se vztahuje jak k prostředí, tak k živočichovi způsobem, který nevyjadřuje žádný jiný existující termín. Naznačuje komplementaritu živočicha a prostředí.“

Efektivita člověka jsou akce, činnosti a jednání, kterých je schopen; afordance, tj. možnosti jednání, každého člověka tedy závisí na jeho souboru efektivit – proto jsou komplementární. A naopak, objekt může během různých úkolů „odhalit“ různé soubory afordancí.

Pro Gibsona je vnímání afordancí přímé – není zapotřebí žádného kognitivního zprostředkování. Zamysleme se však nad třemi schodišti na **OBR. 5**. Každé z nich nabízí afordance každému, kdo je schopen vystoupat po schodech nahoru a sestoupit dolů. Z hlediska Eulerova grafického pojetí lze každé schodiště redukovat na stejný graf složený ze dvou uzlů – uzel pro horní patro, uzel pro dolní patro a hranu nebo dvě pro přechody mezi nimi. Z obrázku je však zřejmé, že tento redukováný detail ignoruje to, co tato tři schodiště odlišuje a činí je charakteristickými. Na rozdíl od schodiště vlevo, zbývající dvě schodiště vybízejí k akci, ale zároveň ke kontemplaci; a právě tato kontemplativní složka je klíčová pro umění a architekturu. V architektuře je potřeba spojit užitečnost a možnost kontemplace. Vrátime-li se k pojmu poetiky, můžeme říci, že schody zobrazené vlevo jsou pouze funkční – chybí jim poetické obrazy druhých dvou.

Pojem afordance přesahuje Gibsonovu základní perspektivu, protože lidé mohou vnímat i ty afordance, k nimž sami postrádají efektivitu, tedy schopnost – člověk upoutaný na invalidní vozík rozpozná afordance, tj. možnosti, které schodiště poskytuje ostatním. Možná se zde dotýkáme pocitu, který je především lidský – pocitu *touhy*, rozpoznávání afordancí, jejichž pozvání nemůžeme nikdy přijmout, jako když vidíme orla vznášejícího se na obloze vysoko nad námi. Přijetím Gibsonova pojmu afordance tedy přijímáme to, že lidé mohou vnímat afordance jiných lidí a jiných tvorů a mohou si představit neexistující tvory, kteří by mohli nalézt realizovatelné afordance tam, kde si my můžeme jen stěží představit akce, které by s nimi mohly být spojené.

into some ideas on architectural creativity that may also have some relevance to Magdalena Jetelová's very different creativity. But for now I turn to two more key ideas: affordances and atmospheres.

Affordances and atmospheres

Affordances as invitations to/indications for action

In his book *The Senses as Perceptual Systems*, Gibson (1977) introduced his notion of *affordances*: "The affordances of the environment are what it offers the animal, what it provides or furnishes, either for good or ill. The verb to afford is found in the dictionary, but the noun affordance is not. I have made it up. I mean by it something that refers to both the environment and the animal in a way that no existing term does. It implies the complementarity of the animal and the environment."

A person's *effectivities* are the actions of which they are capable and so the affordances for each person depend on their set of effectivities – thus the complementarity. Conversely, an object may 'reveal' different sets of affordances during different tasks.

For Gibson, the perception of affordances is direct – no cognitive mediation is required. However, consider the three staircases in **FIG. 5**. Each offers affordances to anyone with the effectivities of climbing and descending stairs. In terms of Euler's graphical notion, each can be reduced to the same two-node graph – a node for the upper floor, a node for the lower floor, and an edge or two for the transitions between these nodes. However, the Figure makes clear that this reduced detail ignores what makes these three stairways so distinctive. Unlike the stairs at left, the other two invite contemplation as well as action, and surely it is that contemplative component that provides a crucial component for art and architecture. In architecture, utility and contemplability must be combined. To return to the notion of poetics, one might say that the stairs shown at left are only functional – they lack the poetic images of the other two.

The notion of an affordance extends beyond Gibson's core perspective because humans may perceive even those affordances for which they themselves lack the effectivities – someone confined to a wheelchair recognizes the affordances a staircase affords to others. Perhaps we touch here on a particularly human feeling – that of *yearning*, of recognizing affordances whose invitation we can never accept, as when we see the eagle soaring in the sky above us. Thus, in accepting Gibson's notion of affordance, we accept that humans can perceive the affordances of other people and other creatures, and can imagine the nonexistent creatures that might find actionable affordances where we can only, barely, imagine the actions that might be involved.





OBR. 5 Schodiště jsou určena k výstupu nahoru nebo sestupu dolů, oba tyto směry mají poetickou funkci

FIG. 5 Stairways are to go up or down, but two of these flights of stairs have poetic appeal

Afordance mohou být vědomé nebo nevědomé. Můžete vědomě rozpoznat schody jako způsob, jak se dostat do dalšího patra, ale přizpůsobení pohybu chodidel a nohou při stoupaní po jednotlivých schodech bude ve většině případů probíhat bez vědomého přemýšlení. V každém případě však můžeme hovořit o afordancích k jednání pomocí vnímání, které moduluje možnosti pro konkrétní jednání/akce.

Případová studie č. 3. Magdalena Jetelová a její Židle definující místo, kterou odnesla povodeň

Tato případová studie ukazuje sklon člověka vnímat afordance, na základě kterých nemůže jednat. Je zvláštní, že část naší fascinace uměním spočívá právě v tomto *na-pětí* mezi zřejmými afordancemi, tj. možnostmi jednání, a jednáním, kterého jsme schopni.

Magdalena Jetelová navrhla několik židlí, na kterých nelze sedět a které se značně odchylují od našich očekávání – velikostí, materiálem, strukturou, symetrií – a které upoutávají naši pozornost, když vizuálně zkoumáme a odhalujeme neočekávané. Právě předchází očekávání a vědomí, že se jim zkušený umělec vzepřel, z nich činí spíše umělecké dílo než odmítnutý truhlářský výrobek (ačkoli Duchamp se snažil takové rozdíl stírat).

Židle na **OBR. 6** byla až do roku 2002 umístěna na nábřeží poblíž sídla Musea Kampa v Praze. Střední část obrázku ukazuje vyhocený střet očekávání – i kdyby měla židle konvenční tvar, nebyla by zde přístupná; proud vody nabízí nový kontext, v němž lze ocenit podivnost židle. Nakonec však samotný proud řeky tuto kompozici zničil – při povodni v roce 2002 byla židle odplavena asi čtyřicet kilometrů po proudu.

Znamenal v tomto případě časový prvek umístění židle uprostřed proudu řeky ironii osudu, když byla židle smetena povodní – nebo šlo o vyvrcholení projektu? V roce 2003, kdy bylo Museum Kampa znovu otevřeno, byla židle nahrazena sovkou s názvem „Návrat židle“, kterou vytvořili studenti ateliéru Kurta Gebauera na Vysoké škole uměleckoprůmyslové z povodní poškozených stromů. Nyní zde máme nový časový aspekt – samotný materiál židle odráží historii původní židle, kterou nahrazuje. Navrácená židle je zkonstruována novými rukama a umístěna na nové místo – a jen ten, kdo zná historii, ji může plně ocenit jako další tvář židle, kterou původně vytvořila sama Jetelová. Můžeme skutečně spolu s Bachelardem říci, že „skrže brilantnost obrazu se rozeznává ozvěnou vzdálená minulost...“, nebo je to tak, že díky pochopení této malé části nepříliš vzdálené minulosti získá náš zážitek toho, co by jinak mohlo být pouhou replikou, zajímavost, která určitým způsobem obohatí původní židli?

Affordances may be conscious or nonconscious. You may consciously recognize the stairs as a way to get up to the next floor, but adjusting the movement of feet and legs as you ascend each step will on most occasions proceed without conscious thought. In each case, though, we may talk about *affordances* for action using perception to modulate opportunities for particular actions.

Case Study 3.

Magdalena Jetelová's Chair Defining a Place that was Swept Away

This Case Study brings into play the human propensity to perceive affordances they cannot act upon. How strange that part of our attraction to art rests on that very *tension* between apparent affordances and the actions of which we are capable.

Magdalena Jetelová has designed a number of unsittable chairs which offer the many departures from our expectations – size, material, texture, symmetry – that capture our attention as we visually explore and reveal the unexpected. It is the prior expectations and the knowledge that a skilled artist has contravened them that make this a work of art rather than a rejected piece of carpentry (though Duchamp sought to blur such distinctions).

Until 2002, the particular chair shown in **FIG. 6** was located on the embankment near the seat of the Kampa Museum in Prague. The middle part of the figure shows the heightened clash of expectations – even were the chair shaped conventionally, it would here be inaccessible, and the flow of the water offers a new context in which to appreciate the chair's strangeness. But eventually the very flow of the river destroyed this composition—the chair was swept about forty kilometers downstream in the flood of 2002.

It is the temporal element of placing the chair amid the flow of the river that yields the final irony as the chair is swept away in the flood – or is it the culmination of the project? In 2003, when the Kampa Museum reopened, the chair was replaced by a sculpture twice as large, 'The Return of a Chair', created by students of Kurt Gebauer's studio at the Academy of Arts, Architecture and Design from flood-damaged trees. Now there is a new temporality – the very material of the chair reflects the history of the chair it replaces. The returned chair is constructed by new hands and placed in a new place – and only those who know the history can fully appreciate it as another face of the chair that Jetelová herself constructed. Can we really say with Bachelard that 'through the brilliance of an image, the distant past resounds with echoes' or is it that through our understanding of this small part of the not-so-distant past our experience of what might otherwise be a mere replica becomes endowed with a luster that in some way enriches the original Chair?





OBR. 6 Židle na řece a místo, odkud ji přemístila povodeň.
FIG. 6 The chair on the river and from where the flood moved it to

Vidíme zde poetiku prostoru i času. To, co bylo jen dalším místem na nábřeží, se umístěním originální židle stalo významným místem v Praze – novým uzlem v grafu míst, kam mohl člověk dojít, daleko jemnějším než graf, jehož jediné uzly zmenšují části pevniny do jediného bodu a jehož jedinými hranami jsou mosty. K tomu se ještě vrátíme, až budeme hovořit o kognitivních mapách a grafech světa. S povodní však čas tento uzel odplavil a nadále zůstane jen v paměti.

Architektonické atmosféry

J. Gibson se zabýval spíše podvědomými afordancemi; architekt však navrhuje budovu tak, aby nabízela předpokládaným uživatelům různé afordance, tj. možnosti jednání, které na ně mohou působit jak na vědomé, tak na nevědomé úrovni. Zkoumáním lze navíc odhalit i takové afordance, které architekt původně nezamýšlel, a přesto mohou potěšit obyvatele budovy, který je náhodou objeví (vzpomeňme si na předchozí poznámku o „hledání a ztracení cesty“). Vrátime-li se ke třem schodištím, viděli jsme, že architekt může překročit rámec pouhých praktických afordancí a poskytnout estetický a emocionální zážitek – zde může být zkrášlení „hran“ stejně důležité jako návrh uzlů, které se z bodů v grafu mění na trojrozměrné struktury, jež samy o sobě poskytují afordance pro lidské činnosti rozšířené v čase.

Gernot Böhme (2014, s. 8,11) tvrdí, že: „Stále více [se prosazuje] myšlenka, že hlavním úkolem architektury není vytváření pohledů, ale prostoru. Tedy prostorů a míst s určitou náladou, atmosférou... [A]tmosféra je vágní, neurčitá, je to totalita, která celé místo naladí... je prostorová a emocionální zároveň – jakýsi prostorově rozšířený pocit“ **OBR. 7.**

Při činnostech vykonávaných v budovách jsou lidé motivováni k uspokojování různých potřeb, od základních impulsů, jako je nalézt jídlo nebo místo na spaní, až po touhu prohlédnout si velká umělecká díla nebo najít náboženskou inspiraci. Atmosférou chápeme ty aspekty prostoru v budově a jejím okolí (nebo uvnitř či v okolí uměleckého díla), které mohou navodit celkovou náladu, v jejímž rámci hrají zásadní roli motivace a emoce, jak z hlediska utilitárního chování, tak z hlediska estetického zážitku.

Tonino Griffero (2014) proto navrhuje chápat atmosféru tak, že nabízí jiný druh afordance, která není „gibsonovská“ a týká se spíše nálady nebo emocí než zjevného praktického jednání – ačkoli v rámci našeho zážitku spojeného s budovou se oba druhy prolínají. Griffero zdůrazňuje *první dojem* z prostoru jako prototyp atmosféry, kterou prostor nabízí. Podle Thibauda (2014) se atmosféra může dynamicky měnit – představte si, jak stejná ulice, která je pro vás příjemná za denního světla, kdy kolem vás procházejí další lidé, může vyvolat strach, když po ní jdete v noci, nikdo kolem vás není, a najednou za sebou uslyšíte kroky, které se blíží... Pro zážitek spojený s architekturou, a tedy i pro proces návrhu díla, jsou důležité jak praktické afordance, tak afordance týkající se atmosféry; při navrhování prostoru, byť i statického, však nelze ignorovat dynamiku, díky níž se může měnit kontext, a tedy i zážitek spojený s prostorem.

We see here a poetics of both space and time. What was just another location along the embankment came, by the placement of the original Chair, a significant place in Prague – a new node in a graph of places one could walk to, far finer than a graph whose only nodes shrink land masses to a point and whose only edges are bridges. I shall have more to say about this when I talk about cognitive maps and world graphs below. But, with the flood, time washed that node away and it remains only in memory.

Architectural Atmospheres

Gibson was more concerned with subconscious affordances, but the architect designs a building to offer diverse affordances for the expected users of the building that may affect them at both conscious and nonconscious levels. Moreover (recall the earlier aside on ‘waylosing’), exploration may reveal affordances that were unintended by the architect and yet may delight the inhabitant who discovers them. Returning to the three staircases, we saw that the architect may go beyond the mere provision of practical affordances to provide aesthetic and emotional experience – and here the embellishment of the ‘edges’ may be as important as the design of the nodes as they are transformed from points in a graph to three-dimensional structures that themselves provide affordances for human activities extended in time.

Gernot Böhme (2014, pp.8,11) asserted that: ‘The idea [is growing] that the main task of architecture is not the production of sight but of space. That is to say spaces and location with a certain mood, i.e. atmospheres. ... [A]tmosphere is vague, it is indefinite, it is a totality which tunes the whole site ... it is spatial and emotional at the same time – a kind of spatially extended feeling.’

As people act within buildings, they are motivated to meet various needs, from basic drives like finding food or a place to sleep all the way to a desire to view great works of art or find religious inspiration. We talk of the atmosphere as those aspects of a space in and around a building (or within or around a work of art) that can set the overall mood within which motivation and emotion play their crucial roles in both utilitarian behavior and aesthetic experience **FIG.7.**

Tonino Griffero (2014) thus suggested that we talk of atmospheres as offering another kind of affordance, but these are ‘non-Gibsonian’, relating more to mood or emotion than to overt practical action – though, indeed, in our experience of a building, the two are intertwined. Griffero emphasizes the *first impression* of a space as the prototypical atmosphere it provides. For Thibaud (2014), atmosphere may change dynamically – consider how the same street which may delight you in daylight with other people coming and going around you may induce fear when you walk down it at night with no one around you, and then you hear footsteps coming up behind you... Both practical and atmospheric affordances are relevant to the experience of architecture, and thus to the design process, but the designing of even a static space cannot ignore the dynamics whereby the context and thus the experience of the space may change.



OBR. 7 Chrámová zahrada ve městě Kjóto přináší možnost zažít atmosféru klidu a míru.
FIG. 7 A temple garden in Kyoto affords an atmosphere of peace and serenity.

Kreativita v prostoru a čase

Pro představu o uměleckých dílech, jejichž design má podstatnou časovou složku, uvádíme v této části dvě případové studie – jednu z výstavy, která byla podnětem k tomuto článku, a druhou z oblasti choreografie.

Případová studie č. 4.

Magdalena Jetelová a její *Proměny místa a prostoru v Liberci*

Výstižnější název výstavy *Proměny místa a prostoru* by možná byl *Proměny prostoru v čase*. Zatímco na stěnách byly umístěny ukázky dřívějších prací Jetelové, ústředním dílem byla performance, která se konala v prostoru, kde dříve býval bazén, a kterou diváci mohli sledovat z horní galerie (OBR. 8).

Instalace na podlaze bazénu obklopuje ženu hrající na hudební nástroj. Když hraje, desky nejen odrážejí galerii a publikum, ale začínají se chvět mihotajícím světlem

OBR. 9.

Desky se mihotavě třpytí a zkreslují odrazy, měnící se světelné vzory se odrážejí na stěnách a stropě galerie (stejně jako světlo z rybího bazénku na našem dvoře vytváří vzory na stropě pracovny mé ženy) a vyvolávají audiovizuální vzpomínku na hru světla na dnes již neexistujícím bazénu. Jetelová (pc) zdůraznila, že aktuální přehrávaná hudba pro ni není důležitá – klíčová je transformace energie tónů do vizuální podoby, vizualizace tónů vyjádřená vztahem mezi zvukovými obrazy a vizuálními efekty, které vyvolávají. Světlo zviditelňuje zvuky hudby.⁴ Zde mění pohyb z jednoho prostoru (definovaného zrakem) do jiného prostoru (definovaného poslechem) prostřednictvím zkoumání nové technologie. Jeden jev mění druhý – přemístění energie prostřednictvím digitalizace tónů. Vibrace navíc mění vizuální stránku – se změnou zvuku se mění to, co vidíte v zrcadle. Jedním z projevů je, že jasné odrazy sálu a publika, které jsou viditelné ve statickém zrcadle, přestanou být rozpoznatelné, jakmile zrcadlo začne vibrovat; hesla napsaná na zrcadle – „to podstatné přestává být viditelné“ a „podobné není podobné“ – přesto zůstávají pro pozorovatele jasně čitelná.

4 — Jetelová (pc) si všimla rané snahy o propojení zvukové a vizuální stránky (i když velmi odlišným způsobem) ve Spektrofonech (1924–30) Zdeňka Pešánka. Pešánek zkonstruoval barevný klavír, který promítal vizuální kinetiku na reliéfní objekt a propojil jeho světelnou klávesnici se čtyřoktávovou hudební klávesnicí. Předpokládal, ovlivněn psychofyzikou Gustava Fechnera, že bude možné normalizovat barevnou stupnici tak, aby ji mohl propojit se stupnicí hudebních tónů, a vytvořit tak společné rozhraní pro ovládání vizuálních i hudebních prvků. Další podrobnosti viz https://monoskop.org/Zdenek_Pesánek.

Matematika má definice pro různé typy „prostoru“, které se stejně jako tyto dva prostory sluchové a vizuální formy neomezují na trojrozměrný (nebo čtyřrozměrný?) prostor, o kterém obvykle uvažujeme, když v architektuře používáme pojem „prostor“. Je však třeba říci, že matematika používaná k definování těchto prostorů a transformací mezi jejich dynamickými formami leží mimo oblast topologie.

Creativity in Space and Time

To provide a sense of art works whose design has an essential temporal component, this section presents two case studies – one from the exhibition that motivated this paper, and the other from choreography.

Case Study 4.

Magdalena Jetelová's *Transformations of place and space* in Liberec

The exhibition *Transformations of place and space* might have been better entitled *Transformations of Space in Time*. While the walls held samples of Jetelová's earlier works, the center piece was the performance held in the space where the swimming pool had been, for which the upper gallery held the audience (FIG. 8).

The installation on the swimming pool floor surrounds a woman playing an instrument. As she plays, the plates not only reflect the gallery and the audience but begin to shimmer FIG. 9.

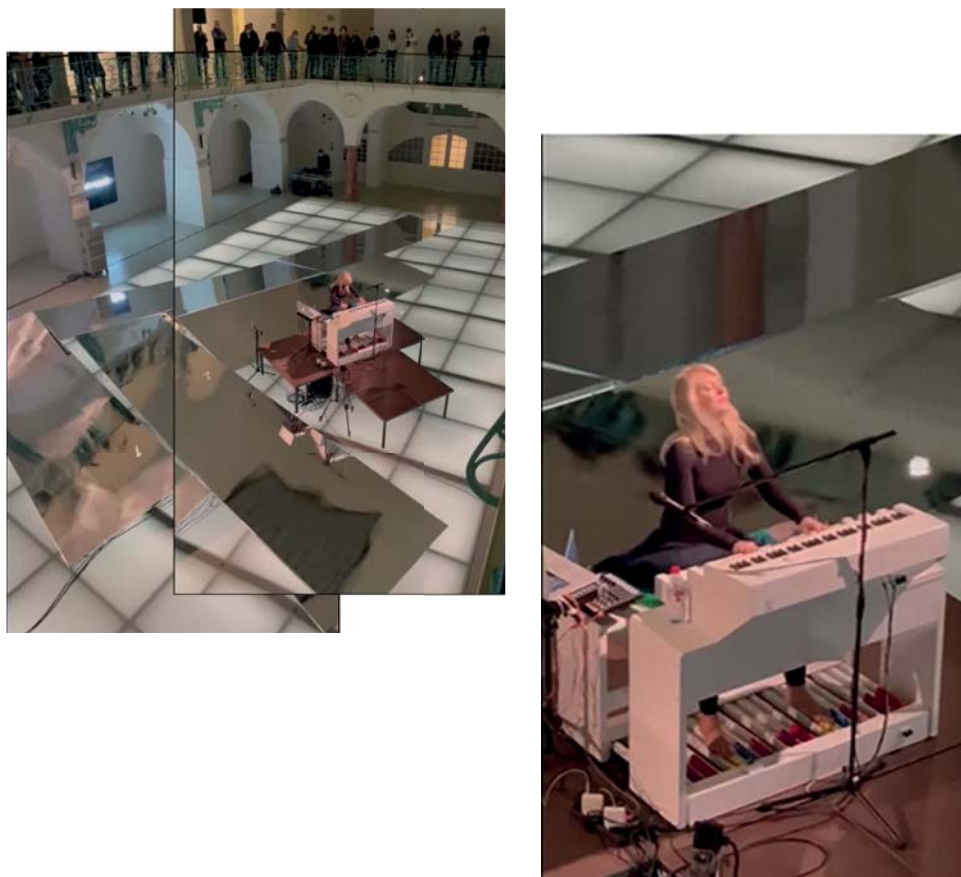
As the plates shimmer and the reflections distort, changing light patterns reflect across the gallery walls and ceiling (just like the light from the fish pool in our courtyard forms patterns on the ceiling of my wife's study), evoking an audio-visual memory of the play of light on the now non-existent swimming pool. Jetelová (pc) emphasized that the actual music played was unimportant for her – the key issue was transforming the energy from the tonality to visual form, visualizing tonality as expressed in the relation between the sound patterns and the visual effects they produced. The light makes visual the music's sounds.⁴ Here she is changing movement from one space (defined by vision) to another (defined through audition) through the exploration of new technology. One phenomenon changes another – a translocation of the energy through digitizing the tonality. Moreover, the vibration changes visuality – as the sound changes, the mirror changes what you see. One manifestation of this is that the clear reflections of the Hall and the audience that are visible in the static mirror become unrecognizable when the mirror vibrates, and yet slogans written on the mirror – 'the essential is no longer visible' and 'the similar is not similar' – remain clear to the observer.

4 — Jetelová (pc) noted an early effort linking sound and vision (though in a very different way) in the Spectrophones (1924–30) of Zdeněk Pešánek. Pešánek constructed a color piano which projected visual kinetics onto a relief object and connected its light keyboard to a four-octave music keyboard. Under the influence of Gustav Fechner's psychophysics, he assumed it would be possible to normalize the color scale so that he could connect it to the scale of musical tones, thus developing a common interface to control both visuals and music. See https://monoskop.org/Zdeněk_Pešánek for further details.

Mathematics has definitions for diverse types of 'space' that, like these two spaces of auditory and visual forms, are not confined to the three (or four?) dimensional spaces that we normally consider when the term 'space' is used in architecture. However, it should be noted that the mathematics used to define these spaces and the transformations between their dynamic forms lies outside the realm of topology.



OBR. 8 Publikum na horní galerii, performance v prostoru nad bývalým bazénem
FIG. 8 The audience in the upper gallery, the performance in the space above the former swimming pool



OBR. 9 Levý obrázek vznikl kombinací několika záběrů z videa dostupného na adrese <https://youtu.be/NS1PRVFHUVc>. Lepší představu o výstavě a performanci však zprostředkuje video „Magdalena Jetelová & Katta – Proměny místa a prostoru“, https://www.youtube.com/watch?v=GY1eTCEj_3Q.

FIG. 9 The figure at left was created by combining stills from the video at <https://youtu.be/NS1PRVFHUVc>. The close-up at right gives a better view of the performer, Katta. However, a better sense of the exhibition and the performance is given by the video ‘Magdalena Jetelová & Katta – Transformations of place and space’, https://www.youtube.com/watch?v=GY1eTCEj_3Q.

Hudbu k libereckému představení složil John Cage, což mi připomíná představení Merce Cunninghama a Cage, které jsem navštívil na Massachusettské univerzitě v Amherstu asi před 40 lety – bylo to zřejmě mé první seznámení s moderním tancem, kde hudba nehrála žádnou zjevnou roli při načasování pohybů tanečníků. Cunningham a Cage usilovali o abstraktní vztah mezi zvukem a vzorcem lidského pohybu, nikoli o přímý převod mezi hudebním rytmem a lidským pohybem utvářeným podle hudby. Pro některé diváky byla tato dekorelace příliš a o přestávce opustili sál, ale pro mě a mou ženu směr pohybů těl na jevišti – někdy ve vzájemné korelaci, jindy ne – a Cageových zvuků vytvořila možnost nové syntézy, kdy naše odlišná zázemí vedla k větší rozmanitost zážitků, než je možné u pohybů řízených, byť pomyslně, rytmickou zvukovou stopou.

Případová studie č. 5. Skupinová choreografie Anny Smith v taneční tvorbě

Předchozí úvahy nás dovedly až k pojednání o tanci, jehož vznik byl dobře zdokumentován, přičemž choreografie byla hotová ještě před výběrem hudby – v tomto případě od skladatele Tan Duna. Tento příklad navíc ilustruje skupinovou kreativitu v čase vedoucí k vytvoření díla, které se samo odvíjí v čase. Choreografka Anna Smith spolupracovala s osmi zkušenými tanečnicemi 15 hodin týdně po dobu 9 měsíců při tvorbě tance *Red Rain / Červený déšť /*, který měl premiéru v Gasworks Theatre v Melbourne v listopadu 1999.

Kate Stevens (2005) zpracovala případovou studii o tvorbě *Red Rain* s využitím týdenních deníkových záznamů jedné z tanečnic a anotací videozáznamů pořízených choreografkou, které dokumentují, jakým způsobem choreografka a tanečnice spolupracovaly na vývoji díla. Příznačné je, že její případová studie se objevuje v knize *Thinking in four dimensions: Creativity and cognition in contemporary dance / Myšlení ve čtyřech dimenzích: Kreativita a kognice v současném tanci /*. Tanec je obzvláště relevantní, protože kombinuje ovládnání pohybu, vnímání, emoce a kreativitu. Je komunikativní, expresivní a soustředí se na pohyb – jeho cílem je však smyslovost: sugestivnost, afektivita a dynamika.

Jak zdůrazňuje K. Stevens, moderní scénický tanec zahrnuje několik kognitivních procesů: krátkodobou a dlouhodobou paměť, multimodální představivost, učení, výkon a expresivní komunikaci. Nácvič a provádění nových a složitých pohybů rozvíjí paměť ve vztahu k materiálu, který je svou podstatou časový – motorický, stejně jako vizuální, prostorový a kinesetický. Na tvorbě tance se podílejí velmi rozdílné časové roviny, je to proces, který v tomto případě trval mnoho měsíců.⁵

5 — Tuto případovou studii jsem již dříve použil v pojednání o architektuře ve svém článku 'Why Should Architects Care about Neuroscience?' / Měli by se architekti zajímat o neurovědu (a proč)? / (Arbib, 2013).

Na začátku práce na choreografii požádala Anna Smith tanečnice, aby se zamyslely nad představami a obrazy spojenými s červenou barvou a reagovaly na ně. To vedlo k úvahám o krevním oběhu v lidském těle a podnítilo tanečnice ke zkoumání

The music for the Liberec performance was by John Cage, and that reminds me of a performance of Merce Cunningham and Cage I attended at the University of Massachusetts at Amherst around 40 years ago – perhaps my first introduction to a modern dance where the music played no apparent role in shaping the timing of the dancers’ movements. Cunningham and Cage sought abstract relationships between sound and patterns of human movement rather than a direct translation between musical rhythm and human movement shaped to the music. For some in the audience, this decorrelation was too much and they left the hall at intermission, but for my wife and myself the mixture of movement of the bodies on stage – themselves sometime correlated, sometimes not – and Cage’s sounds created the possibility of a new synthesis, one in which our different backgrounds created a diversity of experience greater than that possible for movements driven, even if imaginatively, by a rhythmic soundtrack.

Case Study 5.

Anna Smith’s Group choreography in the creation of a dance

Such reflections lead into the discussion of a dance whose creation has been well documented with the choreography completed before the music – in this case by Tan Dun – was chosen. Moreover, this example illustrates group creativity across time to create a work that itself unfolds in time. Choreographer Anna Smith worked with eight experienced female dancers for 15 hours per week over 9 months to create the dance *Red Rain*, which premiered at Gasworks Theatre, Melbourne, in November 1999.

Kate Stevens (2005) provided a case study of the creation of *Red Rain* using the weekly log entries made by one of the dancers and annotations of the video footage made by the choreographer to document how choreographer and dancers worked together to develop the work. Tellingly, her case study appears in the book *Thinking in four dimensions: Creativity and cognition in contemporary dance*. Dance is especially relevant because it combines motor control, perception, emotion and creativity. It is communicative, expressive, and centered on movement – but the aim is sensual: evocative, affective and dynamic.

As Stevens stresses, contemporary dance involves multiple cognitive processes: short-term and long-term memory, multi-modal imagination, learning, performance, and expressive communication. Rehearsal and performance of new and complex movements develops memory for material that is inherently temporal – motoric as well as visual, spatial, and kinesthetic. Very different timescales are involved in creating the dance, a process that in this case extended over many months.⁵

5 — I earlier introduced this case study into discussion of architecture in my paper ‘(Why) Should Architects Care about Neuroscience?’ (Arbib, 2013).

To initiate the development of the choreography, Anna Smith asked the dancers to think about, and respond to, ideas and images associated with the color red. This led to consideration of blood flow in the human body, stimulating the

pohybů odvozených z pulzování žil, dýchání, tlaku a oběhu krve. V tanci je ústředním prvkem akcí každého tanečníka a vzorců vytvářených souborem kineze. Rané experimenty zkoumaly to, co choreografka Anna Smith označila jako „spojovací prvky“, dynamické cesty z pánve a směrem ven skrze jinou část těla.

Jako doplněk k tomuto postupu objevila materiální vyjádření, které pohyby doplňovalo a v některých případech po nich zanechávalo stopy – s použitím červených fazolí, které představují tepennou krev. Červené fazole byly občas rozprostřeny v kalužích nebo tenkých praménkách kolem účinkujících **OBR. 10** – později, v závěrečných okamžicích dokončeného díla, byly červené fazole vylévány v proudu, jehož zvuk připomínal déšť na plechové střeše, čímž naznačoval název díla *Červený déšť*.

Stevens (2005) nabízí podrobný popis vývoje tance týden po týdnu; nemám v úmyslu jej zde opakovat. Spíše se budu zabývat příkladem ze 4. týdne, který zdůrazňuje způsob, jakým se společně vyvíjely pohyby tanečnic a jevištní rekvizity. Anna Smith pověsila „bodliny“ – obdélníkové proužky papíru – a požádala tanečnice, aby na ně reagovaly. Tanečnice reagovaly individuálně na jeden proužek papíru a později předvedly svou improvizaci nebo pohybovou reakci ostatním tanečnicím. Tanečnice K. vytvořila úspěšnou frázi „tak, že papír jemným, krásným způsobem reagoval na sebemenší pohyb jejího těla“. To vedlo k hledání způsobů, jak by všechny tanečnice mohly zkusit variace na tuto frázi, tančit ve vztahu k jednomu pruhu a poté zkoumat účinky kombinace pohybů více tanečnic v rámci více pruhů. Nápad, který vznikl v prvním týdnu, se v průběhu tvůrčího procesu měnil (a některé nápady propadly sítím a už se nikdy nevrátily). Z papírových vláken se stávají dveře, chodby a brány. V představení *Červený déšť* byly nasvíceny tak, aby naznačovaly tajemnou oponu, která zároveň skrývá i odhaluje. V sedmém týdnu jedna z tanečnic prohlásila: „Mé tělo už se s materiálem více sžilo... Konečně se vytratilo napětí spojené se zapamatováním a já jsem mohla konečně ovládnout onen pohyb.“

Díky tomu všemu mohla choreografka začít sekvencovat fráze a časově je strukturovat. Hledala způsoby, jak propojit pozice těla a končetin do souvislého vyprávění expresivního pohybu a zároveň propojit individuálně rozvíjené sekvence. Kreativita při komponování tohoto tance tak zahrnovala nejen sekvencování, prolínání a propojování částí díla, ale především tvorbu samotných částí.

dancers to explore movements suggested by veins pulsing, breathing, pressure, and blood flow. In dance, kinesis is central within the actions of each dancer and the patterns created by the ensemble. Early experimentation investigated what choreographer Anna Smith labeled ‘through-lines’ as dynamic pathways from the pelvis and out through another part of the body.

Complementing this progress, a material expression was discovered to both complement the movements and, in some cases, to leave traces of them – the use of red beans to represent arterial blood. Red beans were at times pooled or trickled around the performers **FIG. 10** – and, much later, in the closing moments of the completed work, red beans were poured in a torrent whose sound recalls rain on an iron roof, thus suggesting *Red Rain* as the title of the piece.

Stevens (2005) offers a richly detailed week-by-week account of the development of the dance and it is not my aim to replicate it here. Rather, I will explore an example from Week 4 that emphasizes the way in which the dancer’s movements and the stage props developed together. Anna Smith hung up ‘spines’ – rectangular strips of paper – and asked for responses. The dancers responded individually to a single paper strand and later demonstrated their improvisation or movement response to the other dancers. Dancer K. produced a successful phrase with a ‘subtle, beautiful way the paper reacted to the slightest movement from her body’. This led to finding ways that all the dancers could employ variations on this phrase to dance in relation to one strand and then explore the effects of combining the movements of multiple dancers within and around multiple strands. An idea developed in one week became transformed as the creative process continued (and some ideas dropped from sight never to return). The paper spines become doorways, corridors and portals. In the performance of *Red Rain* they were lit to suggest a mysterious curtain that both conceals and reveals. In Week 7 one dancer found that ‘The material was starting to sit in my body more comfortably ... Finally, the strain of remembering was fading and I could begin to really inhabit the movement’.

As a result of all this, the choreographer could begin to sequence phrases and structure them in time. She sought ways to link body and limb positions into a seamless narrative of expressive movement while also linking individually developed sequences. Creativity in composing this dance thus involved not only the sequencing, melding and linking the parts of the work but, more importantly, the creation of the parts themselves.



OBR. 10 Červené fazole byly rozsyhány tak, aby vyznačovaly obrys těla tanečnice, a když se tanečnice pohnula, linie těla, kterou za sebou zanechala, naznačovala stopy psané krví.
Foto: Anna Smith

FIG. 10 Red beans could be poured to mark the outline of a dancer's body and when the dancer moved, the line of the body left behind suggested traces written in blood. Photo: Anna Smith

Body srovnání

S ohledem na další části tohoto článku se můžeme zamyslet nad tím, jak případová studie *Red Rain* souvisí s dílem Jetelové a s architektonickým návrhem. Zatímco podstatná část díla Jetelové i veškerá architektura se odvíjejí od určitého místa, vznikající choreografie spíše „objevovala“ scénu, než aby začínala s konkrétním místem. Obojí samozřejmě vyžaduje vytvoření atmosféry (pokud možno dynamické) pro diváky tanečního vystoupení nebo výstavy, ale pouze architektura poskytuje afordance pro obyvatele budovy, jejichž role je poněkud odlišná od role diváků tanečního představení, sochy či performance. V případě tance poskytuje každý tanečník a několik objektů na jevišti afordance, které jsou pro ostatní tanečníky v neustálém pohybu, zatímco jediná performerka v Liberci má pevný soubor afordancí, které nabízejí klávesnice a pedály, ale diváci zažívají nejen její pohyby a zvuky, které vyluzuje, ale také rozmanité obrazce trpytivých ploch a odrazy, které její performance vytváří.

V tanci i na výstavě v Liberci poskytuje vizuální a zvukový pohyb základní afordance pro kontemplaci diváků, kteří zůstávají téměř nehybní, vsedě na židlích nebo vestoje na galerii. Naproti tomu v prostorách uvnitř budovy a kolem ní jsou afordance navrženy tak, aby nabízely nejen příležitosti ke kontemplaci nebo emocím, ale především i praktické afordance, které nabízejí potenciál k *rozmanité činnosti, akci a pohybu* návštěvníka nebo obyvatele – herce, který se řídí plánovaným scénářem architekta, a zároveň svým vlastním scénářem.

Hledání cesty v prostoru a čase

Než se dostaneme k závěrečné případové studii práce Magdaleny Jetelové, rád bych věnoval dvě nadcházející části vybraným myšlenkám vycházejícím z neurovědy a kognitivních věd a jejich vztahu k architektonickému návrhu, které jsem popsal ve své knize *When Brains Meet Buildings*. Začneme dvěma velmi odlišnými pohledy na část mozku zvanou hipokampus; jeden vychází ze studií zaměřených na prostorovou navigaci u krysy a druhý vychází z lidské epizodické paměti (Arbib, 2021, části 2.5, 3.3 a 10.3).

Hipokampus v prostoru a čase

John O'Keefe a Jonathan Dostrovsky (1971) pozorovali činnost neuronů v hipokampu u *krysy*, která zkoumá prostor (arénu). Zjistili, že některé buňky, tzv. poziční buňky, mají fascinující vlastnost a že to, co zřejmě korelovalo s jejich aktivací, nebylo to, co krysa dělá nebo co vidí, ale to, kde se v aréně nachází. Každá buňka se aktivovala, když se krysa nacházela v malé oblasti, nazvané *poziční pole* dané buňky. Moje skupina (Arbib & Lieblisch, 1977; Guazzelli, Corbacho, Bota, & Arbib, 1998) mezitím prostřednictvím modelování zkoumala, jaké oblasti mozku a neurony se musejí přidat k hipokampu a pozičním buňkám, aby byla podporována navigace. Aktivace

Points of comparison

In light of other sections of this paper, we may consider how the *Red Rain* case study relates to the work of Jetelová and to architectural design. Much of Jetelová's work and all architecture starts from a site, whereas the developing choreography 'discovered' a set rather than starting with a site. Clearly, each involves the creation of a (possibly dynamic) atmosphere for viewers of the dance or the exhibition but only the architecture has the provisions of affordances for the inhabitants of the building whose role is rather different from that of the viewers of the dance or sculpture or performance. For the dance, each dancer and the few objects on the stage provide affordances that are in constant flux for the other dancers, whereas the sole performer in Liberec has the fixed set of affordances offered by keyboard and pedals, but the audience experiences not only her movements and the sounds they produced but also the diverse patterns of shimmering plates and reflections her performance sets up.

In the dance and in Liberec, visual and auditory movement provides the essential affordances for the contemplation of the audience, each of whom remains almost immobile as they sit in their chairs or stand in the gallery. By contrast, in the spaces within and around a building, the affordances are designed not only to offer opportunities for contemplation or emotion but, distinctively, they must also offer practical affordances that offer the *potential for diverse actions and movements* by the visitor or inhabitant – an actor who is both following scripts intended by the architect and following scripts of their own.

Wayfinding in Space and Time

Before we get to the final case study of the work of Magdalena Jetelová in this paper, I devote two sections to ideas from neuroscience and cognitive science and their relations to architectural design that were presented in my book *When Brains Meet Buildings*. We start with two very different views of a region in the brain called the hippocampus, one based on rat studies of navigation, and one based on episodic memory in humans (Arbib, 2021, Sections 2.5, 3.3 and 10.3).

The Hippocampus in Space and Time

John O'Keefe and Jonathan Dostrovsky (1971) observed firing of neurons in the hippocampus of a *rat* exploring an arena. They found that certain cells, *place cells*, had the fascinating property that what seemed to correlate with their firing was not what the rat was doing or what the rat saw, but where the rat was in the arena. Each cell would fire when the rat was in a small region called the cell's *place field*. Meanwhile, my group's modeling (Arbib & Lieblisch, 1977; Guazzelli, Corbacho, Bota, & Arbib, 1998) explored what brain regions and neurons must be added to hippocampus and place cells to support navigation. The firing of a group of place cells can provide

skupiny pozičních neuronů může poskytnout signál „teď jsi tady“, ale pro účely navigace je třeba vědět nejen to, kde jste, ale také to, kde chcete být – a mít prostředky, jak zjistit, jak se tam dostat. Zde vidíme důležitý poznatek z neurovědy (který byl základem práce, za kterou získal O’Keefe Nobelovu cenu) a můžeme využít modelování, abychom zjistili, jak by mohl být užitečný v širším systému propojujícím různé oblasti mozku. Konkrétně jsme byli schopni modelovat různé mechanismy v hlavě, které nám umožňují orientovat se v konkrétní oblasti (máme *kognitivní* mapu), nebo se naopak spoléhat na aplikaci, která nám řekne, kam máme jít. Na jiném místě této knihy v kapitole „Mozek jako topologický procesor“ navazuje Karel Ježek na experimenty s hipokampem prováděné na krysách a analyzuje interakce topografických a topologických funkcí mozku.

Nejznámější studie lidského hipokampu (Scoville & Milner, 1957) se zaměřila na muže jménem HM, který měl silné epileptické záchvaty. Jeho neurochirurg se snaze tyto nervové bouře zastavit nechal unést a namísto malého řezu v mozku odstranil pacientovi velkou část po obou stranách mozku, která zahrnovala i hipokampus. Zajímavé pro nás, ale nikoli pro pacienta, bylo, že ztratil schopnost vytvářet nové epizodické vzpomínky – pamatoval si události ze svého života před operací, ale nedokázal vytvořit vzpomínky na události, které zažil po ní. Zbývající části mozku mu sice umožňovaly učit se novým dovednostem, ale neuchoval si žádné vzpomínky na okamžiky, kdy danou dovednost dříve uplatnil – mozek je komplexní soubor systémů.

Místa versus lokace

Zajímavý problém výše uvedených dat spočívá v tom, že zjištění plynoucí z pokusů s krysami se týkají navigace, hledání cesty v prostoru, zatímco lidská studie se zaměřuje na epizodickou paměť, kterou můžeme chápat jako hledání cesty v čase. Při prostorové navigaci můžeme využívat kognitivní mapu míst v našem světě a cest mezi nimi; při navigaci v čase hledáme cesty, které spojují související epizody z autobiografické paměti.

Při chůzi nebo jízdě autem naše chování většinou nevychází z přesných měřitelných údajů. Podobným způsobem, když si vybavujeme události z minulosti, jejich indexace většinou neproběhla na základě hodin, které nám tikají v hlavě, ale spíše na základě asociací mezi událostmi, například „těsně předtím, než jsem se oženil“. To je samozřejmě komplikováno tím, že pro moderního člověka mohou některé události (i když jich nebude mnoho) zahrnovat nesmazatelné souvislosti s kalendářem (i když např. i v případě pádu Dvojčat na Manhattanu si většina lidí vybaví měsíc a den – 11. září, pro Američany 9/11, méně lidí si asi vybaví rok).

V rámci úvah o vztahu mezi subjektivními formami prostoru a času bych rád zdůraznil, že „místa“ hipokampálních pozičních buněk nejsou (většinou) „místa“ relevantní pro epizodickou paměť. Srovnajme např. dvě odpovědi na otázku: „Kde jste se seznámili?“ Ta, kterou máte v epizodické paměti, by mohla znít: „V domě našeho

a ‘you are here’ signal, but for navigation you need to know not only where you but also where you want to be – and have the means to figure out how to get there. Here we see an important finding from neuroscience (it was the basis for work that led to the award of a Nobel Prize to O’Keefe) and the challenge of modeling to see how it might be useful in a larger system uniting diverse brain regions. In particular, we were able to model the different mechanisms in our head for knowing our way around a region (we have a *cognitive* map) which does require the hippocampus or instead relying on an app to tell us where to go which does not. Elsewhere in this book, Karel Jezek builds on experiments on rat hippocampus in his chapter, ‘Brain as a topological processor’, where he analyses interactions of topographical and topological functions of the brain.

The most famous study of the *human* hippocampus (Scoville & Milner, 1957) focused on a man named HM who had massive epileptic fits. His neurosurgeon got carried away in his attempt to block these neural storms – instead of trying to make a small cut out of HM’s brain, he carved out a huge area on both sides of the brain that included the hippocampus. Intriguingly for us, but not for him, HM lost the ability to create new episodic memories – he could remember episodes in his life from before the operation, but he could not make memories of episodes he experienced thereafter. However, remaining parts of his brain allowed him to learn new skills even though he retained no memories of occasions when he had practiced that skill before – a brain is a system of systems.

Places versus Locations

One interesting challenge posed by the above data is that the rat findings focus on navigation, wayfinding in space, whereas the human study focuses on episodic memory, which we may consider as wayfinding in time. In spatial navigation, we can exploit a cognitive map of the places in our world and the paths between them; in navigation through time, we seek paths that link related episodes from autobiographical memory.

When we are out walking or driving, we rarely base our behavior on precise metrics. Similarly, when we recall episodes from our past, they are not indexed by a clock running in our heads but rather by associations between events such as ‘just before I got married’. This, of course, is complicated by the fact that for a modern human, some (but relatively few) of the events may involve indelible references to the calendar (though even with the fall of the Twin Towers in Manhattan, while most will recall the month and day – 9/11 for Americans – fewer may be able to recall the year).

In pondering this relationship between subjective forms of space and time, I want to stress that the ‘places’ of hippocampal place cells are not (in general) the ‘places’ relevant to episodic memory. Contrast two answers to ‘Where did you meet?’ The one you hold in episodic memory might be ‘At the house of our mutual friend’, an *episodic place*. However, an implausible place-cell-like answer might be ‘I was 4 steps

společného přítele,“ což je *epizodické místo*. Nepravděpodobná odpověď vycházející z pozičních buněk však může znít: „Byl jsem 4 kroky od středu vchodových dveří domu našeho společného přítele, když jsem se otočil o 12 stupňů doprava od osy kolmé k zárubni dveří,“ což je *lokace/poloha* nebo *lokometrické místo* v rámci lokální mapy pro epizodické místo.

Architekt navrhuje prostory obsahující významná 3D místa, jež umožňují akce, jednání a/nebo zážitky. K těmto místům patří *výhledy, průchozí body na trase a akční body*. Architekt může utvářet *exteriér budovy* nejen za účelem umístění vnitřních prostor a přístupu k těmto prostorám, ale také aby nabídl vlastní estetické uspokojení, přičemž *vnitřní prostory* utváří tak, aby měly různou atmosféru a poskytovaly afordance pro různé praktické potřeby. Mezi „uzly“ definující budovu tak mohou patřit externí místa, která budovu situují ve vztahu k jejímu okolí. Toto souvisí s naším hluboko uloženým ancestrálním vnímáním a hodnocením krajiny. Takové *výhledy*, tj. pohledy na budovu zvenku, mohou sloužit jak praktickým, tak estetickým účelům.

Kognitivní mapy jako „Graf světa“

A nyní se konečně vracíme k topologii! V Eulerově „mapě“ Královce odpovídaly uzly velmi rozsáhlým epizodickým místům – různým částem pevniny a hrany odpovídaly mostům, které je spojovaly. Arbib a Lieblich (1977; Lieblich & Arbib, 1982) aplikovali tento rámec na krysy běžající v bludišti a vytvořili model grafu světa, který představuje nejen kognitivní mapu, kterou může mít krysa pro konkrétní bludiště, ale také naše rozmanité kognitivní mapy různých „světů“, jako je interiér našeho domova, známá místa a cesty v našem městě, nebo mapa světa spojující různá letiště prostřednictvím letů z jednoho letiště na druhé. Každý *Graf světa* / ‘*World Graph*’, *WG* / má uzly, které reprezentují významná místa, a hrany jako přímé cesty mezi nimi.

- *Uzel/vrchol* odpovídá rozpoznatelnému místu nebo situaci v konkrétním „světě“.
- Každá *hrana* představuje *přímou* cestu z jednoho rozpoznatelného „místa/situace“ na jiné.

Známým vizuálním příkladem je mapa metra (například klasická mapa londýnského metra), kde uzly odpovídají stanicím a mezi dvěma uzly je vždy samostatná hrana pro každou vlakovou trať, která nabízí nonstop spojení mezi stanicemi. Na rozdíl od takové mapy však náš Graf světa jako model mozkových mechanismů podporujících kognitivní mapu zahrnuje nejen reprezentaci těchto znalostí, ale také mechanismy, díky nimž člověk, který zná svou stávající polohu, najde cestu na požadované místo. Kromě toho, stejně jako můžeme znát pěší okolí některé stanice metra, musí naše celková kognitivní mapa propojovat „uzly“ a „hrany“ s *lokometrickými* mapami, které lokalizují určité uzly ve vztahu k detailům relevantním pro pohyb po jejich okolí.

from the middle of the front door of the house of our mutual friend, having turned 12° to the right of a line perpendicular to the door frame’, a *location* or *locometric place* within a local chart for the episodic place.

The architect designs spaces that contain significant 3D places that afford actions and/or experiences. These places include *viewpoints*, *via points*, and *action points*. The architect may shape the *exterior of a building* not only to accommodate the spaces within and the means to access them, but to offer aesthetic satisfactions of its own, while shaping the *interior spaces* to have a variety of atmospheres and provide affordances for a range of different practical needs. The ‘nodes’ that define a building can thus include external places that situate the building in relation to its environment. This relates to our deep ancestral assessment of landscapes. Such *viewpoints* for seeing the building from the outside may both serve practical purposes and have aesthetic benefits.

Cognitive maps as ‘World Graphs’

And now at last we come back to topology! In Euler’s ‘map’ of Königsberg, the nodes corresponded to very large episodic places, the different land masses, and the edges corresponded to bridges linking them. Applying this framework to rats running mazes, Arbib and Liebllich (1977; Liebllich & Arbib, 1982) introduced the World Graph Model, noting that it represents not only the cognitive map a rat may have of a particular maze but also the diverse cognitive maps we have of our different ‘worlds’, such as the interior of our home, familiar places and roads in our town, or a world map linking airports through the flights between them. Each *World Graph (WG)* has nodes to represent significant places, and edges for the direct paths between them.

- A *node* corresponds to a recognizable place *or situation* in a particular ‘world’.
- Each *edge* represents a *direct* path from one recognizable ‘place/situation’ to another.

A familiar visual example is a Metro map (such as the classic map of the London Underground) where the nodes correspond to stations, and there is a separate edge between two nodes for each different train line that offers a nonstop connection between their stations. However, unlike such a map, our World Graph model of brain mechanisms supporting a cognitive map includes not only a representation of such knowledge but also mechanisms whereby, knowing one’s present location one figures out a path to a desired location. In addition, just as we may have knowledge of walking around the neighborhood of some Metro station, so must our overall cognitive map link the ‘nodes’ and ‘edges’ to *locometric maps* that locate certain nodes in relation to the details relevant to moving around their neighborhood.

Kreativita v architektuře: Navigace zaměřená jiným směrem

Konkrétní význam scénáře

Pro můj popis architektonického návrhu je klíčový pojem *scénář* používaný v kognitivní vědě – scénář jako *obecná* specifikace určité kategorie lidského chování, nikoli scénář divadelní hry, který určuje, co kdo říká ve správném pořadí, nebo který podrobně popisuje, jak bude konkrétní osoba vystupovat při konkrétní příležitosti (Arbib, 2021, část 2.1; Schank & Abelson, 1977). *Scénář* v tomto smyslu slova tvoří obecný rámec příslušného chování... ale toto chování se může značně lišit. Vezměme si např. scénář narozeninové oslavy. Ten se liší podle toho, z jaké země či tradice pocházíte, ale ve většině západních zemí musí zahrnovat narozeninový dort se svíčkami, oslavence, který má narozeniny, hosty, dárky a různá povinná chování. Například svíčky se musí zapálit, a pak se sfouknou, ale pořadí jednotlivých událostí může být poměrně flexibilní a různé narozeninové oslavy přidávají různé variace a další chování, které nejsou ve scénáři.

Návrh budovy se liší od návrhu sochy, protože po budově se pohybujeme a používáme ji různými způsoby; pojdme si tudíž otázku navigace přeformulovat s ohledem na tuto skutečnost. *Uživatel* zkoumá budovu, aby si vytvořil kognitivní mapy, které podpoří navigaci mezi významnými místy v daném prostředí. Naproti tomu *architekt* navrhující budovu musí navrhnout místa, která by mohla splňovat *praktické i estetické* potřeby potenciálních budoucích uživatelů dané budovy – prostředí, které bude podporovat dokonce i zkoumání a smysl pro hru. Již jsem naznačil, že při navrhování budovy si musí architekt představit scénáře, které má budova podporovat. Např. v restauraci rychlého občerstvení bývá scénář omezený, ale většinou budova poskytuje místa, kde se lidé mohou chovat různým způsobem. Architekt musí poskytnout jak praktické afordance, tj. možnosti podporující činnosti, které je potřeba pro konkrétní scénář vykonávat, tak i estetické afordance nebo afordance týkající se atmosféry. Zásadní je, že návrh vyžaduje převedení každého scénáře na soubor míst, která podporují různé afordance, jež daný scénář nabízí.

Creativity in Architecture: Taking Navigation in a Different Direction

Introducing a particular sense of scripts

The notion of script developed in cognitive science is crucial for my account of architectural design – a *script* as the *general* specification of one class of behaviors that people might perform (Arbib, 2021, Section 2.1; Schank & Abelson, 1977) rather than being like the script in a play that specifies what everybody says in the right order, or that gives the details of how one person performs on a particular occasion. A *script* in this sense provides a general framework for related behaviors ... but these behaviors can vary greatly. Consider the script for a birthday party. This varies depending on what country or tradition you are from, but in much of the West, there must be a birthday cake with candles, somebody whose birthday it is, guests, presents, and various obligatory behaviors. The candles must be lit before they are blown out, for example, but the order of events may be fairly flexible, and different birthday parties will add different variations and additional behaviors that are not in the script.

Design of a building differs from design of a sculpture because we move around a building and use it in diverse ways, so let's reframe the problem of navigation with this in mind. The *user* explores the building to build cognitive maps that support navigating between significant places in the environment. By contrast, the *architect* designing a building must design places that could meet the needs, *both practical and aesthetic*, of potential future users of that building – an environment that even supports exploration and a sense of play. I have thus suggested that in designing a building, the architect must include imagining the scripts it must support. In a fast food restaurant, the script may be restrictive, but in general a building provides places where people can play out various behaviors. The architect must provide both practical affordances to support the actions one needs to execute for that script as well as aesthetic or atmospheric affordances. The crucial point is that further design requires translating each script into a set of places that support the various affordances that are on offer in the script.

Případová studie č. 6. Lina Bo Bardi přepisuje scénáře

Lina Bo Bardi byla architektka italského původu, která dlouhá léta úspěšně působila v Brazílii. Již samotný exteriér budovy jejího Muzea umění v Saõ Paulu je neobvyklý, ale to, co zde chci zdůraznit, je, že změnila scénáře vystavování a prohlížení obrazů. Místo toho, aby obrazy pověsila na stěny, nechala každý obraz namontovat na sklo zasazené do betonových bloků, které rozmístila po celém sále, čímž vytvořila nový scénář pro zážitek umění. Namísto toho, abychom se soustředili na konkrétní část zdi při prohlížení jednoho uměleckého díla, a pak se přesunuli doleva nebo doprava, nabídla Bo Bardi obohacený soubor možností – afordancí: můžete se rozhlédnout po sále a vidět několik různých obrazů, než se rozhodnete, ke kterému z nich se přesunete. Bo Bardi vzala standardní scénáře a přepsala je, a poté vytvořila architekturu, která tyto nové scénáře realizuje. Obecněji řečeno, architekti tedy nemusí převzít pouze existující scénáře, ale mohou je také upravit nebo dokonce vymyslet nové (**OBR. 11**).

Integrace scénářů, kognitivních map a návrhu

Architekt navrhuje prostory tak, že nejen vytvářejí atmosféru a přinášejí estetický požitek, ale také umožňují různorodé chování v budově a jejím okolí. Viděli jsme, že scénáře týkající se konkrétní budovy definují místa potřebná k zajištění možností (afordancí) a každý scénář tak implikuje Graf světa, který ukazuje, jak mají být tato místa propojena – neumísťuje je ale do euklidovského prostoru definovaného fyzickým místem realizace (lokality), kde má být budova postavena. Dobrý architektonický návrh musí propojit každý uzel s významným místem, které upoutá pozornost uživatele a nabídne mu odměnu v podobě estetického zážitku a/nebo splnění praktické funkce. Uzly musí být propojeny hranami, které identifikují nezbytné přechody. Viděli jsme také, že uživatel budovy si vytváří kognitivní mapy, které se vztahují k relevantním scénářům, zatímco architekt tento proces „obrací“ a navrhuje místa a prostory, které tyto mapy a scénáře podpoří. Všimněte si posunu od grafů světa / kognitivních map představujících to, *co je v hlavě* člověka pohybujícího se v určitém prostředí, k představě, kterou může *explicitně vyjádřit* architekt v předběžné specifikaci významných míst a jejich vazeb, které budou obsahem návrhu.

Toto je však pouze malá část procesu tvorby návrhu. Místa specifikovaná prostřednictvím scénářů a afordancí musí být nakonec spojena s vlastnostmi lokality a musí být skutečně umístěna spolu s rozvržením cest mezi nimi a vše musí být stanoveno s trojrozměrnou přesností. Jedna věc je říci, že prostor bude vytvářet určitou atmosféru, a zcela jiná věc je navrhnout prostorové formy a vztahy, které tuto atmosféru skutečně zprostředkují. Dalším úkolem architekta je zasadit místo do trojrozměrného prostoru tak, aby skutečně umožňovalo nějakou užitečnou činnost nebo akci, nebo určit, jak vytvořit konkrétní hranu, působící především jako oblast přechodu, tak, aby rovněž spoluvytvářela určitou atmosféru.

Case Study 6. Lina Bo Bardi Rewrites the Scripts

Lina Bo Bardi was an Italian born architect who flourished in Brazil for many years. The exterior of her Art Museum in São Paulo is distinctive, but what I want to emphasize here is that she changed the scripts for exhibiting and viewing the paintings. Instead of arranging the paintings along the walls, she had each painting mounted on glass set in concrete blocks, and scattered these all around the floor, providing a new script for experiencing the art. Instead of having us focus on part of a wall to look at one piece of art and then move left or right, Bo Bardi offered an enriched set of affordances – you can look around the room and see various paintings before you choose which one to move to next. Bo Bardi has taken the standard scripts and rewritten them, and then created an architecture that exercises those scripts. More generally, then, architects need not only employ existing scripts, but can also vary the scripts or even come up with new ones (FIG. 11).

The Integration of Scripts, Cognitive Maps, and Design

The architect designs spaces that not only create atmosphere and provide aesthetic pleasures but also provide affordances for diverse behaviors in and around the building. We have seen that the scripts associated with a building define places needed to provide affordances, and each script thus implies a World Graph showing how these places are to be connected – but they do not locate them in the Euclidean space defined by the site on which the building is to be constructed. Good architectural design must link each node to a significant place that captures the user's attention, with each offering aesthetic rewards and/or serving practical functions. Nodes must be linked by the edges that identify the necessary transitions. We have also seen that the user of the building forms cognitive maps that relate to the scripts that are relevant to them, whereas the architect 'inverts' the process to design places and spaces that support those maps and scripts. Note the shift from world graphs/cognitive maps as representing what is *in the head* of a person navigating an environment to a representation the architect *can make explicit* in a preliminary specification of significant places, and their linkages, to be contained in the design.

However, this is only a small part of the design process. The places specified by scripts and affordances must be linked eventually to features of the site, and the places must indeed be placed with the layout of the paths between them specified with three-dimensional exactitude. It is one thing to say that a space will afford a certain atmosphere, quite another to design the spatial forms and relationships that will indeed convey that atmosphere. Again, further challenges emerge for the architect in embedding a place in three-dimensional space so that it does indeed afford some useful action, or specifying how an edge, though still there primarily acting as a zone of transition, may be sculpted so that it too conveys a certain atmosphere.





OBR. 11 Pohled na exteriér a interiér Muzea umění Liny Bo Bardi v Saõ Paulu
FIG. 11 Exterior and interior views of Lina Bo Bardi's Saõ Paulo Art Museum

A vzniká ještě další problém. Každý scénář specifikuje Graf světa pro „svět“, který může daný scénář podpořit. Architekt může zjistit, že místa vysněná v rámci dvou různých scénářů mohou být realizována stejným místem v budově. Návrh obsahující pro každý scénář samostatná místa může být neekonomický a nepohodlný, a proto je nutné posoudit i na této úrovni abstrakce, která místa je vhodné sloučit, a sjednotit tak Grafy světa. Rozhodnutí o tom, které uzly sloučit, může vycházet z obecných úvah o tom, jak budou scénáře do sebe zapadat v prostoru a čase při skutečném používání budovy. Scénář přípravy jídla i scénář mytí nádobí může specifikovat používání dřezu s tekoucí vodou. Měla by však budova obsahovat dva dřezy, nebo je vhodné „tyto uzly sloučit“? V domácnosti příprava jídla předchází mytí nádobí, a proto je praktické a úsporné mít jeden dřez. V kuchyni restaurace probíhá příprava i mytí současně a uzly nelze sloučit. Svou roli může hrát i kultura, jako je tomu v případě japonského používání futonů, které eliminuje potřebu oddělené ložnice. Dalším úkolem je pak umístit tato místa ve výše definovaném euklidovském prostoru a v rámci místa výstavby budovy do tří rozměrů (které definují rozšířenou lokometrickou mapu pro každý graf světa) – což je proces, který může sám o sobě zahrnovat přetvoření těchto prostorů. V rámci tohoto procesu je třeba věnovat velkou pozornost vlastním formám, které poskytují rozmanité afordance, a také těm aspektům významnosti, které dodávají podstatu, případně zajímavost oblastem přechodu, které odpovídají hranám. Dá se říci, že své Grafy světa založené na scénáři sladíme s topografií, v níž je budova situována (a to se týká velké části díla Jetelové).

Celkově bychom mohli říci, že praktické afordance tvoří prózu prostoru a našeho pohybu tímto prostorem a našich akcí trvajících v čase, zatímco afordance týkající se atmosféry tvoří poetiku prostoru. V topologickém prostoru vzkvétá naše představivost a kognitivní mapy, ale naše budovy a sochy jsou zasazeny do geometrického prostoru a jsou výtvořem času (jak osobního, tak historického, přičemž obojí je ovlivněno kulturou, která je nám vlastní).

Je potřeba nadále objevovat a zkoumat empirická data z oblasti neurovědy a kognitivních věd a provádět další modelování. Tyto snahy budou výzvou pro neurovědce a architektům přinesou nové koncepty a nové způsoby myšlení, takže budou moci přistupovat k budoucím projektům s hlubším pochopením architektonického návrhu a architektonického zážitku.

There is a further problem to be faced. Each script has specified a World Graph for a ‘world’ that can support that script. The architect may discover that places dreamed up as part of two different scripts may be realized by the same place in the building. A design that specifies separate places for each script may be both uneconomical and inconvenient and so, even at this level of abstraction, an assessment is required of which places to merge, unifying World Graphs in the process. This decision as to which nodes to merge may rest on broad considerations assessing how the scripts will fit together in space and time in the actual use of a building. Both the food preparation script and the washing up script may specify the use of a sink with running water. But should the building include two sinks, or ‘merge the nodes’? In a home, preparing a meal comes before cleaning up and so having one sink is practical and economical. In a restaurant kitchen, both cooking and cleaning up are ongoing, and the nodes cannot be merged. Culture can play a role, too, as in the Japanese use of futons removing the need for a separate bedroom. The further challenge is then to locate these places in the Euclidean space defined above, and around the building site in three dimensions (registration to which defines the expanded-sense locometric map for each world graph) – a process that may itself involve the reshaping of those spaces. In the process, much attention must be placed on the actual forms that provide the varied affordances, as well as those aspects of materiality that give substance and possible interest to those zones of transition corresponding to the edges. We may say that we are matching our script-based World Graphs with the topography in which the building is situated (and this relates to much of Jetelová’s work).

To offer an overall perspective, we might say that practical affordances provide the prose of space and of our movements through space and our actions as extended in time, while atmospheric affordances provide the poetics of space. Our imagination and cognitive maps thrive in topological spaces, but our buildings and sculptures are embedded in geometric space and are creatures of time (both personal and historical, with both influenced by the culture in which we are immersed).

There are vast realms of empirical neuroscience and cognitive science data left to be explored and discovered and much further modeling to be done. These efforts will challenge the neuroscientist and offer the architect new concepts and new ways of thinking to approach future projects with enriched understanding of the experience and design of architecture.

Případová studie č. 7: Jørn Utzon a návrh budovy opery v Sydney

Důležitým rysem návrhu opery v Sydney⁶ J. Utzona byla její vizualizace, kdy si ji představil jako budovu, která bude viditelná ze všech stran, přičemž tváře, které budova ukazuje světu, vytvářejí atmosféru, která obohacuje prostředí místa, kde se nachází, a zároveň je jím ovlivněna. Utzon si byl velmi dobře vědom toho, že kolem místa na Bennelong Point proplouvají výletní lodě a trajekty. Zohlednil také výhledy z přilehlé Botanické zahrady a především z mostu Sydney Harbour Bridge, který je dominantou přístavu. Ostatní účastníci soutěže o návrh opery v Sydney toto opomněli. Kromě toho navrhl budovu tak, aby respektovala místo, kde se nachází, tím, že umístil sály vedle sebe a přizpůsobil tak návrh obrysu Bennelong Point.

6 — Tato případová studie je malou ukázkou studie uvedené v části 9.2 knihy (Arbib, 2021), která čerpá z různých zdrojů, zejména však z díla Jørn Utzon: Architect of the Sydney Opera House / Jørn Utzon: Architekt budovy opery v Sydney / (Fromonot, 1998).

Poskytl také praktické afordance, které mohou (ale nemusí) atmosféru obohatit. Ve svém soutěžním návrhu Utzon popsal přístup do sálů následovně: „Architektura zdůrazňuje charakter místa Bennelong Point a maximálně využívá výhledy. Přístup diváků je stejně snadný jako v řeckém divadle a zřetelně vyjádřený jednoduchou konstrukcí schodišť. Diváci přijíždějící automobily, vlaky a trajekty se shromažďují a jako slavnostní průvod jsou vedeni do příslušných sálů díky čistému a jednoduchému řešení schodiště.“

Lidé ve společnosti; lidé v historii

Dosud jsme se zaměřovali na to, jak budou jednotliví lidé vnímat umělecké dílo nebo architekturu. Na závěr několik slov, která nám připomenou, že lidé jsou společenské bytosti. Lidská pohoda zahrnuje pocit sounáležitosti s kulturou, která je podporuje. Příliš často se kultura chová k příliš mnoha lidem jako k pouhým kolečkům ve stroji.

Případová studie č. 8. Magdalena Jetelová a její Červený kouř

Všimněte si let 1983–1985, kdy vznikal tento projekt, ve vztahu k sametové revoluci ve dnech 16. – 28. listopadu 1989. Projekt byl umístěn před tehdejšími ateliérem Jetelové v pražské části Tichá Šárka. Různé opuštěné domy označovaly jeho místa pomocí pomíjivého prostředku – neustále se šířícího červeného kouře.

Projekt *Marking with Red Smoke / Označeno červeným kouřem* / vyjadřoval ne-svobodu, přísnou kontrolu a silnou manipulaci, kterou zažívali lidé v komunistickém Československu. Jetelová (pc) zdůraznila, že červený kouř vypouští nouzová

Case Study 7: Jørn Utzon Designing the Sydney Opera House

An important feature of Utzon's design of the Sydney Opera House ⁶ was that he visualized it as a building to be seen from all sides, with the faces the building presents to the external world creating an atmosphere that enriches and is informed by the environment of its site. Utzon was very much aware that pleasure boats and ferries circumnavigate close to the site on Bennelong Point. He also took into account the overlooking views from the adjacent Botanical Gardens and, above all, the Sydney Harbour Bridge, which dominates the Harbour. The other competitors in the competition to design the Sydney Opera House failed to recognize this. Moreover, he designed a building that respected its site by placing the auditoriums side by side, conforming the design to the contour of Bennelong Point.

6 — This Case Study is a small sample of that presented in Section 9.2 of (Arbib, 2021), a study which draws on diverse sources, but especially on Jørn Utzon: Architect of the Sydney Opera House (Fromonot, 1998).

He also provided practical affordances that may (but need not) enrich the atmosphere. In his competition entry, Utzon spoke of access to the auditoriums as follows: 'The architecture emphasises the character of Bennelong Point and takes the greatest advantage of the view. The approach of the audience is easy and as distinctly pronounced as in Grecian theatres by uncomplicated staircase constructions. The audience is assembled from cars, trains and ferries and led like a festive procession into the respective halls, thanks to the pure staircase solution.'

Humans in Society; Humans in History

So far, our focus has been on how individual people will experience an artwork or architecture. To close, a few words to remind us that humans are social beings. Human well-being involves the sense of belonging to a culture that supports them. Too often, the culture treats too many people as mere cogs in the machine.

Case Study 8. Magdalena Jetelová's *Marking by Red Smoke*

Note the years for this project, 1983–1985, relative to the Velvet Revolution of 16–28 November 1989. This project was located in front of Jetelová's then studio in the Tichá Šárka district of Prague. Various abandoned houses marked its locations through the transient means of constantly-dispersing red smoke.

Marking with Red Smoke expressed the lack of freedom, and the strict control and strong manipulation experienced by the people of communist Czechoslovakia.



OBR. 12 Opera v Sydney a most Sydney Harbour Bridge při pohledu z přístavu
FIG. 12 The Sydney Opera House and the Sydney Harbour Bridge as seen from the Harbour



OBR. 13 Bennelong Point před výstavbou budovy opery v Sydney a po ní.
FIG. 13 Bennelong Point before and after the construction of the Sydney Opera House



OBR. 14 Magdalena Jetelová a její Červený kouř
FIG. 14 Jetelová's Red Smoke

světlice vypuštěná člověkem v nouzi – jasně viditelná obdoba S.O.S. Hlavním problémem tehdejšího Československa pro Jetelovou nebyl samotný komunismus, ale *despotická vláda*. Symbolické volání o pomoc v projektu Jetelové mělo také upozornit na růst „rudých“ konglomerátů na politické mapě v každé zemi podléhající despotické vládě, ať už se hlásila ke komunismu, či nikoli. Video z akce ilustrované na obrázku 14 ukazuje červený kouř vycházející z děr ve střeších a z oken opuštěných domů, jejichž dynamicky se měnící atmosféra je přerušována pohledy na dětskou ruku postupně barvící celý svět na červeno (<http://cead.space/Detail/people/24>). Vidíme zde spojení doslovného významu slova „atmosféra“ s jeho metaforickým užitím v architektuře, kterému jsme se věnovali výše.

Tato symbolika je zvláště v dnešní době (přednáška byla prezentována v květnu 2022 a článek byl dokončen v říjnu 2022) nepříjemně palčivá, neboť každý den nám televize a internet přináší obrazy dýmu, který se šíří na Ukrajině v důsledku války vedené Putinovým Ruskem; zde se nejedná o despotismus komunistického SSSR, ale o despotismus Ruska, kde se prosadil revanšistický carský sen o ruském impériu.

V projektu *Marking with Red Smoke* červený kouř dočasně označoval místo v nouzi. Naproti tomu v projektu *Island* soustředěný paprsek světla sleduje hranici, která v jistém smyslu neexistuje, protože toto „místo“ nepatří ani Americe, ani Evropě, dokonce ani Islandu, a přesto ožívuje paměť, kterou si uchovává země, ale která dávno předcházela vzniku lidského druhu a sahá do doby, kdy se rozestoupily kontinentální šelfy. Vědecký objev kontinentálního driftu rozšířil naši paměť do hlubokého dávnověku, kdy se vlivem proudění magmatu od sebe oddělily kontinentální desky v rámci významné geologické transformace.

V závěru bych rád upozornil na to, že historie sice může být zapomenuta, ale ať už z hlediska umění, či z hlediska architektury, politice ani historii se nelze vyhnout. Ignorujeme-li tuto skutečnost, činíme tak na vlastní nebezpečí, a přitom hledáme způsob, jak tvořit umění a architekturu, které by přispěly k lidskému zdraví a blahobytu v době, kdy ve světě zuří nerovnosti, války plodící hlad a uprchlíky a katastrofické klimatické změny (Arbib, Banasiak & Othón Villegas-Solís, 2022).

Jetelová (pc) stressed that red smoke is what is released by an emergency flare sent up by someone in distress – a highly visible equivalent of an S.O.S. The key issue for Jetelová about Czechoslovakia of that time was not that it was communist, but that the government was *despotic*. Jetelová’s symbolic call for help was also intended to bring attention to the growth of ‘red’ conglomerations on the political map in any country subject to despotic rule, whether or not it claimed to be communist. A video from the event illustrated in Figure 14 shows red smoke coming out of holes in roofs and windows of abandoned houses whose dynamically changing atmospheric forms are interrupted with views of a child’s hand gradually painting the whole world red (<http://cead.space/Detail/people/24>). Here we see the merger of the literal meaning of ‘atmosphere’ with its metaphorical use in architecture that has occupied us above.

This symbolism seems disturbingly poignant now (the talk was presented in May 2022 and the paper completed in October 2022) as each day television and the internet bring us images of the smoke spreading across Ukraine from the war waged by Putin’s Russia, where the despotism is not that of the communism of the USSR but that of a Russia where the revanchist Tsarist dream of a Russian Empire has taken hold.

In *Marking with Red Smoke*, the red smoke temporarily designated a place in distress. By contrast, in the *Iceland Project* a concentrated beam of light traces a border which in some sense does not exist, since it is a ‘place’ belonging neither to America, nor Europe, nor even to Iceland, and yet which provides the reanimation of a memory that the earth holds but which long predated the emergence of the human species, as continental shelves pulled apart. The scientific discovery of Continental Drift has extended our memory into a Deep Time where distinct continental plates are pushed apart by the continuing flow of magma in an ongoing geological transformation of immense power.

We conclude with the understanding that, whether in art or architecture, history may be forgotten but politics and history are nonetheless unavoidable. We ignore such understanding at our peril as we face the challenges of providing art and architecture that can enhance human well-being at a time of rampant inequality, wars that breed hunger and refugees, and catastrophic climate change (Arbib, Banasiak, & Othón Villegas-Solis, 2022).

Literatura

Arbib, M.A. (2013). (Why) Should Architects Care about Neuroscience? In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Neuroscience: a Tapio Wirkkala – Rut Bryk Design Reader* (pp. 42–75). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala Rut Bryk Foundation.

Arbib, M.A. (2019). Poetics and More in Performative Architecture: Towards a Neuroscience of Dynamic Experience and Design. In M. Kanaani (Ed.), *The Routledge Companion to Paradigms of Performativity in Design and Architecture: Using Time to Craft an Enduring, Resilient and Relevant Architecture* (pp. 103–114). New York, Abingdon: Routledge.

Arbib, M.A. (2021). When Brains Meet Buildings: A Conversation between Neuroscience and Architecture. New York: Oxford University Press.

Arbib, M.A., Banasiak, B., & Othón Villegas-Solís, L. (2022). Systems of Systems: Architectural Atmosphere, Neuromorphic Architecture, and the Well-Being of Humans and Ecospheres. In M. Kanaani (Ed.), *The Routledge Companion to Ecological Design Thinking: Healthful Ecotopian Visions for Architecture and Urbanism* (pp. 64–74). London: Taylor & Francis.

Arbib, M.A., & Liebllich, I. (1977). Motivational learning of spatial behavior. In J. Metzler (Ed.), *Systems Neuroscience* (pp. 221–239). New York: Academic Press.

Bachelard, G. (1958). *Poetics of Space*. Boston: Beacon Press.

Böhme, G. (2014). Atmosphere: New Perspectives for Architecture and Design. In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Atmosphere* (pp. 7–14). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala – Rut Bryk Foundation.

Ewert, J.-P., & Arbib, M.A. (Eds.). (1989). *Visuomotor Coordination: Amphibians, Comparisons, Models and Robots*. New York: Plenum Press.

Foiret, C. (2015). Domestication of Pyramids by Magdalena Jetelová. *Trendland*. Retrieved from <https://trendland.com/domestication-of-pyramids-by-magdalena-jetelova/>

Fromonot, F. (1998). *Jørn Utzon: Architect of the Sydney Opera House*. (Translated from the French by Christopher Thompson), Milan: Electa.

Gibson, J. J. (1977). *The ecological approach to visual perception*. Boston: Houghton Mifflin.

Griffero, T. (2014). Architectural Affordances: The Atmospheric Authority of Space. In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Atmosphere* (pp. 15–47). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala – Rut Bryk Foundation.

Guazzelli, A., Corbacho, F. J., Bota, M., & Arbib, M.A. (1998). Affordances, Motivation, and the World Graph Theory. *Adaptive Behavior*, 6, 435–471.

References

- Arbib, M.A. (2013). (Why) Should Architects Care about Neuroscience? In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Neuroscience: a Tapio Wirkkala – Rut Bryk Design Reader* (pp. 42–75). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala Rut Bryk Foundation.
- Arbib, M.A. (2019). Poetics and More in Performative Architecture: Towards a Neuroscience of Dynamic Experience and Design. In M. Kanaani (Ed.), *The Routledge Companion to Paradigms of Performativity in Design and Architecture: Using Time to Craft an Enduring, Resilient and Relevant Architecture* (pp. 103–114). New York, Abingdon: Routledge.
- Arbib, M.A. (2021). *When Brains Meet Buildings: A Conversation between Neuroscience and Architecture*. New York: Oxford University Press.
- Arbib, M.A., Banasiak, B., & Othón Villegas-Solís, L. (2022). Systems of Systems: Architectural Atmosphere, Neuromorphic Architecture, and the Well-Being of Humans and Ecospheres. In M. Kanaani (Ed.), *The Routledge Companion to Ecological Design Thinking: Healthful Ecotopian Visions for Architecture and Urbanism* (pp. 64–74). London: Taylor & Francis.
- Arbib, M.A., & Lieblich, I. (1977). Motivational learning of spatial behavior. In J. Metzler (Ed.), *Systems Neuroscience* (pp. 221–239). New York: Academic Press.
- Bachelard, G. (1958). *Poetics of Space*. Boston: Beacon Press.
- Böhme, G. (2014). Atmosphere: New Perspectives for Architecture and Design. In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Atmosphere* (pp. 7–14). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala – Rut Bryk Foundation.
- Ewert, J.-P., & Arbib, M.A. (Eds.). (1989). *Visuomotor Coordination: Amphibians, Comparisons, Models and Robots*. New York: Plenum Press.
- Foiret, C. (2015). Domestication of Pyramids by Magdalena Jetelová. *Trendland*. Retrieved from <https://trendland.com/domestication-of-pyramids-by-magdalena-jetelova/>
- Fromonot, F. (1998). *Jørn Utzon: Architect of the Sydney Opera House*. (Translated from the French by Christopher Thompson), Milan: Electa.
- Gibson, J. J. (1977). *The ecological approach to visual perception*. Boston: Houghton Mifflin.
- Griffero, T. (2014). Architectural Affordances: The Atmospheric Authority of Space. In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Atmosphere* (pp. 15–47). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala – Rut Bryk Foundation.
- Guazzelli, A., Corbacho, F. J., Bota, M., & Arbib, M.A. (1998). Affordances, Motivation, and the World Graph Theory. *Adaptive Behavior*, 6, 435–471.

King, E. (2000). Magdalena Jetelová: Enigmatic Sculpture of Time and Place. *SCULPTURE*, 19(4), 18–25.

Lieblich, I., & Arbib, M.A. (1982). Multiple Representations of Space Underlying Behavior. *The Behavioral and brain sciences*, 5, 627–659.

Mollerup, P. (2013). Wayshowing > Wayfinding: Basic & Interactive: BIS Publishers.

O’Keefe, J., & Dostrovsky, J. O. (1971). The hippocampus as a spatial map: preliminary evidence from unit activity in the freely moving rat. *Brain Research*, 34, 171–175.

Pallasmaa, J. (2018). *Between Art and Science – reality and experience in architecture and art*. A talk at the Summer course on Architecture and Neuroscience, NewSchool of Architecture and Design, San Diego, 14 August 2018.

Schank, R., & Abelson, R. (1977). *Scripts, Plans, Goals and Understanding: An Inquiry into Human Knowledge Structures*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Scoville, W. B., & Milner, B. (1957). Loss of Recent Memory After Bilateral Hippocampal Lesions (Reprinted in *J Neuropsychiatry Clin Neurosci* 2000, 12, pp. 103–113). *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatr.*, 20, 11–21.

Stevens, C. (2005). Chronology of Creating A Dance: Anna Smith’s Red Rain. In R. Grove, C. Stevens, & S. McKechnie (Eds.), *Thinking in four dimensions: Creativity and cognition in contemporary dance* (pp. 169–187): Melbourne University Press.

Thibaud, J.-P. (2014). Installing an Atmosphere. In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Atmosphere* (pp. 49–66). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala – Rut Bryk Foundation.

Zumthor, P. (2012). *Thinking Architecture* (Third, expanded edition) Basel: Birkhauser.

- King, E. (2000). Magdalena Jetelová: Enigmatic Sculpture of Time and Place. *SCULPTURE*, 19(4), 18–25.
- Lieblich, I., & Arbib, M.A. (1982). Multiple Representations of Space Underlying Behavior. *The Behavioral and brain sciences*, 5, 627–659.
- Mollerup, P. (2013). *Wayshowing > Wayfinding: Basic & Interactive*: BIS Publishers.
- O’Keefe, J., & Dostrovsky, J. O. (1971). The hippocampus as a spatial map: preliminary evidence from unit activity in the freely moving rat. *Brain Research*, 34, 171–175.
- Pallasmaa, J. (2018). *Between Art and Science – reality and experience in architecture and art*. A talk at the Summer course on Architecture and Neuroscience, NewSchool of Architecture and Design, San Diego, 14 August 2018.
- Schank, R., & Abelson, R. (1977). *Scripts, Plans, Goals and Understanding: An Inquiry into Human Knowledge Structures*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Scoville, W. B., & Milner, B. (1957). Loss of Recent Memory After Bilateral Hippocampal Lesions (Reprinted in *J Neuropsychiatry Clin Neurosci* 2000, 12, pp. 103–113). *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatr.*, 20, 11–21.
- Stevens, C. (2005). Chronology of Creating A Dance: Anna Smith’s Red Rain. In R. Grove, C. Stevens, & S. McKechnie (Eds.), *Thinking in four dimensions: Creativity and cognition in contemporary dance* (pp. 169–187): Melbourne University Press.
- Thibaud, J.-P. (2014). Installing an Atmosphere. In P. Tidwell (Ed.), *Architecture and Atmosphere* (pp. 49–66). Espoo, Finland: Tapio Wirkkala – Rut Bryk Foundation.
- Zumthor, P. (2012). *Thinking Architecture* (Third, expanded edition) Basel: Birkhauser.

Prolínání uzavřenosti.
Ke kontinuitě dění místa
jako vztahů vnitřku a vnějšku

Filip Šenk

The Blending of Closedness. On the Continuity of the Action of a Place as Relations of the Outside and Inside

Filip Šenk

Zkoumání místa, respektive toho, jak popsat, kde a jak se nacházíme na světě, se na různorodých teoretických i praktických úrovních vrací do centra pozornosti řady významných myslitelů a tvůrců.¹ Nelze přitom jednoduše shrnout motivace a intence všech pod jeden teoretický rámec, nicméně pojem místa i praxe utváření míst je provazují. V textu se budu zabývat blíže podobou vztahu místa a prostoru a vnitřku a vnějšku² na příkladech z oblasti současné architektury a umění.³

1 — Není proto náhodou, že jeden z nejvýraznějších intelektuálů, Bruno Latour, se těmto otázkám věnoval v řadě projektů.

2 — A dílčím způsobem také procesům interiorizace a exteriorizace.

3 — Podobami vztahu vnitřku a vnějšku se věnoval ve svém filozofickém rozpracování pojmu místa E. S. Casey v knize *Getting Back into Place*, ovšem zabývá se otázkou spíše na obecné úrovni. Jakkoli to není v tomto textu explicitně rozpracováno, motiv hrany, rozhraní a okraje je prozkoumáván především ve vztahu k současným podobám situovanosti. Srov. Edward S. Casey, *Getting Back into Place*, Indianapolis 2009, s. 125–130.

Místo se může zprvu jevit jako triviální a neproblematický pojem, protože jím v běžné řeči rozumíme cosi nám blízkého, známého, srozumitelného v opozici vůči dále a neznámému či jinakému. Dále bychom jej mohli popisovat jako cosi uzavřeného, uspořádaného a poskytujícího orientaci; oproti nekonečnosti otevřeného prostoru. Vždyť pokud se ptáme, kde se nacházíme, nejčastěji odpovíme odkazem k určitému místu, které však je zpravidla komplexní událostí. Právě proto také působí nemalé potíže, pokud usilujeme o teoretickou explikaci a reflexi místa a jeho vztahů.

Termín topologie je nejčastěji používána jako označení pro specifickou oblast matematiky, ovšem pokud vyjdeme ze základu slova, skládá se ze slova *topos*, řecké slovo pro označení místa,⁴ a *logie* jako označení pro nauku. Lze proto oprávněně hovořit o nauce o místě, což se samo o sobě může jevit mírně paradoxně. Místo je totiž vždy jedinečné a nepřenositelné, lze jej poznávat jen v jeho konkrétnosti. Otázka proto zní, zda je možné vytvářet systematickou a univerzální definici místa.

4 — Srov. Jeff Malpas, *Heidegger and the Thinking of Place. Explorations in the Topology of Being*, Cambridge-London 2017, s. 11n.

K teorii místa a prostoru

V architektonické a širším pohledem také v umělecké diskuzi se otázka místa stala jednou z těch, které výrazně přispěly ke zpochybňování autority modernismu a jeho derivátů v poválečném období. Klíčovým textem se v tomto dění stala přednáška *Bauen Wohnen Denken* německého filozofa Martina Heideggera, kterou přednesl k architektům na jejich pozvání v roce 1951. Zásadní teze, s níž Heidegger přišel, obrátila obvyklou a očekávatelnou úlohu architektury: aby bylo zřejmé, jak stavět, nejprve je třeba bydlet. Možná bychom, pravděpodobně jako němečtí architekti, očekávali, že se filozof vyjádří k různým podobám architektury a pokusí se zformulovat teorii hodnot, která bude vycházet z toho, že je třeba zvolit správnou podobu domu, aby člověk mohl dobře bydlet. Vztah bydlení a stavění však chápe Heidegger tak, že „budujeme a postavili jsme něco, nakolik bydlíme, to znamená, nakolik jsme jako

The exploration of a place or, more precisely, the way of describing where and how we are in the world, has been a recurring focus of attention for a number of important thinkers and creators on a variety of theoretical and practical levels.¹ All the motivations and intentions of all of them cannot be summarized under a single theoretical framework, yet they are intertwined by the notion of place and the practice of place-making. In this text, I will closely deal with the shape of the relationship between place and space and the inside and outside,² using examples from contemporary architecture and art.³

1 — It is therefore no coincidence that Bruno Latour, one of the most prominent intellectuals, has addressed these issues in a number of projects.

2 — And partly also to the processes of interiorization and exteriorization.

3 — E. S. Casey dealt with the shape of the relationship between the inside and outside in a philosophical work on the place concept in his book *Getting Back into Place*, however, more on a general level. Although it is not explicitly worked out in this text, the edge, transition and interface is being examined mostly in the relationship to the current forms of situatedness. Cf. Edward S. Casey, *Getting Back into Place*, Indianapolis 2009, pp. 125–130.

At first, a place may appear as a trivial and unproblematic concept, because in common parlance, we perceive it as something which is close to us, familiar, understandable in opposition to the distant and unknown or different. We could further describe it as something closed, ordered and providing orientation; in opposition to the infinity of open space. After all, when we ask where we are, we most frequently answer with a reference to a particular place which is, however, usually a complex event. This is the very reason why it also causes considerable difficulties when we strive for theoretical explication and reflection of the place and its relations.

The term *topology* is most frequently used to denote a specific area of mathematics, yet should we start from the base of the word, it consists of the word *topos*, the Greek term for place⁴ and *logia*, the word for science. One can therefore legitimately speak of a science of a place, which in itself may appear slightly paradoxical. A place is always unique and non-transferable; it can only be seen in its concreteness. The question therefore is whether it is possible to create a systematic and universal definition of a place.

4 — Cf. Jeff Malpas, Heidegger and the Thinking of Place. Explorations in the Topology of Being, Cambridge-London 2017, p. 11n.

On theory of place and space

In the architectural and, more broadly, artistic debate, the question of a place has become one of those that have significantly contributed to challenging the authority of modernism and its derivatives in the post-war era. In this development, a text of key importance was the lecture *Bauen Wohnen Denken* by the German philosopher Martin Heidegger, which he delivered to architects at their invitation in 1951. The fundamental thesis that Heidegger came up with reversed the usual and expected role of architecture: in order to understand how to build, one must first live. Like the German architects, we might have expected the philosopher to comment on the

bydlící.“⁵ Smysluplné stavění se nestará, abychom bydleli, vztah je opačný: abychom dokázali vůbec smysluplně stavět, je nejprve třeba správně bydlet ve světě, jinak řečeno mít správný vztah ke světu.⁶

5 — Martin Heidegger, *Budovat, bydlet, myslet*, in: Jiří Ševčík – Monika Mitášová, *Česká a slovenská architektura 1971–2011*, Praha 2013, s. 75.

6 — *Ibidem*, s. 81.

Tato teze nedává odpověď na nejistotu tvoření forem, otáčí pozornost na vztah člověka ke světu. Zatímco Heidegger hledá odpověď, jak se chovat v budoucnu, jak budovat správný vztah ke světu, zde je zájem zaměřen na to, jak se přiblížit porozumění již existujících staveb. Ty v sobě nesou uložený vztah ke světu, jež se projevuje uzpůsobováním prostoru, artikulováním žitého prostředí. Do něj se promítají předpoklady založené na dobovém chápání prostoru a pozice člověka v něm: je zde proto nutné rozlišit kvalitativní uchopení tohoto pojmu. Na jedné straně totiž existuje popis prostoru, jak jej utváří novověká věda s důrazem na matematizaci světa. Zvláště je to patrné na příkladu přírodních věd, které prostor usilují zachytit objektivně, bez vazby k prožívané zkušenosti prostoru.⁷ Takto uchopený prostor bývá popisován jako homogenní, univerzální a potenciálně nekonečný, ovšem v naší zkušenosti se prostor takto nejeví. Je heterogenní, skládá se z míst, jež jsou součástí proměnlivé sítě s centry, uzly a periferií, a především jsou jedinečná a uzavřená. Skrze místa roste význam a pomáhá nám se orientovat ve světě. Finský architekt Juhani Pallasmaa proto využívá v návaznosti na norského historika a teoretika architektury Christiana Norberga-Schulze pro takovou zkušenost označení existenciální prostor.⁸

7 — Tak prostor chápal také Heidegger: Pokud mluví o prostoru, nikdy mu nejde o prostor „zkrocený“ nebo „existenciální“; „zná jen inertní prostor geometrického univerza, z něhož je pro jeho nehostinnost třeba uniknout.“ Ivan Blecha, *Technika, stavění a bydlení u Martina Heideggera a José Ortegy y Gasset* in: *Idem, Prostory zjevnosti*, Zlín 2018, s. 93.

8 — Robert McCarter – Juhani Pallasmaa, *Understanding Architecture*, London – New York 2012, s. 15.

Současně je třeba připomenout, že Heideggerovo zdůrazňování míst jako zásadních opor pro existenci nebylo přijímáno vždy s otevřenou náručí. Rázně je zpochybnil například filozof Emmanuel Lévinas, stejně jako Heidegger v úvodu své dráhy myslitele posluchač Edmunda Husserla.⁹ Rétoriky míst se totiž obával pro její zdůrazňování hranic a okrajů, které dělí lidi na blízké a cizí, na „my“ a „oni“. V krátkém úderném textu *Heidegger, Gagarin a my* vyjadřuje tyto obavy a představuje v argumentu vůči Heideggerovi právě kosmonauta Jurije Gagarina, který ukázal svým činem možnost odpoutání se od místa – v tomto případě dokonce od samotné Země, ačkoli jen krátkodobě. Pro Lévinase je to kladná zkušenost, protože „připoutání k Místu, bez něhož by vesmír ztratil svůj smysl a stěžl by vůbec existoval, to je ono rozpolcení lidstva na domorodce a cizince. A z tohoto hlediska je technika méně nebezpečná než genii loci, bůžkové Místa.“¹⁰

9 — Hodí se doplnit, že Lévinas byl výrazně ovlivněn také Heideggerem.

10 — Emmanuel Lévinas, *Heidegger, Gagarin a my*, in: *Idem, Etika a nekonečno*, Praha 2009, s. 122–124.

various forms of architecture and attempt to formulate a theory of values based on the need to choose the right form of the house in order to live well. Yet Heidegger understands the relation between living and building to mean that *'we build and have built something, insofar as we live, that is, insofar we are as dwellers'*.⁵ For meaningful building does not care for us to live, the relationship is reverse: to be able to build meaningfully, we must first live in the world properly, in other words, to have a proper relationship with the world.⁶

This thesis does not provide an answer to the uncertainty of the creation of forms; it focuses on the relationship of man to the world. While Heidegger seeks an answer to how to behave in the future, how to develop the right relationship to the world, here the focus is on how to approach the understanding of already existing constructions. These carry an embedded relationship to the world manifested in the ordering of the space and in the articulation of the lived environment. This environment reflects the assumptions based on the understanding of the space and the position of man in it at given time: it is therefore necessary to distinguish the qualitative grasp of this concept. On one hand, there is the description of space as formed by modern science which emphasizes the mathematization of the world. This is particular evident in the example of natural sciences which seek to capture the space objectively, free of any reference to the lived experience of the space.⁷ A space perceived in such way is often described as homogenous, universal and potentially infinite, yet in our experience, space does not appear this way. It is heterogeneous, consisting of places which form a shifting network with centres, nodes and peripheries – and above all, it is unique and closed. It is through places that meaning grows and helps us navigate the world. The Finnish architect Juhani Pallasmaa therefore uses – following the Norwegian architectural historian and theorist Christian Norberg-Schulz – the term *existential space* for such experience.⁸

At the same time, it should be remembered that Heidegger's emphasis on places as essential supports for existence has not always been received with open arms. It was vigorously challenged by, for example, the philosopher Emmanuel Lévinas, who was, just like Heidegger, a student of Edmund Husserl at the beginning of his thinker's career.⁹ Indeed, he feared the rhetoric of places for its emphasis on the boundaries and edges which divide people to the close and strange ones, to 'us'

5 — Martin Heidegger, *Budovat, bydlet, myslet* (Building, Dwelling, Thinking), in: Jiří Ševčík – Monika Mitášová, *Česká a slovenská architektura 1971–2011*, Prague 2013, p. 75.

6 — Ibidem, p. 81.

7 — This is how Heidegger also understood space: When talking about space, it is never a space which is 'tamed' or 'existential'; 'he only knows the inert space of the geometric universe from which it is, due to its hostility, necessary to escape'. Ivan Blecha, *Technika, stavění a bydlení u Martina Heideggera a José Ortegy y Gasset* (Technology, Building and Dwelling in Martin Heidegger and José Ortega y Gasset) in: Idem, *Prostory zjevnosti*, Zlín 2018, p. 93.

8 — Robert McCarter – Juhani Pallasmaa, *Understanding Architecture*, London – New York 2012, p. 15.

9 — It is worth adding that Lévinas was also strongly influenced by Heidegger.

Jak už je patrné také z krátkého představení toho, co může být považováno za novodobý filozofický¹¹ základ debaty o náležitostech, potřebě místa i jeho překračování¹², důležitým bodem této debaty je obecný vztah vnitřku a vnějšku. Nejde však v tomto případě pouze o prostou opozici nacházení se mezi čtyřmi stěnami a mimo ně.¹³ To je sice nejběžnější zkušenost vlastního vynacházení se uvnitř, přesto ta sama může být dále rozváděna pomocí otázek, jakou roli hraje vnějšek v mé zkušenosti vnitřku.¹⁴ Nelze tak utvářet rigidní opozici dvou pojmů, protože tak vzniká mylný dojem jejich úplného oddělení.

V případě fenomenologicky orientovaných teoretiků a historiků architektury, kteří do určité míry z Heideggerova myšlení vychází, můžeme vysledovat argumentaci pro budování vnitřku vytvářeného prostředí v návaznosti na poznání přírodního prostředí. Rozvinutou podobu této argumentace najdeme například v knize *Genius loci*¹⁵ od Christiana Norberga-Schulze či podobně v knize *Vztahy*¹⁶ Tomáše Valeny. Vychází ze sdílené propozice, v níž moderní existence je poznamenána ztrátou místa. Oba se dívají na vystavěné prostředí a ve svých analýzách dochází k závěru, že je třeba hledat takové způsoby myšlení a utváření architektury, v nichž pojem místa bude centrální. Nabádají vrátit se zpět k takovému myšlení architektury, jež má ambici utvářet především zázemí pro blízký vztah ke světu. Christian Norberg-Schulz pro kategorizaci těchto vztahů vnitřku a vnějšku v rámci myšlení místa přichází s vlastními pojmy, v nichž rozlišuje romantickou, kosmickou a komplexní podoby žitého prostředí. Chápe místo jako vyjádření vztahu člověka ke krajině, k obývanému prostředí, který může nabývat především třech podob: vizualizuje pochopení, doplňuje a symbolizuje.¹⁷ Metoda norského teoretika je založena na přístupu s ahistorickým náhledem, protože se často dotýká odhalování esencí. Neznamená to však úplné opomíjení historie, nicméně v případě vysvětlení jednotlivých staveb či urbáních celků hledá autor nadhistorické momenty. Ty vychází z krajinného rázu a jsou v jeho pojetí základem *genia loci*, protože s ním spojené vazby se projevují v různých formálních uspořádáních, v případě Prahy na příklad od gotiky přes baroko po kubismus.¹⁸

11 — Celkový podrobný přehled filozofických koncepcí místa a prostoru a jejich historické proměnlivosti viz Edward S. Casey, *The Fate of Place. A Philosophical History*, Berkeley and Los Angeles 1998.

12 — Vedle zmíněných autorů výrazně k tomuto tématu přispěl např. Karsten Harries v knize *Etická funkce architektury*. Karsten Harries, *Etická funkce architektury*, Praha 2011, s. 176.

13 — Cyril Říha trefně upozornil na to, že uzavřenost, pokud by měla být úplná, je zkušeností vězení. Cyril Říha, *Děrovaná zeď a vágní terén*, in: Petr Prášek, Alena Roreitnerová (edd.), *Myšlení hranice / hranice myšlení*, Praha 2021, s. 188–189.

14 — Pro obraznost lze uvést jednoduchý příklad: když sedím v pokoji, jsem sice doslova uvnitř, současně vizuálně a často i akusticky propojený s okolím díky oknům.

15 — Christian Norberg-Schulz, *Genius loci. Krajina, místo, architektura*, Praha 1994 a 2010.

16 — Tomáš Valena, *Vztahy. O vazbě k místu v architektuře*, Praha 2018.

17 — Norberg-Schulz (pozn. 15), s. 17.

18 — Tomáš Valena sice sdílí s Norbergem-Schulzem východiska, přesto se vůči norskému kolegovi kriticky vymezuje. Vhled norského historika a teoretika se mu nezdá dostatečný především pro nedostatečně reflektování jedinečnosti a univerzality, pro které sám využívá pojmy *topu* a *typu*. Valena (pozn. 16), s. 18.

and ‘them’. In a short, punchy text titled *Heidegger, Gagarin and Us*, he expresses these fears and presents in his argument against Heidegger, the very astronaut Yuri Gagarin who demonstrated through his actions the possibility to detach oneself from a place – in this case, from the Earth itself, even if only briefly. This was a positive experience for Lévinas, as *‘attaching oneself to the Place, without which the universe would lose its meaning and would hardly exist at all, is the very division of humanity into natives and aliens. And from this view point, technology is less dangerous than the genii loci, the little gods of Place’*.¹⁰

10 — Emmanuel Lévinas, *Heidegger, Gagarin a my (Heidegger, Gagarin and Us)* in: *Idem, Etika a nekonečno*, Prague 2009, pp. 122–124.

As can also be seen from the brief introduction of what could be considered the modern philosophical¹¹ basis for the debate on the requisites, the need for and transcendence of the place¹², the general relationship between the inside and outside is an important point of this debate. However, this is not just about a simple opposition of being inside or outside the four walls.¹³ It might be the most common experience of finding oneself inside, yet this experience could be elaborated further by asking what role the outside plays in my experience of the inside.¹⁴ No rigid opposition of the two concepts can be thus formed, because it would give a false impression of their complete separation.

11 — For a full overview of philosophical concepts of place and space and their historical variability, see Edward S. Casey, *The Fate of Place. A Philosophical History*, Berkley and Los Angeles 1998.

12 — In addition to the abovementioned authors, this theme was considerably contributed by, for example, Karsten Harries in his book *The Ethical Function in Architecture*. Karsten Harries, *Etická funkce architektury*, Prague 2011, p. 176.

13 — Fittingly, Cyril Říha pointed out that, should closedness be complete, it is the experience of a prison. Cyril Říha, *Děrovaná zeď a vágní terén (The Punched Wall and the Vague Terrain)*, in: Petr Prášek, Alena Roreitnerová (edd.), *Myšlení hranice / hranice myšlení (Borders of Thinking)* Prague 2021, pp. 188–189.

14 — To give a simple example: when I am sitting in a room, although I am literally inside, I am also visually and often acoustically connected to my surroundings through the windows.

In the case of phenomenologically oriented theorists and historians of architecture, who to some extent draw on Heidegger’s thought, we can trace an argument for the building of the inside of created environment following the understanding of the natural environment. We can find a developed form of this argumentation in the book *Genius loci*¹⁵ by Christian Norberg-Schulz, for instance, or in the book *Vztahy (Relations)*¹⁶ by Tomáš Valena. It is based on a shared proposition in which modern existence is tainted by the loss of place. They both look at the built environment and conclude in their analyses that such ways of thinking and shaping architecture have to be sought to which the concept of a place is central. They call for such ways of architectural thinking that have the ambition to form, above all, a background for a close

15 — Christian Norberg-Schulz, *Genius loci. Krajina, místo, architektura*, Prague 1994 and 2010.

16 — Tomáš Valena, *Vztahy. O vazbě k místu v architektuře (Relations. On the Bond to the Place in Architecture)*, Prague 2018.

Pokud je však cílem sledování architektonického myšlení, nelze sledovat jen texty ať už filozofů, teoretiků nebo praktiků v oblasti stavebního umění. Podstatný podíl architektonického myšlení se děje skrze samotné návrhy, skrze artikulaci formy a jejích vztahů, jinak řečeno skrze myšlení formou a jí ustavovaných vztahů. Právě v přechodech mezi vnitřkem a vnějškem lze sledovat proměny chápání a tvoření konkrétní pozice ve světě, a proto se budu dále věnovat především konkrétním stavbám.¹⁹

K praxi utváření místa a prostoru

Opakovat, že Ludwig Mies van der Rohe je výjimečným architektem, je nošením dříví do lesa. Přesto alespoň stručně lze připomenout, že patří k nejvýznamnějším představitelům ideje The International Style, jak ji představili Henry-Russell Hitchcock a Philip Johnson na slavné výstavě Modern Architecture: International Exhibition v MoMA v New Yorku v roce 1932.²⁰ Sám však nebyl dogmatikem, který by sledoval za všech okolností předem ustavený manifest. Při bližším pohledu na barcelonský pavilon nebo vilu Tugendhat, slavné stavby druhé půle 20. let 20. století, lze spatřit komplexní uvažování architektury. Obě stavby jsou spojené s pojmem plynulého či tekutého prostoru. Ten nelze uplatnit pouze na definování vnitřních dispozic, protože by tím opět vyvstala mylná totální opozice vnitřku a vnějšku. Ozřejmuje také vztah celku stavby k místu, stejně jak k pojmovým abstrakcím, jako je prostor.

Pokud však pozornost bude zaměřena na poválečnou Miesovu tvorbu, pak se k úvahám nabízí další kanonická stavba, totiž Farnsworth House (1951). Ve srovnání s měkkostí a flexibilitou hranice zmíněných dvou staveb se Farnsworth House liší. Zatímco u vily Tugendhat je možné hranici mezi interiérem vily a vnějškem místy rozvolnit stažením velkých skleněných oken, Farnsworth House má hranice interiéru bytelně ustavené. Jsou sice také skleněné, panoramatické, ovšem jejich hmota nemá kam mizet. Dům (204 m²), fakticky však jde o víkendové útočiště, je postavený v blízkosti řeky Fox ve státě Illinois, přímo v její záplavové oblasti, a proto je vyzdvížen nad úroveň terénu. Ovšem ani tato úprava nezbránila opakovanému zatopení. Ve svém výrazu je dům výrazně uměřený, jedná se o jednoduchý kvádr s jedním plynulým obytným prostorem. Formu rytmicky určují čtyři symetrické ocelové podpěry patrné v celé výšce stavby.

Struktura uspořádání místa je složena z několika na sebe navazujících částí a uzavřená místnost je pouze jednou z nich, byt nejrozlehlejší. Pokud přijdeme k domu, je třeba po schodech vystoupat na rozměrnou vyvýšenou terasu, a pak dále pokračovat po několika stupních na krytou verandu, z níž je možné vstoupit do interiéru. Interiér je

19 — Snažím se ukázat vymezení sledovaných vztahů na kanonických stavbách, nicméně jsem si vědom limitů svého výběru staveb pro možnost úplného zpracování tématu. Přesto věřím, že vybrané stavby a díla představují opodstatněnou skupinu, která dokládá vrstevnatost vztahů místa a prostoru, vnitřku a vnějšku. Vztah vnitřku a vnějšku např. tematizuje Tadao Ando, viz Řiha (pozn. 13), s. 191–192.

20 — Srov. <https://www.moma.org/calendar/exhibitions/2044>, vyhledáno 27. 9. 2022.

relationship with the world. Christian Norberg-Schulz comes up with his own terms to categorise these relations of inside and outside within the thinking of place, in which he distinguishes between romantic, cosmic and complex form of the lived environment. He understands place as an expression of the human relationship to the landscape, to the inhabited environment which can take three forms in particular: it visualizes understanding, complements and symbolizes.¹⁷ The Norwegian theorist's method is based on an approach with an ahistorical view, as it often touches on revealing of essences. However, this does not mean neglecting history entirely, but when explaining individual buildings or urban units, the author seeks superhistorical moments. These are based on the nature of the landscape and are, in his concept, the basis of the genius loci, because the bonds connected to it are manifested in various formal arrangements, in the case of Prague, for instance, from Gothic to Baroque to Cubism.¹⁸

17 — Norberg-Schulz (note 15), p. 17.

18 — Although Tomáš Valena shares Norberg-Schulz's starting points, he is critical of his Norwegian colleague. He finds the insight of the Norwegian historian and theorist insufficient, especially because it lacks sufficient reflection of the uniqueness and universality, for which he himself uses the concept of topos and type. Valena (footnote 16), p. 18.

If the aim, however, is to follow architectural thought, we cannot follow texts of philosophers theoreticians or practitioners in the field of construction art only. A considerable proportion of architectural thinking is done through the designs themselves, through the articulation of form and its relations, in other words, through thinking through form and the relations it establishes. It is in the very transitions between inside and outside that we can observe the changes in understanding and creation of a particular position in the world; that is why I will especially focus on specific buildings.¹⁹

19 — I try to show the delineation of the relationship observed on canonical buildings, yet I am aware of the limits of my selection of buildings for the possibility to treat the topic completely. I, however, believe that the selected buildings and works represent a valid group which demonstrated the layered relations between place and space, inside and outside. The relationship of inside and outside is, for example, thematised by Tadao Ando, see Řiha (footnote 13), pp. 191–192.

On the practice of shaping place and space

To repeat that Ludwig Mies van der Rohe is an exceptional architect is like carrying coals to Newcastle. We can, nevertheless, recall that he was one of the most prominent exponents of the International Style concept, as presented by Henry-Russell Hitchcock and Philip Johnson at the famous exhibition *Modern Architecture: International Exhibition* in MoMA, New York, in 1932.²⁰ He himself was, however, not a dogmatist who would always strictly follow the established manifesto. A closer look at the Barcelona Pavilion or Tugendhat Villa, both famous structures of the late twenties of 20th century, reveals a complex architectural thinking. Both buildings are linked to the notion of liquid or fluid

20 — Cf. <https://www.moma.org/calendar/exhibitions/2044>, as searched on 27. 9. 2022.



OBR. 1 Ludwig Mies van der Rohe, Farnsworth House, Plano, Illinois, USA, 1951 –
foto: Victor Grigas

FIG. 1 Ludwig Mies van der Rohe, Farnsworth House, Plano, Illinois, USA, 1951;
Photo: Victor Grigas

space. This notion cannot be applied to defining of the inner layouts only, as this would again lead to the erroneous total opposition of the inside and outside. It also clarifies the relationship of the entire building to the place, as well as to conceptual abstractions, such as space.

If we should, however, focus on Mies' post-war work, then another canonical building, namely Farnsworth House (1951), is offering itself for consideration. Compared to the softness and flexibility of the two abovementioned buildings, Farnsworth House is different. Whereas in Tugendhat Villa, the boundary between the interior of the villa and the exterior can be loosened at places by pulling the large glass windows, the interior boundaries of Farnsworth House are established in a bullish manner. They are also glass, panoramic, but their mass has nowhere to disappear. The house (204 m²), though effectively a weekend retreat, is built close to the Fox River in Illinois, right in the flood zone, and is therefore elevated above the ground level. However, even this modification has not prevented repeated flooding. The house is highly restrained; it is a simple block with a single continuous living space. The form is rhythmically determined by four symmetrical steel supports which are visible throughout the entire height of the building.

The structure of the place layout is composed of several interconnected parts and a closed room is just one of them, although the largest. When approaching the house, we have to climb up the stairs to a large raised terrace, and then continue up several steps to a covered veranda from which we can enter the interior. The interior is surrounded by all-glass walls, so the visual connection with the surroundings is virtually uninterrupted. However, it is the visual connection only. 'Only' might not be quite the right word, yet it fully corresponds with Mies' intention. The architect was fully aware of the location for which he designed the house²¹, and the form is adapted to this. The glass wall gives the inhabitant the opportunity to observe the natural pace of the surrounding nature: it stands in opposition to it to some extent. The simple, precise, clean and constant geometry is combined with the visual permeability of glass in opposition to the material, changing and living nature. Therefore, although the natural scenery does not physically intervene with the interior, it is still an integral part of it in the form of a living image. The boundary between the human and nature has become both transparent and impenetrable; the windows here cannot be opened.

21 — Cf. Mies' statement: 'If you observe nature through the glass wall of Farnsworth House, it acquires a deeper meaning than if you were looking at it from the outside'. See Michael Caldwell, *Zvláštní detail (Strange Details)*, Zlín 2012, p. 146. Or yet another statement by Mies: 'Nature should have a life of its own; we should not destroy it with the colours of our houses and interiors. We should try to unite nature, houses and man to a higher unity. When you observe nature through the glass walls of Farnsworth House, it acquires a deeper meaning than outside. More is asked of the nature because it becomes a part of a greater whole... I myself have stayed in the house from morning to night. Until that moment I had no idea how colourful nature could be. One has to be careful and only use neutral colours in the interior, because the exterior has all kinds of colours. These colours are constantly changing and I would like to add that it is simply magnificent'. See Franz Schulze – Edward Windhorst, *Mies van der Rohe, Chicago and London 2012*, p. 251.

obklopen celoprosklenými stěnami, a tak je vizuální propojení s okolím prakticky bez přerušení. Ovšem zůstává pouze u vizuálního propojení. „Pouze“ není zcela vhodný termín, přesto odpovídá Miesovu záměru. Architekt si jasně uvědomoval lokalitu, do které dům navrhuje²¹, a forma je tomu uzpůsobena. Skleněná stěna dává obyvateli příležitost sledovat přirozené tempo proměnlivosti okolní přírody: stojí do určité míry v opozici vůči ní. Jednoduchá, přesná, čistá a neměnná geometrie je spojena s vizuální prostupností skla v protikladu vůči hmotné, proměnlivé a živé přírodě. Přírodní scenérie proto sice do interiéru fyzicky nezasahuje, přesto je jeho nedílnou součástí v podobě živého obrazu. Hranice mezi člověkem a přírodou zbytněla do průhlednosti a současně neprostupnosti, okna tu nejde otevřít.

Ovšem tento sklem zbytnělý vztah založený na primátu oka není jedinou možnou podobou obývání domu. Komplexní architektura není redukovatelná na jednoduché protipozice, a proto je třeba přiznat, že právě uvedený popis je vůči stavbě nespravedlivý, protože je příliš zjednodušený. Vztahy mezi vnitřkem a vnějškem je totiž třeba dále zpřesňovat s ohledem na celek stavby, respektive s ohledem na strukturu utváření místa. Ta, jak bylo řečeno, nabízí možnost pobytu na terase, úvodní části, jež je prakticky vyzdvihnutou platformou a mezistupněm přechodu z exteriéru do interiéru: je postaven níže než dům, přesto nad zemí. Přímo řečeno: zde obyvatel vstupuje do stavby, aniž se však už nacházel v interiéru. Následuje zastřešená veranda, kdy zkušenost uvnitř nabývá na intenzitě, přesto je obyvatel stále v přímém tělesném propojení s celým okolím. Až v poslední části určuje dům charakter jednoznačného interiéru.

Už v době výstavy The International Style vzniká první kritika vypjaté podoby racionalismu v modernismu, především v díle Alvara Aalta a Franka Lloyda Wrighta, jak si nakonec dobře později uvědomoval i jeden z kurátorů výstavy Henry Russell-Hitchcock.²² Aaltovy stavby z 30. let, ať už jeho vlastní dům v Helsinkách nebo vila Mairea, artikulují kritiku racionalismu z humanistické pozice. Aalto argumentuje, že je třeba v navrhování zohlednit psychofyzickou stránku člověka, jinak řečeno zohlednit v návrhu člověka jako komplexní tělesnou bytost.²³

Lze opět jeho přístup dobře doložit na stavbách také z poválečného období. Typologicky vhodným příkladem je Experimentální dům (1952–4) na ostrově Muuratsalo, který navrhl spolu se svojí druhou ženou a blízkou spolupracovnicí Ellisou Aalto.

21 — Srov. Miesův výrok: „Pokud pozorujete přírodu přes skleněnou zeď Farnsworth House, nabývá hlubšího významu, než když se na ni díváte zvenku.“ Viz Michael Caldwell, Zvláštní detaily, Zlín 2012, s. 146. Anebo další Miesovo vyjádření: „Příroda by měla žít svůj vlastní život; neměli bychom ho ničit barvami našich domů a interiérů. Měli bychom se snažit spojit přírodu, domy a člověka ve vyšší jednotu. Když pozorujete přírodu přes skleněné zdi domu Farnsworth, získává hlubší význam než venku. Od přírody je žádáno více, protože se stává součástí většího celku... Sám jsem pobýval v domě od rána do večera. Do této chvíle jsem netušil, jak barvitá příroda může být. Je třeba být opatrný a používat neutrální barvy v interiéru, protože exteriér má všechny druhy barev. Tyto barvy se neustále mění a rád bych dodal, že je to prostě nádherné.“ Viz Franz Schulze – Edward Windhorst, Mies van der Rohe, Chicago and London 2012, s. 251.

22 — Henry Russell Hitchcock-Philip Johnson, The International Style: Architecture since 1922, New York 1966, s. IX.

23 — Např. v Aaltových textech The Humanizing of Architecture rozvíjí tento typ úvah. Viz Göran Schildt (ed.), Alvar Aalto. In His Own Words, New York 1997, s. 102–106.

Yet this relationship hypertrophied by the glass which is based on the primacy of the eyes is not the only possible form of inhabiting the house. The complex architecture cannot be reduced to simple counter positions and it must be therefore admitted that the above description is unfair to the building, because it is too simplified. The relationships between inside and outside must be further refined with regard to the whole building, or rather with regard to the structure of the place formation. The structure, as already mentioned, offers the possibility of being on the terrace, the initial part of which is in fact a raised platform and an intermediate stage of the transition from the exterior to the interior: it is built lower than the house, yet above the ground. To put it simply: here the inhabitant enters the building without yet being inside. This is followed by a covered veranda, where the interior experience grows more intense, yet the inhabitant is still in direct physical connection with the entire environment. It is only in the last section that the house is defined as pure interior.

Already at the time of The International Style exhibition, the first critique emerges of the extreme form of rationalism in modernism, especially in the works of Alvar Aalto and Frank Lloyd Wright, as one of the exhibition curators, Henry Russell-Hitchcock, would later become very well aware of.²² Aalto's buildings from the 1930s, whether his own house in Helsinki or the Villa Mairea, articulate the criticism of rationalism from a humanist position. Aalto argues that the psycho-physical side of the human must be taken into account when designing, in other words, that the human being as a complex physical being must be taken into account in design.²³

22 — Henry Russell Hitchcock-Philip Johnson, *The International Style: Architecture since 1922*, New York 1966, p. IX.

23 — Aalto develops this type of reflection in his texts, such as *The Humanizing of Architecture*. See Göran Schildt (ed.), *Alvar Aalto. In His Own Words*, New York 1997, pp. 102–106.

His approach can also be well documented in his buildings from the post-war era. A typologically suitable example is the Experimental House (1952–4) on Muuratsalo Island which he designed together with his second wife and close collaborator Ellisa Aalto. It was built for their own pleasure, but Aalto also adds that he took the opportunity to try out some seriously intended experiments in the construction.²⁴

24 — A + U, No. 606, 03/2021, p. 117.

The house considerably reflects the location, or rather, the location was chosen for the panoramic view of the lake. Unlike Farnsworth House, though, it does not create an observation station, nor does it seek to dematerialize the ideal object. The house is not symmetrical, even though the main part has a square layout: it is arranged into several parts. The point of the entire composition is not an interior in the strict sense, but the point of transition between the inside and outside is the core of the whole concept. The courtyard with a fireplace in the middle is unroofed, yet clearly defined by a high wall. The main living area on an L-shaped plan is adjacent to the inner courtyard on two sides. Another smaller part was added to it, which cannot be seen from the courtyard, though.

Vznikl pro vlastní potěšení, nicméně Aalto také doplnil, že využil příležitost vyzkoušet si na stavbě vážně myšlené experimenty.²⁴

24 — A + U, č. 606, 03/2021, s. 117.

Dům významně zohledňuje lokaci, respektive ta byla zvolena pro panoramatický výhled na jezero. Na rozdíl od Farnsworth House však nebuduje pozorovací stanici, ani neusiluje o dematerializaci ideálního objektu. Dům není symetrický, ačkoli je hlavní část na půdorysu čtverce: je uspořádán do několika částí. Pointou celé kompozice není interiér v užším slova smyslu, právě místo přechodu mezi vnitřkem a vnějškem je jádrem celého konceptu. Nezastřešený, ovšem vysokou zdí jasně vymezený dvůr má ve svém středu ohniště. K vnitřnímu dvoru ze dvou stran přimyká hlavní obytná část na půdorysu L. K ní byla ještě doplněna další menší část, již však ze dvora vidět nelze.

Když k domu přicházíme, nejprve vidíme vysoké, bíle namalované cihlové stěny, jednoznačně určující hranici domu. Když vstoupíme do dvora, cihly už jsou ponechány ve vlastních barvách. Zvenku bílá barva stěny zceluje, ve dvoře naopak řada pokusů s různými cihlami a jejich různou skladbou vytváří živou, asymetrickou mozaiku. Dům se tak jednoznačně odlišuje od svého okolí, současně však nezdůrazňuje primárně vizuální propojení s okolím, jakkoli je vstupní část domu opatřena rozměrným oknem. To však samo netvoří hranu mezi vnitřkem a vnějškem, protože výhled na jezero je možný skrze dvůr. Podoba budování sepjetí s prostředím je daná i materiály, jinak řečeno vztah blízkosti je podpořen dominantně použitými materiály cihly a dřeva.

Rozvažování vztahu interiéru a exteriéru ještě v odlišné pozici lze ukázat na příkladu Casa Ottolenghi v Bardolinu (1974–79), na břehu Lago di Garda, od Carla Scarpy. V tomto případě nacházíme lokaci s poměrně strmým svahem, padajícím postupně až k jezeru. Dům sleduje topografický ráz: do domu je přístup sestupem z úrovně ulice po schodišti. Současně je však možné z úrovně ulice vstoupit na pochozí střechu domu, která nabízí dlouhé výhledy na rozlehlou vodní plochu. V intencích předchozího zdůraznění přechodu vnitřku a vnějšku zde opět nastává nejednoznačnost: při vynacházení se na střeše domu nejsme pochopitelně uvnitř, přesto nejsme ani plně vně utvořené situace. Pohled do dálky na rozlehlou plochu jezera patří k charakteristickým momentům stavby.

Ve srovnání s Miesovou stavbou pro doktorku Farnsworth se zde uspořádání místa děje v kompozici výrazně odlišných vztahů. Italský architekt zde využívá napětí mezi dlouhými výhledy do široké otevřené jezerní krajiny a blízkým propojením interiéru stavby se zahradou. Můžeme v tomto případě sledovat vyvažování mezi sevřenými situacemi, úzkou příchodovou cestou, kdy fyzická blízkost domu je nevyhnutelná, a otevřeností. Již byl zmíněn příklad s pochozí střechou – všimněme si však, že střecha není navržena s důrazem na jednoduchý geometrický tvar. Ve výsledku má nepravidelný tvar a není rovná. Vedle ní je však třeba blíže popsat vztah obytného prostoru a zahrady. V interiéru nalezneme řadu typicky scarpovských



OBR. 2 Alvar Aalto, Experimental House, Muuratsalo, Finsko, 1954 – foto: Ivan Himanen
FIG. 2 Alvar Aalto, Experimental House, Muuratsalo, Finland, 1954; Photo: Ivan Himanen

dekorativních detailů na masivních sloupech či v barevné skladbě. Geometrie vertikálních prvků není ortogonální, je také asymetrická. Především se však vedle přímého vstupu do soukromí zahrady nachází malá vodní nádrž, která fyzicky propojuje vnitřek a vnějšek. Scarpa, jak je patrné i na řadě dalších projektů, zvláště v Benátkách, dokázal s vodními prvky zacházet právě pro propojování interiéru a exteriéru. Využíval často i světelné odrazy, kdy zrcadlení a odražení světla od vodní plochy utváří efeméerní a současně výrazné propojení interiéru a exteriéru.

V návaznosti na výše uvedená srovnání lze konstatovat, že Scarpa využívá lokalitu v jejím vizuálním potenciálu, ovšem stejně tak, na rozdíl od Miesova pojetí, v interiéru nebuduje odstup od místa. Hledá podoby continuity s širším i blízkým prostředím. Proto, jakkoli jsou zdi masivní, netvoří neprostupnou hranici mezi interiérem a exteriérem. Součástí takto artikulovaného vztahu vnitřku a vnějšku jsou čistě vizuální vztahy, tak ty založené na bezprostředním pohybu a jeho sepětí s intimní zahradou. Dům tedy utváří jasně hranice, které však jsou cíleně vrstveny a rozpíjeny.²⁵

25 — V návaznosti na Cyrila Říhu lze hranici sledovat jako proměnlivou a emergentní, usilující o správné určení hranice, která nenáleží pouze vnitřku, nebo pouze vnějšku, ale jako střetávání, vyvažování a prolínání vnitřku a vnějšku. Říha (pozn. 13), s. 189.

Uzavřenost

Nezbytnou, ovšem jak už je nyní patrné, ne zcela jednoznačnou součástí vymezení přechodu mezi vnitřkem a vnějškem je uzavřenost. Rozdíl mezi pozicí vně a uvnitř charakterizuje moment, kdy je uzavřenost uchopitelná a zřetelná, jakkoli nikdy totální a jedinou vlastností situace. Uzavřenost stavby jako polemické téma myšlení architektury lze identifikovat v řadě důležitých současných staveb. Vybírám ty, které umožní bližší rozpracování nejednoznačnosti uzavřenosti v architektuře.

Vhodným příkladem je Atelier Bardill (2007) ve švýcarské vesnici Scharans od Valeria Olgiahiho. Ani v tomto případě nejde o zvláště rozsáhlou stavbu, přesto patří k nejméně výrazným současným stavbám. V Scharans ji doslova nelze přehlédnout, ačkoli kvůli stavebním regulím musí ateliér hudebníka Linarda Bardilla držet formu stodoly, jež na dané lokaci stála původně. Záměrem stavebníka bylo vytvořit menší ateliér, nicméně bylo nutné dodržet předpisy. A tak architekt navrhl řešení, které splňuje oba nároky: je jak uzavřeným, intimním prostorem pro tvorbu, tak definuje v rámci vesnice obvyklou stavbu stodoly.

Uzavření stavby se z vnějšího pohledu ulice jeví pevné a koncentrované. Plášť budovy je z do červena probarveného betonu. Plášť má po obvodu prakticky jen dva otvory – rozměrné okno, jež lze zcela uzavřít plnou posouvací stěnou, a vstup. Do dřevěného šalování místní truhláři na přání architekta vyřezali stovky růžic, které se propsaly do podoby vnitřních i vnějších zdí (celkem jich je asi 500). Autor stavby pro růžice neurčil pozice ani řád, podle něhož by měly vzniknout. Růžice tak vychází ze znalostí a dovedností truhlářů.

When approaching the house, we first see the high, white painted brick walls, which clearly define the boundaries of the house. When we enter the courtyard, the bricks here are left in their natural colours. From the outside, the white colour unifies the walls, while in the courtyard, a series of experiments with different bricks and their various compositions create a lively, asymmetrical mosaic. The house is, thus, clearly distinguished from its surroundings, but at the same time does not primarily emphasize the visual connection with the environment, although the entrance part of the house is fitted with a large window. This window, however, does not form an edge between the inside and outside, because the view of the lake is accessible through the courtyard. The form of building the connection with the surroundings is also determined by materials, in other words, the relationship of proximity is supported by the dominantly used materials of bricks and wood.

The thinking about the relationship between interior and in yet another position can be shown in the example of Casa Ottolenghi in Bardolino (1974–79), on the shore of Lago di Garda, by Carlo Scarpa. In this case, we are in a location on a relatively steep slope, gradually falling down to the lake. The house follows the topographical pattern: the house is accessed by descending a staircase from the street level. At the same time, however, you can also access the walkable roof from the street level, which offers extensive views of the vast expanse of water. In keeping with the previous emphasis on the transition between inside and outside, there, again, we find ambiguity: when being on the roof of the house, we are, obviously, not inside, yet we aren't fully outside the formed situation either. The view into the distance onto the vast surface of the lake is one of the distinctive moments of the building.

Compared to Mies' construction for Dr Farnsworth, the arrangement of the place occurs in a composition of considerably different relationships. Here the Italian architect exploits the tension between the long view into the open lake landscape and a close connection between the interior of the building with the garden. In this case, we can observe a balancing act between confined situations, between openness and a narrow entry path on which the physical proximity of the house is inevitable. We already mentioned the example with the walkable roof – but let's note that the roof has not been designed with an emphasis on a simple geometric shape. Furthermore, however, we have to take a closer look at the relationship between the living space and the garden. We find a number of typical Scarpa decorative details on the massive columns or in the colour scheme. The geometry of the vertical elements isn't orthogonal, it is also asymmetrical. Above all, though, there is a small water basin next to the direct entrance to the privacy of the garden which physically connects the inside with the outside. Scarpa, as is evident in many of his other project, especially the ones in Venice, was able to use water elements precisely for this connection of interior and exterior. He often used light reflections when the mirroring and bouncing of light off the water surface creates an ephemeral yet expressive connection between the interior and exterior.

Plášť stavby sice na sebe strhává pozornost, přesto je to uspořádání prostorových vztahů, které je v tomto případě inovativní. Stavba podobně jako Experimentální dům Aaltových zahrnuje dvůr jako klíčový motiv. V tomto případě však dvůr není možné jednoznačně určit jako významové centrum. Olgiati byl nucen pracovat s daným tvarem a objemem domu a současně nepřekročit finanční možnosti stavebníka. Interiér v užším slova smyslu tvoří proto méně než třetinu stavby. (Architekt o hovoří o vytápěné části.)²⁶ V důsledku tak většinová část stavby není zastřešená. Otevírá se eliptickým tvarem²⁷ širšímu okolí a vtahuje do stavby vysokohorskou krajinu vertikální osou.

26 — Jediná vyhřívaná část domu má 65 m². Pokud by býval investor měl více financí, otevřená část by byla méně rozlehlá. Valerio Olgiati, Atelier Bardill, El Croquis, č. 156, 2015, s. 100–114.

27 — Ačkoli V. Olgiati popisuje, že oku se geometrické vztahy jeví jinak: kruh vepsaný do čtverce. Ibidem.

Dům se z úrovně ulice může jevit uzavřený, snad až nepřístupný. Betonová zeď jasně definuje hranice domu v úrovni ulice, avšak chybějící původní střecha zdůrazňuje moment volného spojení místa a prostoru. Při hledání jazyka pro popis prostorového uspořádání této stavby narážíme na selhávání tradičního dělení na interiér a exteriér. Je proto třeba hledat odlišný slovník, který bude schopen zachytit dění kontinuity přechodu místa a prostoru. Vztah uzavřenosti a otevřenosti nevytváří v takovém případě opoziční póly, nýbrž jeden kontinuální pohyb dění prostorového uspořádání stavby. Kontinuální pohyb se děje v ambivalenci blízkého a vzdáleného, uzavřeného a otevřeného. Uzavřenost není opozicí otevřenosti, utváří paralelně zkušenost této stavby.

Strukturálně odlišný vztah uzavřenosti a otevřenosti představuje Turbulence House (2001–2005) v poušti u Abiquiu v Novém Mexiku od Stevena Holla. Bylo by možné se vrátet ke stavbám Franka Lloyda Wrighta, zvláště když už byl v textu jednou zmíněn, a rozvíjet úvahy o vztahu architektury a krajinného rázu. Právě návaznost architektury na přírodní charakter krajiny pro amerického architekta tvoří základ tzv. organické architektury. Ta se neodvíjí od biomimézy či organických tvarů, jak ukazují nejznámější příklady prériových domů. Vyznačují se rozložitými horizontálními hmotami s asymetrickými půdorysy a nízkými převíslými střechami, aby odpovídaly adekvátně otevřené krajině na středozápadě USA. Steven Holl však přichází s odlišnou podobou kontinuity otevřeného pouštního prostředí. Nehostinné přírodní podmínky se také přímo vepsaly do podoby této architektury, ačkoli se stavbami F. L. Wrighta bychom sotva našli něco společného.

Turbulence House je asymetrickým objektem v krajině s atypickým otvorem, který umožňuje silným větrům procházet stavbou. Kvůli nehostinnému prostředí není možné budovat prostupnost mezi interiérem a exteriérem. Současně je však patrné, nakolik forma stavby vychází z podmínek, v nichž se nachází. Na jednu stranu tak dům umožňuje fyzickou kontinuitu pohybu v prostoru, na druhou stranu před náročnými podmínkami zajišťuje zázemí právě otevřeností už v koncepční rovině.

Following the above comparisons, we can state that Scarpa uses the location in its visual potential but, equally, unlike Mies' approach, he does not create distance from the place in the interior. He seeks forms of continuity with the both close and distant environment. Thus, as massive as the walls are, they do not form an impenetrable boundary between the interior and exterior. A relationship of the inside and outside articulated in such way include not only purely visual relationships, but also those which are based on the immediate movement and its connection to the intimate garden. The house thus forms clear boundaries, which are, nevertheless, purposefully layered and diffused.²⁵

25 — Following on Cyril Řiha, the boundary can be seen as mutable and emergent, striving for the correct determination of the boundary which does not belong to the inside or outside only, but as confrontation, balancing and intermingling of the inside and outside. Řiha (footnote 13), p. 189.

Closure

Closure (enclosure, closedness) is an essential, yet, as is now already apparent, not purely unambiguous part of demarcation of the transition between inside and outside. The difference between the position of outside and inside is defined by a moment when the closure is graspable and distinct, though never complete and the only feature of the situation. The closedness of the building as a controversial theme of architectural thought can be identified in a number of contemporary buildings. I select those that allow for a closer elaboration of the ambiguity of closure in architecture.

A suitable example for this is Atelier Bardill (2007) in the Swiss village of Scharans by Valerio Olgiati. Also in this case, it is not a particularly large building, yet it is one of the most striking contemporary structures. It is literally impossible to overlook in Scharans, although due to the building regulations, the musician Linard Bardill's studio has to adhere to the form of the barn that originally stood on the site. The builder's intention was to create a smaller studio, but the regulations had to be complied with. And so the architect proposed a solution that fulfils both requirements: it is both an enclosed, intimate space for creation and it adheres to the barn structure that is common in the village.

The closure of the building appears solid and concentrated from the exterior street view. The building shell is made of red stained concrete. The shell has virtually only two openings on the perimeter – a large window which can be completely enclosed with a full sliding wall, and the entrance. At the request of the architect, the local carpenters cut hundreds of rosettes into the wooden formwork which then moulded into the surface of the inside and outside walls (it is about 500 of them in total). The author of the building did not specify the positions for the rosettes or the order in which they should be placed. Their position is, thus, based on the knowledge and skills of the carpenters.

Dům tak ve výsledku má blízko k sochařské formě, vykazující znaky jedinečnosti, ovšem ta zde není autonomní.²⁸

28 — To odráží i skutečnost, že vnější forma je sestavena z prefabrikátů, interiér byl dodělán místními řemeslníky. Stále jde o primárně obyvatelný prostor, který je možné replikovat za zcela odlišných podmínek. To dokládá provedení jedné verze prefabrikovaného domu ve Vicenze v roce 2002. Srov. Steven Holl, *Seven Houses*. Luminist Architecture, New York 2018, s. 109.

Vnitřní prostor je plynulý, propojuje obě části bez definování jednotlivých místností. Prakticky jde o jeden prostor s náznaky raumplanu, který ovšem zahrnuje na rozdíl od Loosova pojetí i prostor pro spaní.

Hrana

Sledování ambivalentních podob uzavřenosti v architektuře nás přivádí k otázce, zda je možné pro architektonické dílo jednoznačně určit hranu vnitřku a vnějšku. Kritické myšlení architektury, ohledávající vlastní definiční podmínky, lze dobře sledovat na typologii pavilonů. Architektonické úlohy pavilonů bývají využívány pro zdůraznění koncepční stránky architektury. Není proto překvapivé, že se vymezení přechodu, rozhraní či okraje stalo námětem mnoha takových staveb. Výrazně je koncentrována na příklad v Blur Building od Diller Scofidio (+Renfro), provedený u příležitosti Swiss Expa 2002 ve Švýcarsku.

Pavilon byl umístěn na jezeře Neuchâtel, jehož vodu využíval pro tvorbu mlhy. Architektura pavilonu sestává z pevné konstrukce, která sama o sobě není nijak zvláště překvapivá. Je to otevřená konstrukce s vyhlídkovými plošinami nad vodou s dvěma lávkami na pevninu. Sama o sobě by byla projevem „retro“ ve stylu mašínismu, ovšem význam stavby roste s její performativní složkou: 35 000 vysokotlakých trysek halilo konstrukci do proměnlivého oblaku. Návštěvník se tak přibližoval k pavilonu po lávce. Cestou postupně ztrácí přehled o okolí, až se zanoří do bílého prostoru. Ačkoli je hrana interiéru pohyblivá a proměnlivá, přesto jasně odděluje zkušenosť uvnitř vzniklé mlhy a vně.²⁹ Koncentrovaná myšlenka představená pavilonem vede až k oslepení, respektive ztíženým podmínkám vidění. Zkušenosť pobývání uvnitř je záměrně vyhrocená, ačkoli intenzivní pocit uvnitř se spojoval se ztrácením obrysů, v idealizované rovině bychom mohli až hovořit o rozrušení hranice místa směrem k nekonečnu bílou mlhou. Z pohledu uvnitř mlžného oparu nebylo možné jednoznačně určit hranu. Ta se děje jak pohybem mraku, tak pohybem návštěvníka. Tento motiv přechodu mezi neviděním a viděním akcentovala v pavilonu plošina nad mrakem, kde se zhutněná zkušenosť interiéru otevírá otevřenému poli.

29 — Diller Scofidio + Renfro, *Blur Building*, <https://dsrny.com/project/blur-building>, vyhledáno 25. 8. 2022.

While the shell of the building attracts attention, it is the arrangement of the spatial relationships which is in this case innovative. The building – just like the Experimental House by the Aaltos – incorporates the courtyard as a key motif. In this case, though, the courtyard cannot be clearly identified as a centre of meaning. Olgiati had to work with the given shape and volume of the house and also not exceed the financial budget of the investor. Thus, the interior in the narrower sense makes up less than a third of the building. (The architect speaks of the heated part.)²⁶ As a result, majority of the building is not roofed. Through an elliptical form,²⁷ it opens to its broader environment and draws the high mountain landscape in with its vertical axis.

26 — The only heated part of the house is 65 m². Had the investor had greater budget, the open part would have been less extensive. Valerio Olgiati, *Atelier Bardill, El Croquis*, Nr. 156, 2015. pp. 100–114.

27 — Although V. Olgiati notes that the geometrical relations appear differently to the eye: a circle inscribed in a square. *Ibidem*.

From the street level, the house might appear enclosed, perhaps even inaccessible. The concrete wall clearly defines the boundaries of the house at the street level, yet the absence of the original roof emphasizes the moment of a free connection between place and space. When searching for a language suitable for the description of the spatial arrangement of this building, we encounter a failure in the traditional division between interior and exterior. We must therefore search for a different vocabulary, capable of capturing the continuity of the transition of place and space. In this case, the relationship between enclosure and openness does not create contradictory poles, but one continuous movement of the spatial arrangement of the building. The continuous motion takes place in the ambivalence of the near and the distant, the closed and the opened. Closedness is not the opposition of openness; it forms the parallel experience of this building.

A structurally different relationship between closure and openness is represented by Steven Hall's Turbulence House (2001–2005) in the desert near Abiquiu, New Mexico. We could return to the buildings of Frank Lloyd Wright, especially since he has already been mentioned in this text once, and to develop reflections on the relationship of architecture and the character of the landscape. It is precisely the connection of architecture to the natural character of the landscape which forms the basis of the so called organic architecture. This architecture does not stem from the biomimesis or organic forms, as the most famous examples of prairie houses show. They are characterized by sprawling horizontal masses with asymmetrical floor plans and low overhanging roofs to correspond with the adequately open landscape of the American Midwest. Steven Holl, though, comes up with a different form of continuity for the open desert environment. The hostile natural conditions are also directly inscribed in the form of this architecture, although we would hardly find something in common with the buildings of F. L. Wright.

Turbulence House is an asymmetrical building in the landscape with an atypical opening which enables strong winds to pass through the building. Due to the inhospitable environment, it is not possible to build permeability between the interior

Zbytnělý moment hrany naopak prozkoumala v případě Casa Poli chilská dvojice Mauricio Pezo a Sofia von Ellrichshausen. Nejde sice o efemérní architekturu, přesto má dům výrazně koncepční ráz díky nezvyklé úloze. Architekti museli přijít s řešením, které by umožnilo dům využívat jako zázemí pro letní dům i jako menší výstavní instituci. Stavba se nachází na rozhraní pevniny a moře, na vysokých útesech poloostrova Coliumo (na sever od města Concepción) v Chile. Hrana domu je artikulována do masivní, zdvojené zdi, jež má za cíl umožnit otevřené a plynulé přechody vnitřního prostoru.

Prostorová koncepce domu vychází z otevřeného jádra a zhuštěného okraje. Do dvojité obvodové zdi jsou schovány všechny obslužné potřeby domu, včetně schodiště. Zdvojená hrana domu je však výrazně otevřena jak směrem ven, tak směrem dovnitř. Architekti využili velká okna, jimiž otevírají pohled z výšky útesů na dlouhý horizont Tichého oceánu. Současně hovoří o vnitřních balkonech³⁰, jež umožňují průhledy mezi úrovněmi interiéru. Ačkoli lze dům charakterizovat jako dvoupodlažní, základem je upravená varianta raumplanu. Na rozdíl od loosovské podoby však chilská dvojice vnitřní plynulost úrovní prostoru provazuje silně s okolím. Dům tak akcentuje vlastní pozici na pobřeží.

30 — Mauricio Pezo, Sofia von Ellrichshausen, Poli House, ArchDaily, <https://www.archdaily.com/476/polihouse-pezo-von-ellrichshausen>, vyhledáno 24. 9. 2022.

Srovnatelně aktivní roli ztvárnění hrany mezi vnitřkem a vnějškem utváří v díle Poustevna (Příbytek pro pobřeží I) sochař Jiří Příhoda, jakkoli zamýšlené umístění zatím nenastalo. Fakticky byla Poustevna přitom vybudována a vystavena v Praze ve dvoře Colloredo-Mansfeldského paláce (2014) a o rok později v Brně na hradě Špilberku. Přesto uspořádání prostorových objemů určuje právě možné postavení na hranici moře a pevniny. Narozdíl od domu Poli se Příbytek pro pobřeží I nezabývá okolnostmi a náležitostmi dlouhodobého obývání na rozhraní. Umělecký objekt se tak soustředí na situování obyvatele do dvou opačných pozic pohledu. Dělá to pomocí dvou shodných pozorovatelů, jež jsou vnitřně propojené a přetočené k sobě navzájem o 180 stupňů. K tomu je třeba připočíst skutečnost, že se návštěvník dívá na každou ze stran z odlišné výšky. Pokud vstupujeme do tohoto stroje na dívání, ani v jednom z hlavních směrů pohledu se nelze dívat zpět, respektive tam, kam se dívá druhý výhled.

V ideálním případě by se návštěvník dostal do pozice s jasně určeným pohledem na pevninu či moře s tím, že Poustevna je rozpojením těchto pohledů, ovšem stavbou se stále drží spolu. Pointu této situace lze doslova spatřit v tom, jak tato stavba buduje v místě spojení zbytnělou hranici, která protipozici pohledů zhmotňuje a prodlužuje interval continuity spojení, přesněji příbytek vytváří přítomnost spojení přerušením. Je třeba vystoupat či sejít schody čelící neprůhledné stěně, a pak se teprve vpravit do jednoho z pohledů. Pozice příbytku tak vychází ze zdůraznění pohybu mezi dvěma jasně situovanými pohledy.



OBR. 3 Valerio Olgiati, Atelier Bardill, Scharans, Švýcarsko, 2007 – foto: FŠ
FIGG. 3 Valerio Olgiati, Bardill Atelier, Scharans, Switzerland, 2007; Photo: FŠ



OBR. 4 Valerio Olgiati, Atelier Bardill, Scharans, Švýcarsko, 2007 – foto: FŠ
FIG. 4 Valerio Olgiati, Bardill Atelier, Scharans, Switzerland, 2007; Photo: FŠ



OBR. 5 Valerio Olgiati, Atelier Bardill, Scharans, Švýcarsko, 2007 – foto: FŠ
FIG. 5 Valerio Olgiati, Bardill Atelier, Scharans, Switzerland, 2007; Photo: FŠ



OBR. 6 Diller Scofidio + Renfro, Blur Building, jezero Neuchâtel, 2002 - foto: Norbert Aepli
FIG. 6 Diller Scofidio + Renfro, Blur Building, Neuchâtel Lake, 2002; Photo: Norbert Aepli



OBR. 7 Pezo von Ellrichshausen, Casa Poli, Coliumo, Chile, 2005 – foto: Pezo von Ellrichshausen
FIG. 7 Pezo von Ellrichshausen, Casa Poli, Coliumo, Chile, 2005; Photo: Pezo von Ellrichshausen

and exterior. It is, however, at the same time apparent how much the form of the building is based on the conditions in which it is located. On one hand, the house allows for physical continuity of movement in space, on the other hand, it provides shelter from the difficult conditions precisely with its conceptual openness. As a result, the house is close to a sculptural form, showing signs of uniqueness, which is, however, not autonomous here.²⁸

28 — This is also reflected in the fact that the exterior was assembled from prefabricated materials, while the interior was finished by local craftsmen. Still, it is primarily a habitable space that could be replicated under completely different conditions. This is illustrated by one version of the prefabricated house in Vicenza from 2002. Cf. Steven Holl, *Seven Houses*. Luminist Architecture, New York 2018, p. 109.

The interior space is fluid; it connects both parts without defining the individual rooms. It is practically a single space with hints of a Raumplan, which, unlike Loos' concept, also includes a sleeping area.

Edge

Observing the ambivalent forms of closedness in architecture brings us to the question of whether it is possible to clearly define the edge of the inside and outside in an architectural work. The critical thinking in architecture, which examines its own defining conditions, can be well observed in the typology of pavilions. The role of architecture in pavilions tends to be used to emphasize the conceptual side of architecture. It isn't therefore surprising that the definition of the transition, interface or edge has become the theme of so many buildings. It is prominently concentrated in the example of the Blur Building by the Diller Scofidio (+Renfro) studio, executed for Swiss Expo 2002 in Switzerland.

The pavilion was located on Lake Neuchâtel. The designers used the water of the lake to create fog. The architecture of the pavilion consists of a solid structure which in itself is not particularly surprising. It is an open structure with viewing platforms over the water, with two footbridges to the land. On its own, it would be a manifestation of retro in the style of machinism, but the significance of the structure grows with its performative component: 35,000 high-pressure jets envelop the construction in a shifting cloud. The visitor thus approaches the pavilion on the footbridge. Along the way, the visitor gradually starts losing view of his surroundings until he is immersed in white space. Although the edge of the interior is moving and changing, it clearly separates the experience inside and outside the resulting fog.²⁹ The concentrated thought manifested by the pavilion leads to even a blinding or a hindered vision. The experience of being inside is deliberately escalated, although the intense feeling of being inside was associated with a loss of contours; in an idealized sense,

29 — Diller Scofidio + Renfro, Blur Building, <https://dsrny.com/project/blur-building>, as searched on 25. 8. 2022.

Takto utvořený interiér se stává prostorovým vyjádřením situace mezi, obýváním hrany: pobývání je vždy spojeno s přesunem mezi dvěma situacemi, a i když je divák vpraven do jedné ze situací, druhá je vždy součástí interiéru jako vymezení mezi z opačné strany.

Na rozvíjení motivu hrany domu navazují ve své tvorbě architekti Petr Stolín a Alena Mičeková. V Zen Houses (2015), dvojdomě na okraji Liberce, se jednoduché symetrické objemy staly prostředkem pro komplexní prostorové úvahy. Dva paralelní bloky utváří dva jasně oddělené interiéry: bílý interiér ateliéru a černý interiér pro dům, kde bydlí. Hrana obou částí je měkká díky průhlednosti povrchu ze sklolaminátu, za kterým se vyjevuje dřevěná konstrukce. Dům svůj obal částečnou transparentí ztenčuje.

Samotné interiéry nejsou rozměrné, jsou úzké natolik, že pokud člověk stojí uvnitř, lze při rozpažení rukou téměř dosáhnout od jedné zdi ke druhé. Prostor každého z bloků však plynule přechází mezi přízemím a podlažím a díky velkorysému otevření velkými okny dvou symetrických bloků nenastává nikdy dojem stísněnosti či přílišné uzavřenosti. Ačkoli se Zen Houses skládají ze dvou bloků, přičíst je však třeba i prostor mezi nimi. Jsou zde různé úrovně zkušenosti prostoru od uzavřených, intimních částí přes velkoryse opticky propojené interiéry obou bloků po soukromý exteriér mezi domy.

Z hlediska definice hrany domu je nutné vyzdvihnout optické propojení obou bloků. Tvoří téžavou jednotu díky symetrii formy a především oknům, ačkoli fakticky jde o dva uzavřené objemy. Paralelní postavení se symetrickými rozměrnými vede k tomu, že přes fyzickou vzdálenost se domy neustále prolínají. Hrana je sice vymezena zdmi, současně však hrana zdi neustále překračuje děním provazování jednoho bloku s druhým.

Posledním příkladem tvůrčího myšlení hrany domu je z vnějšího pohledu jednoduchý, tradičně uspořádaný kamenný dům. Nalézt ho lze v sochařském parku Jupiter Artland Foundation nedaleko Edinburghu ve Skotsku. Dům vznikl podle záměru umělce Andyho Goldsworthyho v roce 2009. Stavba z kamenných stěn s jednoduchou sedlovou střechou se nachází v malém lese a neprozrazuje nic neobvyklého. Až po otevření dveří návštěvník zjistí, že dům sice definuje vnitřní prostor čtyřmi zdmi, přesto o interiéru v plném slova smyslu mluvit nelze. Zdi a střecha totiž kryjí kus odhalené skály, která byla pouze očištěna a ponechána v původní podobě. Nelze ji označit za podlahu: je to vnějšek koncentrovaný uvnitř domu. Skála budí dojem, že roste do výšky nad úroveň terénu, i když byla odhalena odebráním půdy. Vztah vnitřku a vnějšku ani v tomto případě netvoří jednoznačnou opozici, přesnější je hovořit o dění ambivalencí.

we could even speak of a disruption of the boundary of the place towards infinite with the white mist. From the view inside the misty haze, it was impossible to clearly identify the edge. This is happening both through the movement of the cloud and through the movement of the visitor. This motif of the transition between not seeing and seeing was accentuated in the pavilion by a platform above the cloud, where the concentrated experience of the interior opens up to the open field.

By contrast, the Chilean duo Mauricio Pezo and Sofia von Ellrichshausen explored the hypertrophied moment of the edge in the case of Casa Poli. It isn't an ephemeral piece of architecture, yet the house has a highly conceptual character due to its unusual role. The architects had to come up with a solution which would allow for the house to be used as both a summer house and a smaller exhibition premise. The building is located on the interface between land and sea, on the high cliffs of the Coliumo Peninsula (north of the city of Concepción) in Chile. The edge of the house is articulated in a massive, doubled wall designed to allow for open and fluid transitions of the interior space.

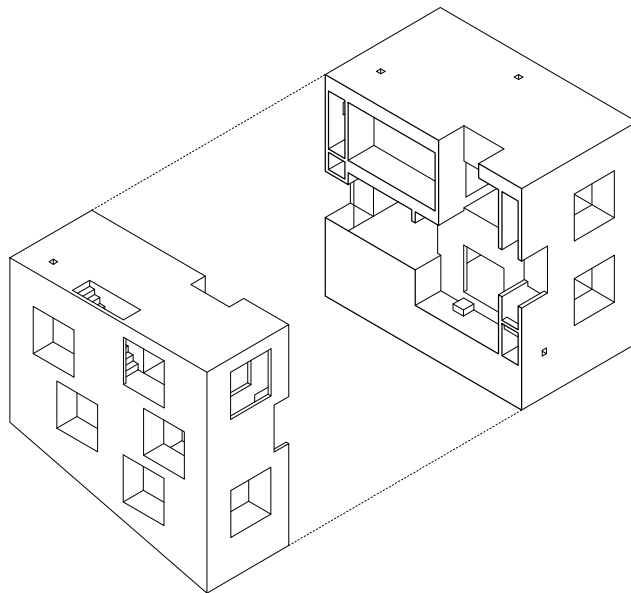
The spatial concept of the house is based on an open core and a condensed edge. All the service needs of the house are concealed in the double perimeter wall, including the staircase. The doubled edge of the house is, however, considerably open both outwards and inwards. The architects used the large windows to open up the view from the cliffs to the long horizon of the Pacific Ocean. At the same time, they speak of the internal balconies³⁰ which allow views between interior levels. Although the house can be described as two-storey, the base is a modified version of the Raumplan. Unlike the Loos' approach, the Chilean duo strongly ties the internal fluidity of the levels of space with the surroundings. The house thus accentuates its own position on the coast.

30 — Mauricio Pezo, Sofia von Ellrichshausen, Poli House, ArchDaily, <https://www.archdaily.com/476/poli-house-pezo-von-ellrichshausen>, as searched on 24. 9. 2022.

The sculptor Jiří Příhoda plays a similarly active role in depicting the edge between inside and outside in his work *Poustevna (Příbytek pro pobřeží I)* (Hermitage, Dwelling for the Shore I), even though the intended placement has yet not been completed. Hermitage was actually built and exhibited in Prague, in the courtyard of the Colloredo-Mansfeld Palace (2014) and a year later in Brno at Špilberk Castle. However, the arrangement of the spatial volumes is dictated by the very positioning on the border between sea and land. Unlike Casa Poli, Dwelling for the Shore I does not deal with the circumstances and requisites of long-term living at the interface. The art object therefore focuses on situating the inhabitant into two opposite positions of view. This is done by means of two identical observation posts which are internally connected and rotated 180 degrees to teach other. We also have to add the fact that the viewer sees each side from a different height. When we enter this looking machine, we cannot look back in either of the main directions of view, or rather to where the other view is looking.



OBR. 8 Pezo von Ellrichshausen, Casa Poli, Coliumo, Chile, 2005 – foto: Pezo von Ellrichshausen
FIG. 8 Pezo von Ellrichshausen, Casa Poli, Coliumo, Chile, 2005; Photo: Pezo von Ellrichshausen



OBR. 9 Pezo von Ellrichshausen, Casa Poli, Coliumo, Chile, 2005 – foto: Pezo von Ellrichshausen
FIG. 9 Pezo von Ellrichshausen, Casa Poli, Coliumo, Chile, 2005; Photo: Pezo von Ellrichshausen

In ideal case, the visitor would find him/herself in a position with a clearly defined view of land or sea, with the Hermitage being a disjunction of these two views, yet still connected through the construction. The punchline of this situation can be seen literally in how the Hermitage builds a hypertrophied boundary at the connection point, which materializes the opposing views and extends the interval of the connection continuity, or more precisely, the dwelling forms the presence of connection by interrupting it. One has to ascend or descend the stairs facing a non-transparent wall – and only then get into one of those views. The position of the dwelling then results from the accentuation of the movement between two clearly situated views.

An interior formed in such way becomes a spatial expression of the situation in between, an inhabitation of the edge: inhabitation is always related to a transition between two situations, and although the view is present in one of the situations, the other one is always part of the interior as a demarcation of the in between from the opposite side.

Petr Stolín and Alena Mičková follow up the theme of the house edge in their work. In their Zen Houses (2015), a semi-detached house on the outskirts of Liberec, simple and symmetrical volumes became a means for complex spatial considerations. Two parallel blocks for two clearly separated interior: a white interior for the studio and black interior for the house where they live. The edge of both parts is soft, thanks to the transparency of the fiberglass surface behind which wooden structure emerges. The house lessens its envelope through its partial transparency.

The actual interiors aren't large; they are so narrow that when you stand inside, you can almost reach from one wall to the other by stretching out your arms. The space of each of the blocks flows fluidly between the ground floor and first floor, though, and thanks to the generous opening of the two symmetrical blocks through the large windows, a feeling of crampedness or excessive closedness never occurs. And even though Zen Houses are made of two blocks, the space between them also counts. There are varying levels of spatial experience, from the enclosed, intimate areas to the generously optically interconnected interiors of both blocks, to the private exterior between the houses.

When defining the edge of the house, it is necessary to accentuate the optical connection of the two blocks. They form a volatile unity thanks to the symmetry of form and especially thanks to the windows, even though in fact they are two enclosed volumes. The parallel position and the symmetrical dimensions lead to the fact that, despite their physical distance, the houses constantly mingle. While the edge is delineated by walls, the edge of the wall keeps constantly crossing with its action the interlocking of one block with the other.

A final example of creative thinking on the theme of a house edge is – from the outside view – a simple, traditionally laid stone house. It can be found in the Jupiter Artland Foundation's sculpture park near Edinburgh, Scotland. The house was built

Závěr

Text se zabývá architektonickým myšlením, avšak nesoustředí se na pojmové myšlení. Na několika příkladech sleduje tvůrčí zpracování vztahu místa a prostoru. Místo je z vlastní definice uzavřeným jevem, avšak nikdy nemůže dosáhnout úplné uzavřenosti. Proto se přechod mezi vnějškem a vnitřkem stává klíčovým děním stavby, jež definuje její identitu. Banální opozice vnějšku a vnitřku ve smyslu protipólů redukuje tento důležitý vztah na pouhé nacházení se na jedné straně zdi. Tím však stírá vlastnost hrany či spíše okraje jako události, jež je vlastní jak vnitřku, tak vnějšku. Když však zaměříme pozornost na dění hrany, lze díky jejím analýzám a přiblížením ukazovat odlišné záměry v situování člověka architekturou. Cílem textu bylo ukázat na praktickém architektonickém myšlení, nakolik pojmové dvojice otevřenosti a uzavřenosti, vnitřku a vnějšku nelze chápat jako esenciální protipóly, či ještě přesněji jako esence identity staveb a situovanosti jejich obyvatel. Vztah místa a prostoru, stejně jako vztahy otevřenosti a uzavřenosti je nezbytné popisovat jako neustálé dění s proměnlivou koncentrací, jež utváří zkušenost ambivalence vnitřku a vnějšku. Úkolem architektury není nic menšího než artikulovat mikrosvět, v němž může být hledán význam a smysl v uchopování světa jako kontinuity dění.

based on the design of the artist Andy Goldsworthy in 2009. The building made of stone walls and with a simple saddle roof is located in a small wood and does not show anything unusual. It is only after opening the door that the visitor discovers that although the house defines the interior space with four walls, we cannot speak of interior in the full sense of the word. The thing is that the walls and roof cover a piece of exposed rock which has only been cleaned and left in its original form. It cannot be described as a floor: it is the outside concentrated inside the house. The rock gives an impression of growing high above the ground level, even though it had been exposed by removal of layer of soil. In this case, the relationship between inside and outside does not form an unequivocal opposition either; it would be more accurate to speak of action through ambivalence.

Conclusion

The text deals with architectural thinking, but does not focus on notional thinking. It uses several examples to trace the creative elaboration of the relationship between place and space. By definition, place is a closed phenomenon, but it can never achieve complete closure. That is why the transition between outside and inside becomes a key action of a building, which defines its identity. The banal opposition of outside and inside in the sense of opposites would only reduce this important relationship to merely being on one side of the wall. This, however, erases the property of the edge, or rather the margin as an event which is inherent in both the inside and outside. When we focus on the action of the edge, though, we can show – through analyses and approximation – different situations in situating humans in architecture. The aim of the text was to show, by means of practical architectural thinking, how the terminological pairs of openness and closedness, inside and outside cannot be understood as essential opposites, or more precisely as the essences of identity of buildings and the situatedness of their inhabitants. The relationship of place and space, just like the relationship of openness and closedness have to be described as constant action with a changing concentration, which forms the experience of the ambivalence of inside and outside. The task of architecture is nothing less than to articulate the micro world in which meaning and purpose can be sought by grasping the world as a continuity of action.



OBR. 10 Jiří Příklad, Poustevna (Příbytek pro pobřeží I), Praha, Česká republika, 2014
foto: Jiří Příklad

FIG. 10 Jiří Příklad, (Hermitage, Dwelling for the Shore I), Prague, Czech Republic, 2014;
Photo: Jiří Příklad



OBR. 11 Petr Stolín, Alena Mičeková, Zen Houses, Liberec, Česká republika, 2015
foto: archiv autorů

FIG. 11 Petr Stolín, Alena Mičeková, Zen Houses, Liberec, Czech Republic, 2015;
Photo: Archive of the authors

Topologické myšlení v architektuře

Jiří Uran Vítok

Topological Thinking in Architecture

Jiří Uran Víték

Pojem prostoru je v architektuře znám od druhé poloviny 19. století, předtím se tento termín nevyskytuje. Prostorovost, ačkoliv je pro nás všudypřítomná, je stále neuchopitelná, velmi těžce definovatelná a pro architektky samozřejmě nesamozřejmá. Jen zvědomněním si vnitřních problémů architektury, jejich interiorit a anteriorit se může její diskurz vyvíjet. Pojem topologie a topologický prostor je v matematice zkoumán od dob Eulera (1736) a jeho problému s Mosty města Královce¹. V architektuře je tento termín téměř neznámý a až na práci Grega Lynna² a Patrika Schumachera³ je teoretiky architektury nepovšimnut.

Topologické myšlení přineslo do architektury konce dvacátého století zásadní posun v myšlení o prostoru a pomohlo vytvořit a nastartovat architekturu 21. století. Každá nová generace odmítá predikce svých učitelů a hrdinů, tak aby se mohla vymezit a najít si své vlastní místo. Stejně tak se vymezuje digitální architektura. Díky zlomům v myšlení můžeme v posledním půlstoletí zažít přerod modernistické elementární racionality, její dekonstrukci, první kontinuální projekty digitálního pojetí designu, jeho následné odmítnutí a nahrazení na jedné straně retro přístupem a na druhé straně, díky vývoji výpočetního výkonu a Big Data / Carpo 2012 /, diskrétní architekturou. Vše vrcholí dnešním úsvitem umělé inteligence (AI).

Architektura je plná obrátů a turbulencí. A i když se dalo předpokládat rozvinutí tekuté modernity⁴ a její a spolutvorbu tekuté doby architekturou toku a emergentních principů, viditelných v letech 1990–2015, současná architektura se spíše projevuje diskrétní agendou⁵ a AI. Co ovšem spojuje tekutou (kontinuální), nespojitou (diskrétní) architekturu a AI je **topologie**. V tomto příspěvku budeme hledat společné prvky hlavních trendů posledních let a jejich možné vektory a kapacity rozvoje disciplíny.

¹ — 7 mostů v městě Královci, EULER.

² — Greg LYNN, *Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée*, Belgie, 2004, ISBN 2-87317-068-9.

³ — Patrik SCHUMACHER, *Autopoiesis of Architecture, I*, Wiley Londýn 2009/2010, ISBN 978-0470772980.

⁴ — Zygmunt BAUMAN, *Tekutá modernita, portál*, 2020, ISBN 978-80-262-1602-5.

⁵ — Gilles RETSIN, *Discrete Architecture in the Age of Automation*, Wiley 2019.

The concept of space has been known in architecture since the second half of the 19th century, before that the term did not appear. Spatiality, although ubiquitous for us, is still elusive, very difficult to define and, of course, unintelligible for architects. Only by becoming aware of architecture's internal problems, its interiorities and anteriorities, can its discourse evolve. The notion of topology and topological space has been studied in mathematics since Euler (1736) and his problem with the Bridges of the City of the King.¹ In architecture, the term is almost unknown, and except for Greg Lynn² and Patrick Schumacher,³ unnoticed by architectural theorists.

1 — Seven Bridges of Königsberg EULER.

2 — Greg LYNN, *Folds, Bodies and Blobs*, La Lettre volée, Belgium, 2004, ISBN 2-87317-068-9.

3 — Patrik SCHUMACHER, *Autopoiesis of Architecture, I*, Wiley London 2009/2010, ISBN 978-0470772980.

Topological thinking brought a fundamental shift in thinking about space to late twentieth-century architecture and helped to create and launch the architecture of the 21st century. Each new generation rejects the predictions of its teachers and heroes so that it can define itself and find its own place. Digital architecture is defining itself in the same way. Thanks to the ruptures in thinking, we can experience in the last half-century the transformation of modernist elementary rationality, its deconstruction, the first continuous projects of digital design, its subsequent rejection and replacement by a retro approach on the one hand, and on the other hand, thanks to the development of computing power and Big Data / Carpo 2012 /, by Discrete Architecture. All culminating in today's dawn of Artificial Intelligence.

The architecture is full of twists and turns and turbulence. And while one might have anticipated the unfolding of fluid modernity⁴ and its and the co-creation of fluid time by the architecture of flow and emergent principles visible between 1990 and 2015, contemporary architecture is more likely to be manifested by discrete agendas⁵ and AI. However, what connects fluid (continuous), discontinuous (discrete) architecture and AI is **topology**. In this paper, we will look for common elements of the major trends of recent years and their possible vectors and capacities for the development of the discipline.

4 — Zygmunt BAUMAN, *Tekutá modernita, portál*, 2020, ISBN 978-80-262-1602-5.

5 — Gilles RETSIN, *Discrete Architecture in the Age of Automation*, Wiley 2019.



OBR. 1 Jiří Uran Vítek, *Between Conflicts*, pavilion v zahradě Uměleckoprůmyslového muzea v Praze, 2022, tištěná architektura

FIG. 1 Jiří Uran Vítek, *Between Conflicts*, pavilion in the garden of the Museum of Decorative Arts in Prague, 2022, printed architecture

Element a celek

Je nutné započít naše zkoumání v archetypech architektury. Zatímco to, co definuje architekturu, je v její historii dvojice architráv (tektonika) a rostlá struktura (stereotomie), topologická odpověď by byla klenbou. Právě nahlížení na architekturu modelem topologie nám umožňuje překonat zažitá klišé a posunout se k esenci problému. Na jednu stranu je velký problém definovat, co vlastně esence architektury je, ale v našem příspěvku ji můžeme postavit na tezi, že architektura je systém manifestující ve hmotě a prostoru tří, inteligentně organizovaných, hlavních témat: **program** (jaké situace umožňuje), **prostorovou strukturu** (jak drží a rozvrhuje prostor a místo) a **jazyk** – význam (jak se projevuje vizuálně a jeho narativ).

Architráv je možno číst i jako dolmen nebo modernistický skeletový systém podobný principu Dom-ino⁶. V mnohém se jedná o neoptimální systém, který nezobrazuje efektivní distribuci sil a adekvátní materiálovou reakci. Vše je více patrné při zkoumání architektonického problému právě ze zmíněných třech kritérií (program, struktura a jazyk). Tato kritéria velmi dobře definují dobu vzniku, koncept myšlení a technologické možnosti. V dobách před příchodem výpočetní techniky nebylo možné počítat komplexní systémy, a proto musely být redukovány na jednotlivé subsystemy – elementy nebo rostlý (stereotomický) celek. Tedy Dom-ino rozkládáme na desky a sloupy, pro které známe jednotlivé výpočtové vzorce. Při převodu architrávového systému na strukturální ale nutně musíme dojít k topostrukturální optimalizaci, která je v přírodních systémech všudypřítomná. Materiál distribuován do míst s největším namáháním a redukován, kde je neefektivní. Příkladem může být kost, která v místě kloubů hmotově narůstá včetně vnitřně-kosterních objemů, svojí torzí definuje reakci materiálu na momenty My a Mz a redukuje se směrem Z-. Již u staveb A. Gaudího lze pozorovat ono tavení elementů působením vnitřních sil na topologicko-prostorovou síť (Casa Milá). Ovšem pro tuto operaci je nutné nelineárních výpočtů, které do doby výpočetní techniky nebyly možné. I proto tedy docházelo ke kompresi informací a každý systém byl redukován do systémů nebo rostlých celků. Sloup, nosník, klenba, zeď, pilíř. Výpočet momentu na nosníku byl stanoven na $M = \frac{1}{8} gl^2$ a průřez prvku byl stanoven modulem pružnosti. Tento běžně používaný způsob výpočtu průřezu prvky zásadním způsobem redukuje na primitivní

6 — LE CORBUSIER, Za novou architekturou. Petr Rezek, 2005, ISBN 80-86027-23-6.

Element and whole

It is necessary to include our explorations in the archetypes of architecture. While what defines architecture in its history is a pair of architraves (tectonics) and a soaring structure (stereotomy), the topological answer would be an arch. It is by viewing architecture through the model of topology that we can move beyond the clichés we have experienced and move to the essence of the problem. On the one hand, it is a big problem to define what the essence of architecture actually is, but in our paper, we can build it around the thesis that architecture is a system manifesting in matter and space intelligently organized around three main themes: **program** (purpose of the space), **spatial structure** (how it holds and organise space and place), and language-meaning (how it manifests visually and it's narrative).

The architrave can also be read as a dolmen or modernist skeletal system similar to the Dom-ino principle⁶. In many ways, it is a suboptimal system that does not display an efficient distribution of forces and adequate material response. In examining the three criteria just mentioned (Program, Structure, and Language) they define their time, concept of thought, and technological possibilities very well. In the days before the advent of computing, complex systems could not be computed and therefore had to be reduced to individual subsystems – elements or a growing (stereotomic) whole. Thus, we decompose Dom-ino into Slabs and Columns for which we know the individual computational formulas. However, in converting an architectural system to a structural one, we must necessarily arrive at a topological optimization, which is ubiquitous in natural systems. Material is distributed to the locations of greatest stress and reduced where it is inefficient. An example is bone, which grows in mass at the joints, including intra-skeletal volumes, defines the material response to M_y and M_z moments by its torsion, and reduces in the Z-direction. Already in the buildings of A. Gaudí we can observe the melting of the elements by the action of internal forces, on the topological-spatial network (Casa Milá). However, this operation requires non-linear calculations, which were not possible until the computer age. Therefore, also, for this reason, information compression was performed and each system was reduced into sub-systems or growing units. Column, beam, vault, wall, pillar. The calculation of the moment on the beam was set to $M = \frac{1}{8} g l^2$ and the cross-section of the element was determined by the modulus of elasticity. This commonly used method of calculating the cross-section of the elements fundamentally reduces the problem to a primitive geometry. The current method that allows us to design digitally can iterate and calculate the cross section for each section of geometry separately. Mass is reduced where it is

6 — LE CORBUSIER,
Za novou architektúrou.
Petr Rezek, 2005,
ISBN 80-86027-23-6.

geometrie. Současný způsob, který nám umožňuje digitální navrhování, dokáže iterovat a kalkulovat průřez pro každý úsek geometrie zvlášť. Hmota je redukována tam, kde není efektivní, a tedy je průřez optimalizován tak, aby byl úsporný a maximálně efektivní. To je možné díky topostrukturální analýze a optimalizaci. Poetika tohoto systému je, že rozdělí celek na velmi malé objekty, tzv. voxely (volumetric element: prostorová částice). Pro každý voxel stanovujeme jeho hodnoty, například napětí, a opět vyhodnocujeme celý systém. Tedy voxely jsou vzájemně propojeny myšlenou topologickou vazbou, která je konfrontována s mezním stavem dané rovnice, kterou posuzujeme. Nevyhoví-li daná podmínka, topologická vazba zaniká a s ní i prostorová částice – voxel. Tím dochází k redukcí systému. V našem projektu Integro se jednalo o mračno bodů, které mělo potenciál propojovat nosnou konstrukci. Následně byla přepočítána každá variace a ty, které nebyly efektivní, byly redukovány. Výsledkem byl štíhlý, optimalizovaný prostorově – strukturální model.⁷

7 — Topostructural optimization / ZHAO, ZHI, ZHANG, XIAOJIA SHELLY, PY – 2021, 2021/08/01, Design of graded porous bone-like structures via a multi-material topology optimization approach, Structural and Multidisciplinary Optimization.

Podobný způsob lze aplikovat na další struktury jako skořepiny a další. Form Finding / objevování formy, jehož zakladatelem je Otto Frei. Jeho pokusy definovat optimální struktury skořepiny vycházely převážně z fyzických modelů. Pro skořepiny s osvětlovacími otvory vycházel převážně z modelů založených na experimentaci s elektrolyzou vody a jinými kapalinami a pružnými látkami. Jeho pokusy a úvahy se staly základním rámcem pro další práci Patrika Schumachera⁸, který jeho fyzické modely převedl do digitálního světa a tvoří jeho významnou část parametricismu – tektonismu.⁹

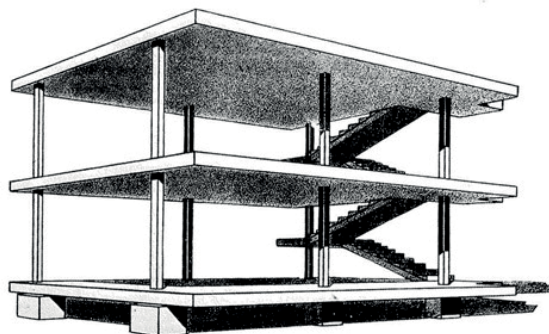
8 — Patrik SCHUMACHER, From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural, <https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Topology%20to%20Topology.html>.

9 — Patrik SCHUMACHER, From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural.

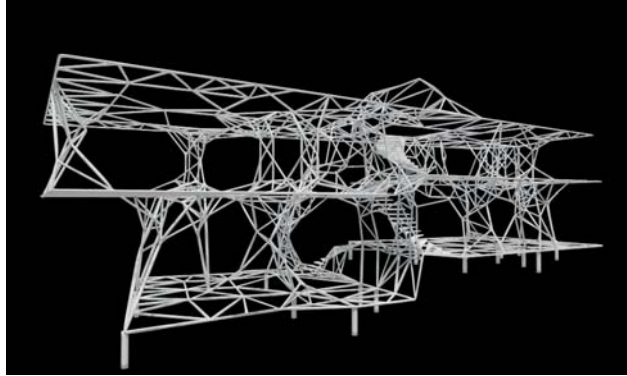
Element a síť

Topologické zkoumání má velmi významný přínos i v urbanistických problémech. Budeme-li považovat město za systém skládající se z prvků, rostlic a jejich relací, velmi jednoduše můžeme započít s přesnou analýzou propojenosti a prostupnosti či soudržnosti městské struktury. Pro zkoumání lze použít metodiku sítí.

Při analytických urbanistických metodách se nám podařilo vyzkoumat jasnou závislost mezi strukturou města a sítí, kterou tato struktura tvoří. Každá koncepce či doba, kdy vzniká takováto struktura, se vyznačuje jistým způsobem zacházení s parcelami (jejich velikost a proporce), technikou výstavby, koncepcí veřejných prostor. Zcela jiná je struktura gotická, barokní, renesanční, ale samozřejmě modernistická, postmoderní i dekonstruktivistická či v poslední době parametrická.



OBR. 2 Perspektivní pohled Dom-ino systému, 1914. image from Le Corbusier & Pierre Jeanneret, Oeuvre Complète Volume 1, 1910–1929, Les Editions d'Architecture Artemis, Zürich, 1964
FIG. 2 Perspective view of the Dom-ino system, 1914. Image from Le Corbusier & Pierre Jeanneret, Oeuvre Complète Volume 1, 1910–1929, Les Editions d'Architecture Artemis, Zürich, 1964



OBR. 3 Integro, 2014. Obrázek z Studio Zaha Hadid, Nechme promluvit logiku architektury, autoři Jiří Vítek, Saba Nabavi a Junghwo Park, autor

FIG. 3 Integro, 2014. Image from Studio Zaha Hadid, make architectural logic speak, studio project by Jiri Vitek, Saba Nabavi and Junghwo Park, author

not efficient and hence the cross-section is optimised to be economical and maximally efficient. This is made possible by topostructural analysis. The poetics of this system is that it divides the whole into very small objects, called voxels (volumetric element: spatial particle). For each voxel, we determine its values, for example, the stresses, and again evaluate the whole system. Thus, the voxels are interconnected by an imaginary topological link, which is confronted with the limit state of the equation we are evaluating. If the given condition is not satisfied, the topological bond disappears and with it the spatial particle – voxel. This leads to a reduction of the system. In our Integro project, it was a point cloud that had the potential to connect a support structure. Subsequently, each variation was recalculated and those that were not effective were reduced. The result was a lean, optimised spatial-structural model.⁷

7 — Topostructural optimization / ZHAO, ZHI ,ZHANG, XIAOJIA SHELLY, PY – 2021, 2021/08/01, Design of graded porous bone-like structures via a multi-material topology optimization approach, Structural and Multidisciplinary Optimization.

A similar method can be applied to other structures such as shells and others. Form Finding / Form Discovery, whose founder is Otto Frei his attempts to define optimal shell structures were based mostly on physical models. For shells with illuminating holes, he relied mainly on models based on experiments with the electrolysis of water and other liquids and elastic substances. His experiments and considerations became the basic framework for the subsequent work of Patrik Schumacher⁸, who translated his physical models into the digital world and formed an important part of his parametricism-tectonism.⁹

8 — Patrik SCHUMACHER, From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural, <https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Typology%20to%20Topology.html>.

9 — Patrik SCHUMACHER, From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural, <https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Typology%20to%20Topology.html>.

Element and network

Topological exploration has a very significant contribution to urban planning problems. If we consider the city as a system consisting of elements, layers and their relations, we can very easily start a precise analysis of the interconnectedness and permeability or cohesion of the urban structure. The methodology of networks can be used to investigate this.

Using analytical urban methods, we were able to test a clear dependence between the structure of the city and the network it forms. Each concept or period when such a structure is created is characterised by a certain way of dealing with the plots (their size and proportions), the technique of construction, and the concept of public spaces. The Gothic, Baroque, Renaissance, but of course modernist, post-modern, deconstructivist or more recently parametric structure is completely different.

Tvorba sítě

Elementy (ohraničené objekty polyline), jejich těžiště uzly (nody), spojnice – hrany (edge)

První síť – grafický diagram:

closest points network: síť vzniká hledáním nejbližších sousedních uzlů, kdy ke každému těžišti elementu hledáme X sousedních. Minimální počet sousedů pro tvorbu sítě jsou 3 a síť vytváříme propojením sousedících uzlů pomocí hran. Vzniklý diagram vytváří čitelné struktury či patterny, které lze snadno charakterizovat jako typy sítě

- Sběrníková (bus) **topologie**.
- Kruhová (ring) **topologie**.
- Hvězdicová (star) **topologie**.
- Stromová (tree) **topologie**.
- Páteřní (backbone) **topologie**.

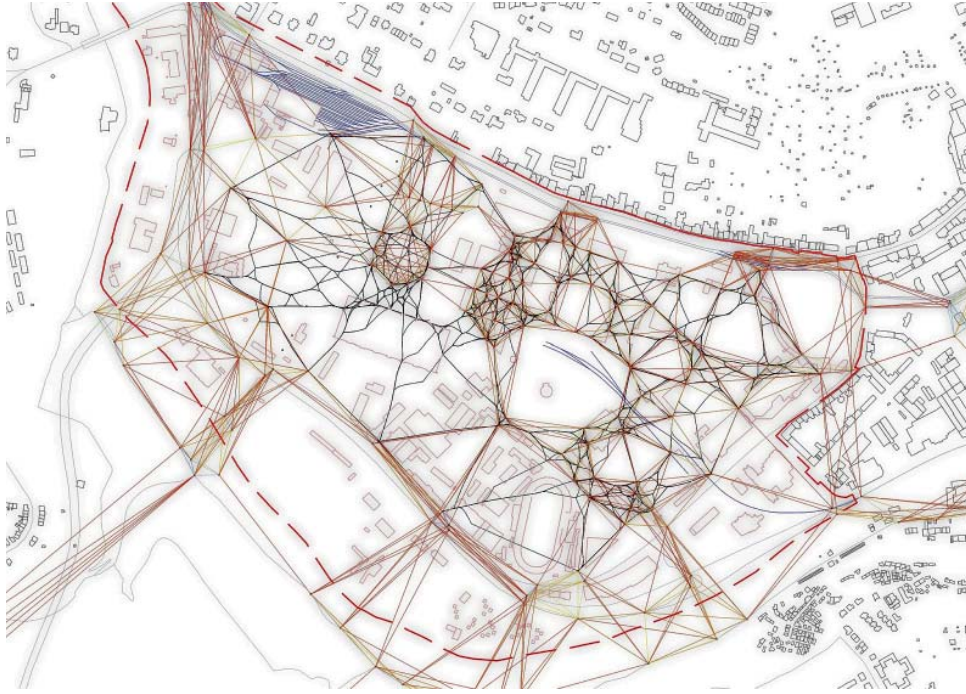
Z diagramů je patrné i v jakém časovém celku struktura vzniká a jakou vazbu či městskou strukturu vytváří. Odklon od modernistického, striktně rozděleného privátního a veřejného prostoru přes poloveřejný je čitelný ve změně sítě z blokové kruhové topologie na stromovou či sběrníkovou strukturu. Tyto modernistické sítě již mají problém vytvořit dostatečně silně definované prostory a vyznačují se *nemístem* (nejasně definovaná struktura).

Euklidovský a topologický prostor

Kieslerův Endless House a Embryo House Gregga Lynna

První pokus o topologický prostor lze sledovat u Frederika Kieslera a jeho první verzi Endless House¹⁰ projektu z roku 1922. Jedná se o významný projekt, protože jeden z mála nerozpracovaná automatizovanou, fordistickou a modernistickou vizi architektury počátku minulého století, ale navrácí se k budování lidského prostoru. Prostory obemkávají uživatele a prolínají se jeden přes druhý, jako plynulý tok. Frederik Kiesler projekt stavěl jako model, ze sítě, na které aplikoval modelářskou hmotu. Zajímavost projektu a jeho aktuálnost pro dnešek tkví hlavně v tom, že jsme ho schopni nejen virtualizovat, tedy převést do precizní digitální formy, ale jsme ho schopni i kalikulovat a fabrikovat. Například pomocí 3D tisku.

¹⁰ — Frederik KEISLER, Endless house, 1950–1960, MOMA, <https://www.moma.org/collection/works/82405>.



OBR. 4 Analýza místa, Soutěž na rozvoj BVV, 2016. Soutěžní projekt, autor: Jiri Vitek, autor
FIG. 4 Site Analysis, BVV Development Competition, 2016. Competition project, author: Jiri Vitek, author

Významným projektem v topologii a digitalizaci architektury byl Embryologický dům Grega Lynna.¹¹ Idea fluidního prostoru je poprvé animována a je proveden záznam vývoje objektu včetně jeho iterování. Díky křivkám (SPLINE), které lze pomocí 'convex hull' kontrolovat a řídit napětí objektu (řídících křivek) a prostým přidáváním a ubíráním kontrolních bodů zvyšovat jeho komplexitu, lze dosáhnout zcela nových kvalit objektu. Navíc celá idea je motivována nekonečností možností iterací a proměny prostoru. Základní ovoid definovaný zmíněnými řídicími „splinami“ (konstruovaný ve velmi precizním softwaru Microstation) je následně animován. Rozpohybování a pohyb je digitálně zaznamenán (vše v softwaru MAYA, často používaný pro filmový průmysl). Iterace nabízely architektovi, respektive jeho klientovi, výběr jeho preferovaného výsledku. Tedy nejde o to získat jeden konkrétní objekt, ale každý si může objekt přizpůsobit své preferenci. Projekt je přínosný nejen z filozofického hlediska, kde místo konkrétních interpretací myšlené stavby přicházíme k organickému, rostlému parametricko-topologickému modelu, ale predikuje vývoj jak v navrhování, tak ve fabrikaci. Tím, že byl projekt zobrazován nejen jako počítačová skica, ale byl převeden do fyzického prostoru, pomocí CMC a laserového řezání, definuje na dalších dvacet let metodiku architektonické práce.

11 — Greg LYNN, Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée, Belgique, 2004, ISBN 2-87317-068-9.

Mobius strip a Kleinova Lahev

Mobiova páska se stala velmi populárním tématem i v architektuře. Kolem roku 1993 dostává holandské UN studio zakázku na rodinný dům, který má využít nový pohled na program uživatelů. Dům má být co nejvíce otevřený, tak aby spolu rodina mohla trávit společný čas, má zároveň umožňovat, aby každý člen rodiny měl svoje soukromí a prostor. Vzniká koncept diagramu využití prostoru domu 24/7. Dům Möbius byl navržen s prolínající se trajektorií, která spojuje pracovní prostory a ložnice, přičemž společné prostory jsou umístěny na křižovatkách. Artikulace Mobiovy pásky je nejen vyjádřena programem, ale i architektonickým jazykem. Jak se smyčka obrací, vnější betonový plášť se mění v interiérový nábytek a skleněné fasády se stávají vnitřními příčkami. Dalším pěkným příkladem je autobusová zastávka od NIO Architects z roku 1995.

Topologie a Mesh

Polygonální modelování přichází do architektury z prostoru CGI (tedy computer graphic image), který je typickým pro filmový průmysl. Dávno se ukázalo, že vytvářet nové světy filmu je daleko jednodušší v počítačích než ve fyzickém světě. Modelování objektů v prostoru bylo možné pomocí dvou základních metod. Polygonální a nurbsové. V polygonální, máme základní objekt, například krychli, kde posouváním jednotlivých kontrolních vertexů (vrcholů) nebo edgí (hran) či

Network formation

Elements (bounded polyline objects), their centres of gravity nodes (nodes), links – edges (edge)

The first network – graphic diagram:

closest points network: the network is formed by finding the nearest neighbour nodes. where for each element's centre of gravity we search for X neighbours. The minimum number of neighbours for network formation is 3 and we form the network by connecting neighbouring nodes using edges. The resulting diagram produces readable structures or patterns that can be easily characterized as network types

- Bus **topology**.
- Ring **topology**.
- Star **topology**.
- Tree **topology**.
- Backbone **topology**.

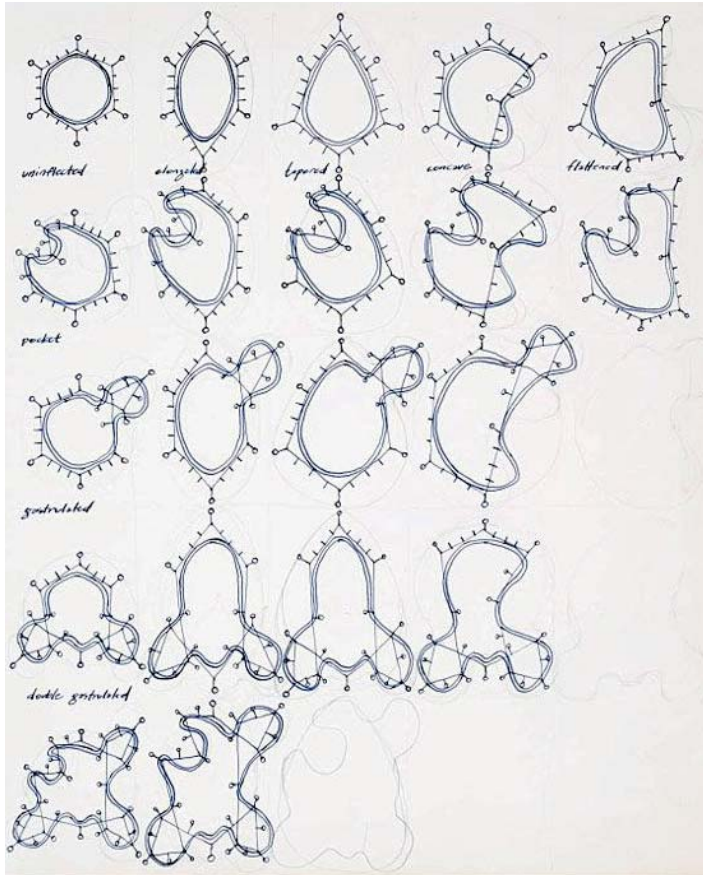
The diagrams also show the time frame in which the structure is created and the link or urban structure it creates. The departure from the modernist strictly divided private and public space through the semi-public is visible in the change of the network from a block-circular topology to a tree or bus structure. These modernist networks already struggle to create sufficiently strongly defined spaces and are characterised by *non-locality* (vaguely defined structure).

Euclidean and topological space

Kiesler's Endless House and Gregg Lynn's Embryo House

The first attempt at topological space can be traced back to Frederik Kiesler and his first version of the Endless House¹⁰ project from 1922. It is a significant project because it is one of the few that does not elaborate on the automated, Fordist and modernist vision of architecture of the early last century, but returns to the construction of human space. Spaces encircle the user and flow over each other, like a seamless flow. Frederik Kiesler built the project as a model, from networks to which he applied modelling matter. The project's interest and its relevance for today lie mainly in the fact that we are not only able to virtualize it, i.e. convert it into a precise digital form, but we are also able to calculate and fabricate it. For example, using 3D printing methods.

¹⁰ — Frederik KEISLER, Endless house, 1950–1960, MOMA, <https://www.moma.org/collection/works/82405>.



OBR. 5 <https://www.cca.qc.ca/en/articles/issues/4/origins-of-the-digital/5/embryological-house>

FIG. 5 <https://www.cca.qc.ca/en/articles/issues/4/origins-of-the-digital/5/embryological-house>

An important project in topology and digitization of architecture was Greg Lynn's Embryological House.¹¹ The idea of fluid space is animated for the first time and a record of the evolution of the object is made, including its iteration. By using a convex hull, the spline can control the tension of the object and by simply adding and removing control points we increase its complexity. Moreover, the whole idea is motivated by the infinite possibilities of iteration and transformation of space. The basic ovoid defined by the aforementioned control 'splines' (constructed in the very precise Microstation software) is then animated, directly moving and the movement is digitally recorded (all in MAYA software, often used for the film industry). The iterations offered the architect, or rather his client, the choice of his preferred result. That is to say, it is not about getting one particular object, but everyone can customise the object to their preference. The project is not only beneficial from a philosophical point of view, where instead of specific interpretations of the building in question, we arrive at an organic, growing parametric-topological model, but it predicts developments in both design and fabrication. By representing the project not only as a computer sketch but by translating it into physical space, using CNC and laser cutting, it defined the methodology of architectural work for the next twenty years.

11 — Greg LYNN, *Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée*, Belgium, 2004, ISBN 2-87317-068-9.

Möbius strip and Klein's Bottle

The Möbius strip has become a very popular theme in architecture as well. Around 1993, a Dutch UN studio was commissioned to design a house that would take a new look at the user program. The house was to be as open as possible so that the family could spend time together while allowing each family member to have their own privacy and space. The concept of a 24/7 space use diagram of the house is emerging. The Möbius house has been designed with an intersecting trajectory that connects workspaces and bedrooms, with common spaces located at the intersections. The articulation of the Möbius strip is not only expressed in the program but also in the architectural language. As the loop turns, the outer concrete shell becomes interior furniture and the glass facades become interior partitions. Another nice example is the bus stop by NIO Architects from 1995.

Topology and Mesh

Polygonal modelling comes to architecture from the CGI (computer graphic image) space, which is typical of the film industry. It has long been shown that creating new worlds of the film is far easier in computers than in the physical world. Modelling objects in space was possible using two basic methods. Polygonal and NURBS. In Polygonal, we have a basic object, for example, a cube, whereby moving individual control vertices (vertices) or edges (edges) or finally faces (faces) we achieve the

nakonec face (plošek) dosahujeme přibližného požadovaného tvaru. Detailu pak dosahujeme buďto přidáním drobnějšího rozlišení (tedy síť zahustíme), nebo vyhlazováním (catwalk, laplacian apod). Je nutné neporušit topologii, neboť se přetrhají vazby a návaznosti. Síť je definována vrcholy (vertexy), které jsou spojeny hranami (edge), ale narozdíl od předchozího problému sítě (vertex a edge) formuje plochu tzv. face. Model je pak tvořen právě uzavřenými ploškami (faces), které v ideálním případě tvoří neporušenou quadrovou soustavu. Polygonální modelování stojí na začátku blobu, hladkých staveb Zahy Hadid, vzrušujících struktur Erica Goldemberga, práce Hernana Diaze Alonsa a dalších. V začátcích digitální architektury, kde hladkost a tekutost geometrie, preciznost a vyhlazování, ale i stavba struktury, dynamika, kontrola nad architekturou objektu je mistrovství. Je iluzí, že digitální nástroje nebo změna myšlenkového modelu či konceptu automaticky vytváří lepší nebo dokonalou architekturu. Vždy jsou to jen nástroje, které nám ale umožňují udělat onen potřebný krok dále.

Diagramatické myšlení a topologie

Tvůrčí proces se osvobozuje ze schémat, která se přenáší jako body v síti z jedné generace umělců na další. Jak uniknout schématu, jak uniknout ověřenému typu, topologii, kliše. Jak být neustále kreativní a evoluční?

Fascinující je již diagramatické myšlení u Jana Blažeje Santiniho. Jeho konstruování prostoru není jen založené na bolevských operacích, známých geometrických schématech barokní doby, ale systém vytváří pomocí číselných kódů, které převádí do konstrukčních diagramů. Základní číselná řada 1,3,5,7,8,10,12 a 21 vytváří vazby – vztahy. Systém kružnic konstruuje prostor, který není primitivní extrudování v Z-ové ose, rozvoj diagramu se přenáší v prostoru. Skloněné trojúhelníkové pilastry schodišť vyzývají k dvoukřivé ploše, kterou je nesehnout dostupnými geometrickými metodami baroka, jako například hojně využívanou stereotomií. Proto dochází k definování půdorysné prostorové křivky okapu a řezu / průřezu / profilu střechy. Zbytek geometrie je „generován“ na místě testováním a zkoušením. Výsledek tak není exaktně predikovaný, ale emergentně vytvořený interakcí tesaře a hmoty při zachování daných pravidel. Je v detailech vidět, že tvar střechy není úplně pod kontrolou, ale může se jednat i o důsledek rekonstrukce po vyhoření kostelu, každopádně tuto plochu lze již nazývat dvoukřivou / nurbovou plochou / topologickou plochou, která spíše než klasickým barokním způsobem / definování profilu složeného z částí kružnic při jednostupňové řídicí křivce / je formována působením vnitřních a vnějších sil.

Chceme-li vnímat kontinuální vývoj křivky, musíme opět zmínit Grega Lynna, který v počátku 90. let přichází s topologickou křivkou, *splinou*. Křivka není definována přímo kontrolními body, ale její uzly, které se nachází mimo samotnou křivku, definují její napětí a spádovost, jak již bylo zmíněno. Samotná definice křivky vychází dle M.Carpa¹² z principu konstrukcí lodí, kdy hlavní profil

12 — Mario CARPO, *The Second Digital Turn, Design Beyond Intelligence*, The MIT Press, 2017, s. 240 a n., ISBN 978-0-26253-402-4.

approximate desired shape. The detail is then achieved either by adding finer resolution (i.e., thickening the mesh) or by smoothing (catwalk, laplacian, etc.). It is necessary not to break the topology, as links and continuities are broken. The network is defined by vertices (vertex) that are connected by edges (edge), but unlike the previous network problem (vertex and edge) it forms a surface called Face. The model is then formed by just closed faces (faces), which ideally form an intact quad system. Polygonal modelling is at the origin of the blob, the smooth structures of Zaha Hadid, the exciting structures of Eric Goldemberg, the work of Hernan Diaz Alonso and others. In the early days of digital architecture, where the smoothness and fluidity of geometry, precision and smoothing, but also the building of the structure, dynamics, and control over the architecture of the object is mastery. It is an illusion that digital tools, or a change of thought model or concept, automatically create a better or perfect architecture. They are always just tools that allow us to take the necessary step further.

Diagrammatic thinking and topology

The creative process frees itself from the schemas that are passed on like points in a net from one generation of artists to the next. How to escape the schema, how to escape the tried and true type, the typology, the cliché. How to be constantly creative and evolutionary?

The diagrammatic thinking of Jan Blazej Santini is already fascinating. His construction of space is not only based on Boolean operations, the well-known geometrical schemes of the Baroque era, but he creates a system using numerical codes which he translates into construction diagrams. The basic numerical series 1,3,5,7,8,10,12 and 21 create links – relationships. The system of circles constructs a space that is not a primitive extrusion in the Z-axis, the development of the diagram is transferred in space. The sloping triangular pilasters of the staircase invite a double-curved surface that is not easily developed by the available geometric methods of the Baroque, such as the much-used stereotomy. Hence the definition of the plan space curve of the eaves and the section / section / profile of the roof. The rest of the geometry is ‘generated’ on-site by testing and rehearsal. The result is thus not exactly predicted, but emergently created by the interaction of the carpenter and the mass while maintaining the given rules. It can be seen in the details that the shape of the roof is not completely under control, but it may also be the result of the reconstruction after the church burned down; in any case, this surface can already be called a double-curved / NURBS surface / topological surface, which rather than the classical baroque way / defining a profile composed of parts of circles at a one-degree control curve / is shaped by the action of internal and external forces.

If we want to perceive the continuous evolution of the curve we have to mention Greg Lynn, who in the early 1990s came up with a topological curve, *Spline*. Control points do not directly define the curve, but their nodes, outside the curve itself, define its tension and gradient. The very definition of the curve is based, according

měl dobře odolávat vlnám, spline byl způsob, jakým ohýbají řemeslníci dřevěné trámy. Právě definování uzlů a vnitřních sil, které vytváří formu, je typické pro digitální kulturu v 90. letech. Následný vývoj, který rozvíjí animované formy, dává vzniknout morfovaným a parametrickým modelům.

Můžeme sledovat dvě základní tendence, jedna **bottom up**, kdy jsou nastavena pravidla a na jejich základě, simulací, iterativním procesem vzniká geometrie; druhý způsob je přímé modelování, můžeme nazvat **top down**, kdy se jedná o low poly nebo různé skulptivní procesy vytváření. Oba způsoby ve velké míře využívají diagramu a topologie.

V prvním případě, **bottom up**, je ovšem diagram převeden do relací, vztahů, které jsou popsány pomocí formulí, kódů, a následně program/proces vygeneruje výsledek. Úpravou parametrů, vztahů či formulí můžeme měnit výsledek či vytvářet katalog řešení, nebo dokonce zapojit optimalizační procesy, kde s využitím umělé inteligence dokážeme buď hledat maxima, minima jednotlivých úloh, či můžeme dokonce sledovat různé tendence a predikce řešení a tendovat k nějakému určitému výsledku, který nám vyhovuje. Oproti tomu **top down systém** vyžaduje neustálé rozhodovací procesy designéra, kdy na jednu stranu máte naprostou kontrolu nad výsledkem, ale na stranu druhou se těžko dostanete k novým řešením. U modelací tohoto typu je velmi důležité udržet správnou topologii povrchů, quadů, aby byla geometrie přesná a editovatelná, jak již bylo zmíněno. Proto je třeba aplikování animačních metod, kdy morfojeme z jednoho stavu geometrie do stavu druhého, pozměněného. Důležité je držet stejnou topologii objektu. Jen tak je možné proces animovat, protože zjednodušeně řečeno se jedná o morfování tvaru jednoduchou aproximací vzdálenosti všech vertexů geometrie. Viz již zmíněný příklad Embryologic house od Grega Lynna. Program spočítá jednotlivé vektory, jejich směry, velikosti a doplní požadovaný počet mezistavů – iterací.

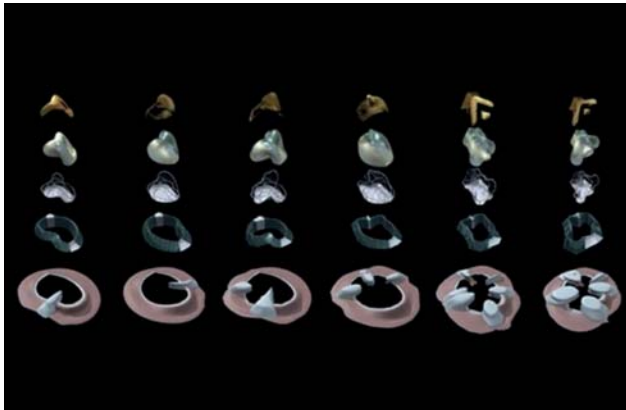
Velmi zajímavým příkladem podobného principu byl program H.U.R.B.A.N selector¹³, který vstupní geometrie přepočítal na objekty se stejnou topologií a následně uměl aproximovat mezi jejich mezní stavy. Program jsme použili se studenty, kdy iterovali objekty nacházející se na vybrané existující trase. Existující objekty byly vymodelovány a nahrazeny do programu. Následně probíhalo morfování mezi jednotlivými stavy, kdy vznikaly nové objekty, které si ovšem nesly klíčové vlastnosti svých rodičů. Premise byla, že lze generovat zcela nové objekty ze známých objektů pomocí iterování a morfování.

13 — H.U.R.B.A.N byl projekt zabývající se morfováním objektů, jako vstup sloužily dva objekty, které byly přeformátovány na stejnou topologickou strukturu. Následně s nimi bylo možné vytvářet iterace podobné principům Embryological house Grega Lynna. Projekt zpracovával mimo jiné Jan Pernecký a Jan Toth a byl podpořen, https://scd.sk/h-u-r-b-a-n-selector/?fbclid=IwAR1NGI_jgx-tau66_p96ltIXBeeqt3nXUilms4pysZ9F1FQ8Et-23sD_c2vi0.



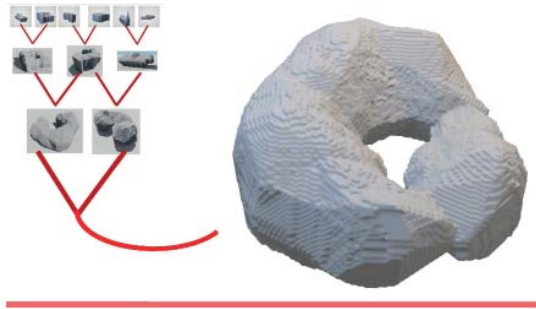
OBR. 6 Endless House: Friedrich Kiesler

FIG. 6 Endless House: Friedrich Kiesler



OBR. 7 Embryological house: Greg Lynn

FIG. 7 Embryological house: Greg Lynn



OBR. 8 Topologické morfování pomocí programu HURBAN selector, ZAR 2020 v research cluster Uran na Fakultě architektury. Studenti: Krcho, Vido, Šebora.

FIG. 8 Topological morphing using HURBAN selector, ZAR 2020 in the Uran research cluster at the Faculty of Architecture. Students: Krcho, Vido, Šebora.

to M. Carpo¹², on the principle of ship design, where the main profile was supposed to resist waves well, the spline being the way craftsmen bend wooden beams. It is the definition of knots and the internal forces that create a form that is typical of digital culture in the 1990s. Subsequent developments that develop animated forms give rise to morphed and parametric models.

12 — Mario CARPO, *The Second Digital Turn, Design Beyond Intelligence*, The MIT Press, 2017, 240 pp., ISBN 978-0-26253-402-4.

We can observe two basic tendencies, one **bottom up**, where rules are set and based on them, by simulation, iterative process, geometry is created, the other way is direct modelling, we can call top down, where it is low poly or various sculpting processes of creation. Both ways make extensive use of the diagram and topology. In the first case, bottom-up, however, the diagram is converted into relations, relations that are described by formulas, and codes and then the program/process generates the result. By modifying the parameters, relations or formulas, we can change the result, or create a catalogue of solutions, or even involve optimization processes, where, using artificial intelligence, we can either look for maxima or minima of individual tasks, or we can even observe different tendencies and predictions of solutions and tend to some particular result that suits us. In contrast, a **top-down system** requires constant decision-making by the designer, where on the one hand you have total control over the outcome, but on the other hand, it is hard to get to new solutions. In this type of modelling, it is very important to keep the correct topology of the surfaces, and quads, so that the geometry is accurate and editable as already mentioned. This is why we need to apply animation methods where we morph from one state of the geometry to another, modified state. It is important to keep the same object topology. This is the only way to animate the process because in simple terms it is morphing the shape by simply approximating the distance of all the vertices of the geometry. See the aforementioned example of Greg Lynn's Embryologic house. The program calculates the individual vectors, their directions, sizes and adds the required number of intermediate states – iterations.

A very interesting example of a similar principle was the program H.U.R.B.A.N selector¹³, which recomputed the input geometries into objects with the same topology and then was able to approximate between their limit states. We used the program with students iterating over objects located on a selected existing path. The existing objects were modelled and loaded into the program. Subsequently, morphing between states was performed, creating new objects that carried their parents' key properties. The premise was that entirely new objects could be generated from known objects through iteration and morphing.

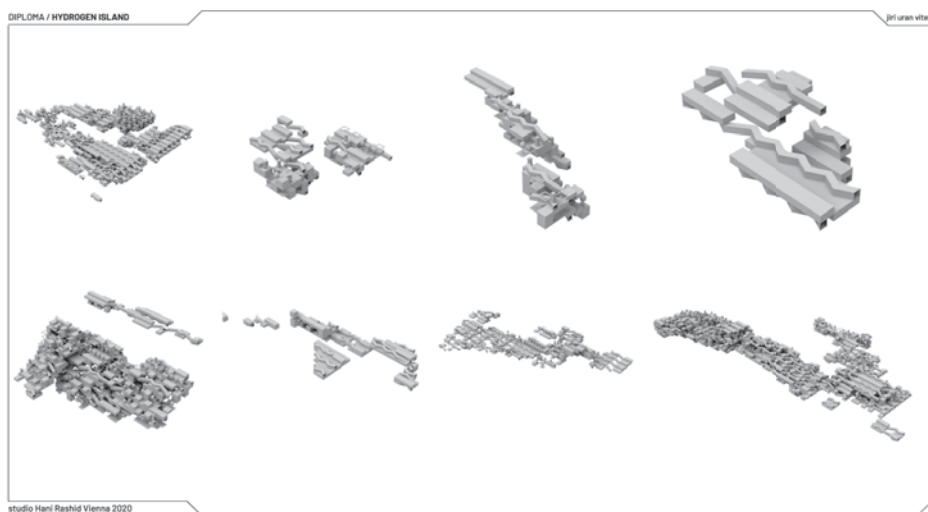
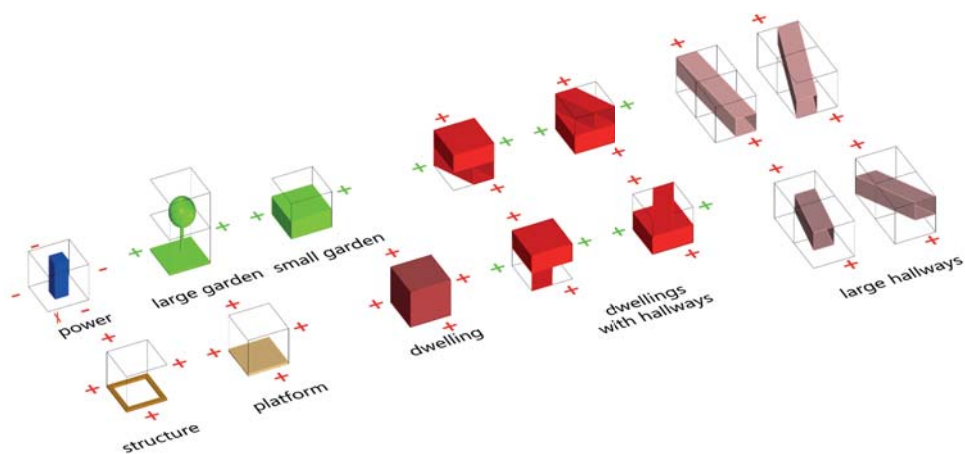
13 — H.U.R.B.A.N was a project dealing with object morphing, two objects were used as input and reformatted to the same topological structure. Subsequently, it was possible to create iterations with them similar to Greg Lynn's Embryological House principles. The project was developed by Jan Pernecký and Jan Toth, among others, and was supported by https://scd.sk/h-u-r-b-a-n-selector/?fbclid=I-wAR1NGI_jgxtau66_p961tIXBeeqt3nXUilm-s4pysZ9F1FQ8Et23sD_c2vi0.

Všechny tyto nastíněné procesy patří spíše do doby prvního digitálního období.¹⁴ Zhruba kolem roku 2012 se dostáváme k dalšímu pomyslnému zvratu v diskurzu digitálních témat od kontinuálních ploch k diskrétním architekturám. Vedou k tomu dva základní momenty. Vzrůstající výkonnost a dostupnost počítačů a ekonomická krize 2008. Exponenciální nárůst výpočetního výkonu vede k situaci, kdy poprvé v historii člověka nemusíme data komprimovat. (Již abeceda je komprimace dat, myšlenky a popis světa jsou přeloženy do systému 24 znaků, ze kterých je možné skládat slova, věty. Stejně tak hudba, obraz byl vždy kódován do notového zápisu, komprimovaných mp3, avi souborů apod.) Dnes již používáme systém BIG DATA, kdy dokážeme ukládat, přenášet triliony dat, a tak není více třeba používat komprimované formule. Na příkladu statiky lze ukázat, že mezní stav únosnosti se počítal pomocí vzorce, který komprimoval zkušenost a observaci problému. To však vyžaduje uvažovat homogenně, ale taková skutečnost či materiál není. Dnes dokážeme analyzovat každý voxel (částici) materiálu a pro jednotlivý prvek simulovat a predikovat přesné chování. Tento posun doprovází i zásadní změna v produkci objektů. Křivka hromadné produkce, kdy jsou jednotlivé stejné kopie levnější a levnější v momentě 3D tisku neplatí. Každá kopie stojí stejně, tedy je možné vytvářet individuální verze při stejných nákladech na čas a materiál. Nekonečná variabilita vede k individualizaci a nezávislosti. Diskrétní přístup k architektuře byl v počátku kritickou reakcí na kontinuální parametrické architektury, kdy model vycházel z top down nahlížení a nezohledňoval chování struktury a materiálu. Křivé povrchy tak byly převedeny na části, které vynášejí klasické rámy, či příhrady, nebo dokonce ortogonální skelety. Samotná esence povrchu je smazána sekundárním, inženýrským nazíráním na věc. Čímž nejsme daleko od Santiniovské střechy. Mladí architekti tak kolem roku 2012 začali přemýšlet, jakým způsobem spojit generovanou formu s její produkcí, ať již na bázi 3D tisku, či CAM (computer aided manufacturing). Metody, které se používaly převážně pro generování objektů, byly bottom up agentové systémy, které neumožňují jen simulaci, optimalizaci, ale i fabrikaci výsledného objektu. V těchto systémech je zajímavý fakt, že jednotlivé iterace představují samotný voxel (částici) geometrie, tedy kontinuální povrch je interpretován do jednotlivých buněk. Fabrikovaný výsledek 3D tiskem je pak přesným otiskem digitálního modelu. Tyto tendence se pak rozdělují do architektur, které se opírají o object oriented ontology (Mark Foster Gage, Michael Hansmeyer) a diskrétní architekturu reprezentovanou především Gilles Retsinem, který se věnuje především převedením digitálních modelů do postavitelných architektur, které jsou poskládány z univerzálních

14 — Mario CARPO, *The digital turn in architecture 1992–2012*, John Wiley & Sons Ltd, 2013.

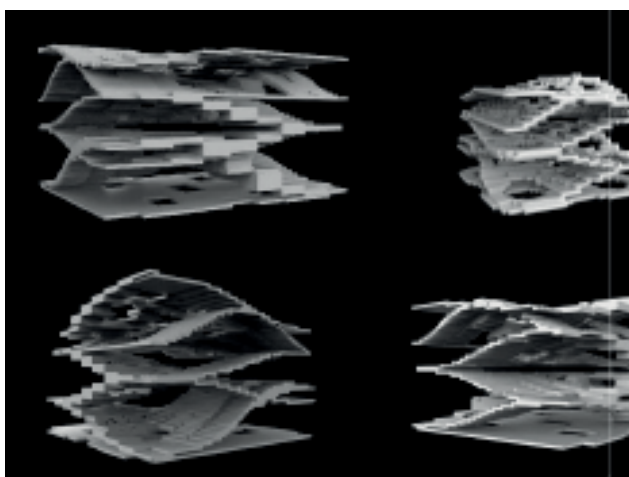
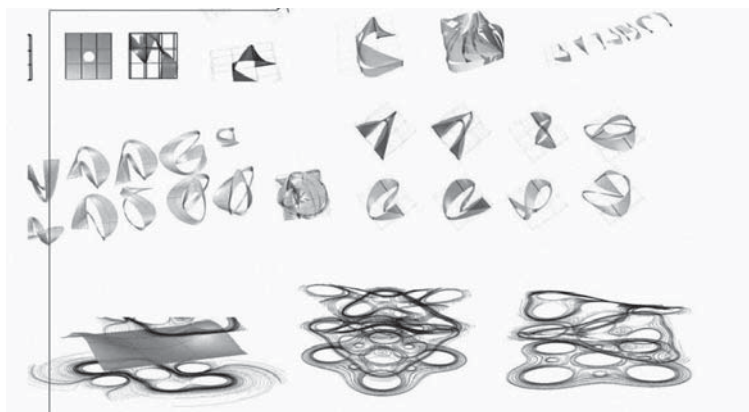
However, all of these processes belong more to the first digital period.¹⁴ Around 2012 we reached another imaginary turn in the discourse of digital topics from continuous surfaces to discrete architectures. Two fundamental moments lead to this. The exponential increase in computing power leads to a situation where, for the first time in human history, we do not need to compress data. (Already the alphabet is a compression of data, thoughts and descriptions of the world are translated into a system of 24 characters from which words and sentences can be composed. Likewise, music and image have always been encoded into compressed mp3, avi files etc.) Today we already use the BIG DATA system where we can store, transmit trillions of data and so there is no more need to use compressed formulas. Using the example of statics, it can be shown that the limit state of the carrying capacity was calculated using a formula that compressed the experience and observation of the problem. But this requires thinking homogeneously, and there is no such fact or material. Today we can analyse each voxel (particle) of material and simulate and predict the exact behaviour of each element. This shift is accompanied by a fundamental change in the production of objects. The mass production curve where individual identical copies are cheaper and cheaper at the moment of 3D printing does not apply. Each copy costs the same, so it is possible to create individual versions at the same cost in time and materials. infinite variation leads to individualisation and independence. The discrete approach to architecture was in the beginning a critical reaction to continuous parametric architectures, where the model was based on a top-down view and did not take into account the behaviour of the structure and material. Thus, curved surfaces were converted into parts that exhibit classical frames or trusses, or even orthogonal skeletons. The very essence of the surface is obliterated by a secondary, engineering viewpoint. Which is not far from the Santini's roof. So around 2012, young architects began to think about how to connect the generated form with its production, whether based on 3D printing or CAM/computer-aided manufacturing /. The methods that were mainly used for generating objects were bottom-up agent systems that not only allow simulation, optimization, but also the fabrication of the final object. What is interesting in these systems is that the individual iterations represent the voxel (particle) geometry itself, i.e. the continuous surface is interpreted into individual cells. The fabricated result by 3D printing is then an exact impression of the digital model. These tendencies are then divided into architectures that rely on an object-oriented ontology (Mark Foster Gage, Michael Hansmeyer) and discrete architectures represented mainly by Gilles Retsin, who is mainly concerned with

14 — Mario CARPO, *The digital turn in architecture 1992–2012*, John Wiley & Sons Ltd, 2013.



OBR. 9 Distribuce jednotlivých modulů dle daných topologických pravidel, Hydrogen Island, 2020. Image from Studio Hani Rashid, relaxation of topological landscape, thesis project by Jiri Vitek, autor

FIG. 9 Distribution of individual modules according to given topological rules, Hydrogen Island, 2020. Image from Studio Hani Rashid, relaxation of topological landscape, thesis project by Jiri Vitek, author



OBR. 10 Kontinuálně diskrétní prostor, generování topologické plochy na mřížce devíti čtverců, testování chování vektorového pole a překlad obou metodik do prostoru pomocí diskrétních modulů. Hydrogen Island, 2020. Image from Studio Hani Rashid, relaxation of tological landscape, thesis project by Jiri Vitek, autor

FIG. 10 Continuously discrete space, generating a topological surface on a grid of nine squares, tessellating the behaviour of the vector field, and translating both methodologies into space using discrete modules. Image from Studio Hani Rashid, relaxation of topological landscape, thesis project by Jiri Vitek, author

modulů – buněk. Systém, který je používán pro distribuci modulů, je striktně založen na **topologických vazbách**. Jsou definovány možné spoje, orientace modulu. Systém generuje možné variace řešení, které je možné dále optimalizovat. Celý problém osobně vnímám, že je zde stále absence strukturality a velký příklon k zjednodušení, tedy je odklon od kontinuálních ploch. V mém vlastním bádání mi přijde největší potenciál v propojení kontinuálních ploch a diskretních metod / buňkování /, kdy bychom byli schopni komplexní geometrie správně fabrikovat a interpretovat.

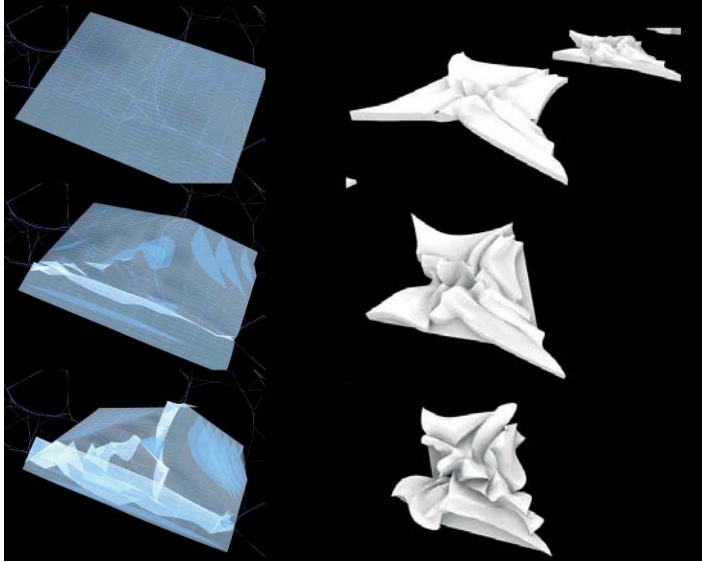
Když se přesuneme z měřítka objektu do měřítka urbanismu, topologie a diagramatické interpretace nám umožní zcela nový přístup k navrhování. V prvé řadě mých pokusů o diagramatické přepsání vztahů a porozumění struktury města jsem místo typologického uvažování přepsal objekty na **uzly (vrcholy)**. Zajímala mě pozice a blízké vztahy. Tak každá budova byla interpretována jen svým těžištěm. Z každého těžiště bylo hledáno x blízkých uzlů a ty propojeny linií. Při spojování 4 a více sousedů se již ukazuje struktura města v jejich esenciálních vztazích. Klasicistní blokové město, modernistické město je zcela čitelně interpretováno a je evidentní, kde je struktura propojena a kde ne. Samozřejmě tento princip lze dále rozvinout do hlubších analýz, kde jsme analyzovali pozici vstupů, atraktorů, vstupů infrastruktury (mhd, cyklostezky apod). Tak třeba bylo velmi zajímavé zjištění při soutěži na novou ulici ve Žďáře nad Sázavou, že sice město chce vytvořit městskou ulici, ale bohužel do ní nevedou žádné vstupy, takže není možné, aby zde vznikl parter.

Co je tedy současným možným urbanistickým modelem? Ve svých úvahách a pracích se studenty jsme se rozhodli posunout uvažování Frei Otto (Occupying and connecting) od typologického do topologického. U Freie je základní myšlenkou, že optimalizovaná hladká síť slouží jako atraktor pro umístování objektů. My používáme topologickou síť optimalizovanou na nejkratší vzdálenosti, ale místo přitahování, distribuování objektů začínáme morfovat samotnou tkaninu terénu. Vznikají tak různé 'foldy a creasy', které mají veliký architektonický potenciál. Nejen že je následně hmota integrována do okolí, ale i zohledňuje toky v území a samotnou morfologii krajiny. Další přepis do architektury je nesnadný, velkým potenciálem se jeví právě diskretizace objemu a následná distribuce prvků v obálce. V projektu **hydrogen island** jsem provedl diskretizaci zmorfovaného landscape na moduly, které byly diferencované. Výsledek byl zajímavý, ale stále byla patrná přílišná voxelizace původně hladké topologie. V současné době pracujeme na projektu **sukcesivního palimpsestu**, který agendu dále zpracovává, implementujeme strojové učení a u modulů chceme dát větší důraz na propojení při zachování maximální diferenciaci.

translating digital models into buildable architectures that are assembled from universal modules – cells. The system used to distribute the modules is strictly based on **topological constraints**. Possible connections, modules orientations are defined. The system generates possible variations of solutions that can be further optimised. The whole problem I personally perceive is that there is still an absence of structurality and a strong inclination towards simplification, i.e. a move away from continuous surfaces. In my own research, I find the greatest potential in combining continuous surfaces and discrete methods/cellularization/, where we would be able to fabricate and interpret complex geometries correctly.

When we move from the scale of the object to the scale of urbanism, topology and diagrammatic interpretations allow for a whole new approach to design. In the first series of my attempts to diagrammatically rewrite relationships and understand the structure of the city, I rewrote objects as **nodes (vertices)** instead of thinking typologically. I was interested in position and proximity relationships. Thus each building was interpreted only by its centre of gravity. From each centre of gravity, x nearby nodes were sought and these were connected by a line. By connecting 4 or more neighbours, the structure of the city in their essential relationships is already showing. The classical block city, the modernist city is quite clearly interpreted and it is evident where the structure is connected and where it is not. Of course, this principle can be further developed into deeper analyses, where we analyse the position of entrances, attractors, infrastructure inputs (public transport, cycle paths, etc.) For example, it was very interesting to find out during the competition for a new street in Žďár nad Sázavou that although the city wants to create an urban street, but unfortunately there are no entrances leading to it, so it is not possible to create a parterre there.

So what is the current possible urban model? In our reflections and work with students, we decided to shift Frei Otto's thinking (Occupying and connecting) from the typological to the topological. For Frei, the basic idea is that an optimised smooth network serves as an attractor for the placement of objects. We use a topological network optimised for the shortest distance, but instead of attracting, distributing objects, we start morphing the very fabric of the terrain. This creates various 'folds and creases' that have great architectural potential. Not only is the mass subsequently integrated into the surroundings, but it also takes into account the flows of the territory and the morphology of the landscape itself. Further transcription into architecture is not easy, the great potential seems to be the discretization of the volume and the subsequent distribution of the elements in the envelope. In the **hydrogen island** project, I performed a discretization of the morphed landscape into modules that were differentiated. The result was interesting, but too much voxelization of the originally smooth topology was still evident. We are currently working on a **successive palimpsest** project to further process the agenda, implement machine learning, and for modules we want to put more emphasis on connectivity while maintaining maximum differentiation.



OBR. 11 Hydrogen Island, 2020. Image from Studio Hani Rashid, relaxation of topological landscape, thesis project by Jiri Vitek. autor

FIG. 11 Hydrogen Island, 2020. Image from Studio Hani Rashid, relaxation of topological landscape, thesis project by Jiri Vitek. autor



OBR. 12 Generovaný dataset pro neuronové sítě CycleGAN a StyleGAN
FIG. 12 Generated dataset for CycleGAN and StyleGAN neural networks

Topologie a AI

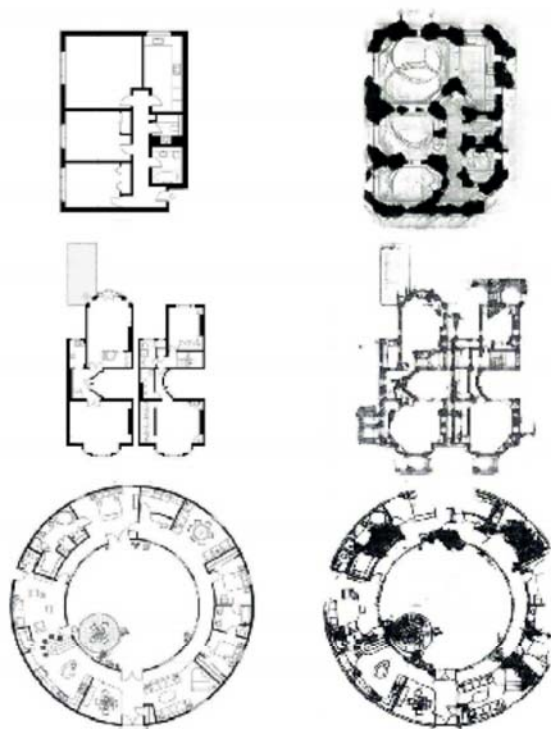
Rok 2022 se pro architekturu stává přelomovým díky nástupu strojového učení a hlavně difuzních modelů generování obrazu postavených na systému dall-E, neuronových sítí jako Pix2Pix, CycleGAN a StyleGAN. Není předmětem této krátké eseje se dopodrobna zabývat těmito komplexními sítěmi, ale co je pro architekturu zásadní, je pochopit jejich kreativní princip. Nádhera kreativního procesu generování obrazu pomocí neuronové sítě je, že z počátečního šumu pixelů se v každé iteraci začaly organizovat nové paterny pomocí naučených vztahů, tedy opět topologických vazeb, a dokázaly vytvořit zcela nový obraz. Systém má naučeno pro každý shluk pixelů, aby poznal kde je hrana, nahoře, dole, uvnitř apod. Porovnávání generovaného obrazu (fake) s diskriminantem (real) vytváří model, který se sám učí ze své úspěšnosti či neúspěšnosti. Komplikované úlohy, na které jsou například genetické algoritmy pomalé, tak mohou být efektivně predikovány a mohou pomoci k optimálnějším architekturám.

Vývoj posledních měsíců (8/2022) ovšem otevírá ještě kreativnější kapitolu generování obrazu z textového řetězce. AI nám tak nabízí zcela nový pohled na témata, která jsme již měli za stabilizovaná a ustálená. Díky AI a toologii dnes vidíme, že kreativita a geometrie nám teprve otevírají dveře do zcela nových a nečekaných prostorů.

Topology and AI

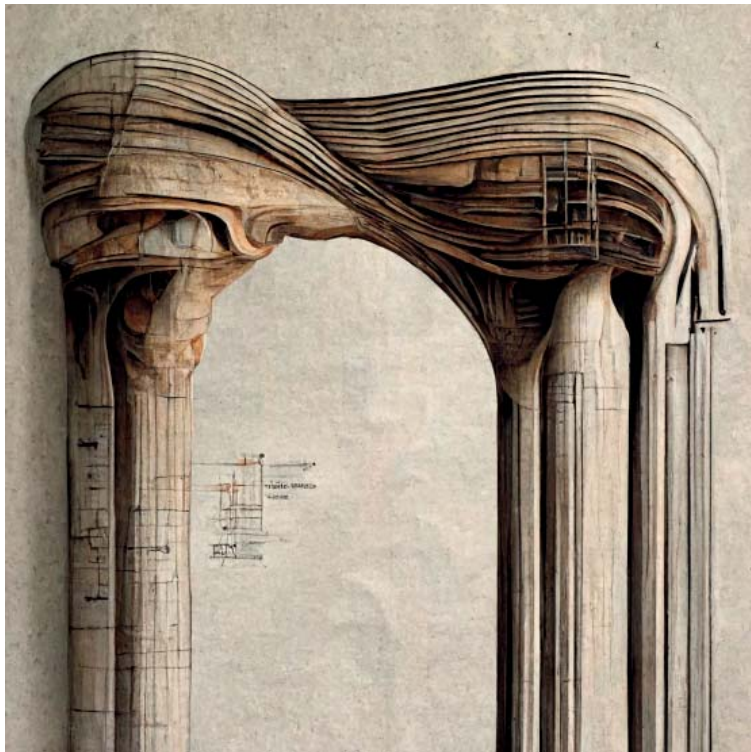
The year 2022 becomes a turning point for architecture due to the advent of machine learning and especially diffusion models of image generation based on dall-E, neural networks such as Pix2Pix, CycleGAN and StyleGAN. It is beyond the scope of this short essay to discuss these complex networks in detail. What is essential to architecture is to understand its underlying creative principle. The beauty of the creative process of generating an image using a neural network is that from the initial noise of pixels, in each iteration they began to organise themselves using learned patterns, again topological links. The system has learned for each cluster of pixels to know where the edge is, top, bottom, inside, etc. Comparing the generated image (fake) with the discriminant (real) creates a model that learns from its own success or failure. Thus, complicated tasks that genetic algorithms are slow to solve, for example, can be efficiently predicted and can help lead to more optimal architectures.

However, developments in recent months (8/2022) open up an even more creative chapter of generating an image from a text string. AI thus offers us a whole new perspective on topics that we had already considered stabilised and established. Thanks to AI and topology, we now see that creativity and geometry are only just opening the door to entirely new and unexpected spaces.



OBR. 13 Generovaný dataset pomocí neuronové sítě StyleGAN, přemapování modernistického půdorysu na barokní. Ateliérový projekt v research cluster Uran, Fa VUT Brno 2021 pod vedením Jiřího Vítka

FIG. 13 Dataset generated using StyleGAN neural network, remapping modernist floor plan to baroque. Studio project in Uran research cluster, Fa VUT Brno 2021 under the supervision of Jiří Vítka



OBR. 14 AI generovaný obrázek, prompt: anatomie architektury
FIG. 14 AI generated image, prompt: anatomy of an architecture

Poznámky

Greg LYNN, Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée, Belgique, 2004, ISBN 2-87317-068-9

Patrik SCHUMACHER, Autopoesis of Architecture, I, Wiley London 2009/2010, ISBN 978-0470772980

Zygmunt BAUMAN, Tekutá modernita, portál, 2020, ISBN 978-80-262-1602-5

Gilles RETSIN, Discrete Architecture in the Age of Automation, Wiley 2019

LE CORBUSIER, Za novou architekturou. Petr Rezek, 2005, ISBN 80-86027-23-6

topostructural optimization / ZHAO, ZHI, ZHANG, XIAOJIA SHELLEY, PY – 2021, 2021/08/01, Design of graded porous bone-like structures via a multi-material topology optimization approach, Structural and Multidisciplinary Optimization

Patrik SCHUMACHER, From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural
<https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Typology%20to%20Topology.html>

Patrik SCHUMACHER, From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural,

Peter HAGGETT, Network Analysis in Geography1, Edward Arnold, 1969
ISBN-13: 978-0713154597

Frederik KEISLER, Endless house, 1950–1960, MOMA,
<https://www.moma.org/collection/works/82405>

Greg LYNN, Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée, Belgique, 2004, ISBN 2-87317-068-9

Mario CARPO, The Second Digital Turn, Design Beyond Intelligence, The MIT Press, 2017, ISBN 978-0-26253-402-4

H.U.R.B.A.N byl projekt zabývající se morfování objektů, jako vstup sloužili dva objekty, které byli přeformátovány na stejnou topologickou strukturu. Následně s nimi bylo možné vytvářet iterace podobné principům Embryological house Grega Lynna. Projekt zpracovával mimo jiné Jan Pernecký a Jan Toth a byl podpořen, https://scd.sk/h-u-r-b-a-n-selector/?fbclid=IwAR1NGI_jgxtau66_p96ItlXBeeqt3nXUilms4pysZ9F1FQ8Et23sD_c2vi0

Mario CARPO, The digital turn in architecture 1992–2012, John Wiley & Sons Ltd, 2013

Notes

Greg LYNN, *Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée*, Belgium, 2004, ISBN 2-87317-068-9

Patrik SCHUMACHER, *Autopoiesis of Architecture, I*, Wiley London 2009/2010, ISBN 978-0470772980

Zygmunt BAUMAN, *Liquid Modernity, Portal*, 2020, ISBN 978-80-262-1602-5

Gilles RETSIN, *Discrete Architecture in the Age of Automation*, Wiley 2019

LE CORBUSIER, *Behind the new architecture*. Petr Rezek, 2005, ISBN 80-86027-23-6

topostructural optimization / ZHAO, ZHI, ZHANG, XIAOJIA SHELLY, PY – 2021, 2021/08/01, Design of graded porous bone-like structures via a multi-material topology optimization approach, *Structural and Multidisciplinary Optimization*

Patrik SCHUMACHER, *From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural*
<https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Typology%20to%20Topology.html>

Patrik SCHUMACHER, *From Typology to Topology: Social, Spatial and Structural*,

Peter HAGGETT, *Network Analysis in Geography*1, Edward Arnold, 1969
ISBN-13: 978-0713154597

Frederik KEISLER, *Endless house, 1950–1960*, MOMA,
<https://www.moma.org/collection/works/82405>

Greg LYNN, *Folds, Bodies and Blobs, La Lettre volée*, Belgium, 2004, ISBN 2-87317-068-9

Mario CARPO, *The Second Digital Turn, Design Beyond Intelligence*, The MIT Press, 2017, ISBN 978-0-26253-402-4

H.U.R.B.A.N was a project dealing with object morphing, two objects were used as input and reformatted to the same topological structure. Subsequently, it was possible to create iterations with them similar to Greg Lynn's Embryological House principles. The project was developed by Jan Pernecký and Jan Toth, among others, and was supported by https://:scd.sk/h-u-r-b-a-n-selector/?fbclid=IwAR1NGI_jgxtau66_p96ItlXBeeqt3nXUilms4pysZ9F1FQ8Et23sD_c2vi0

Mario CARPO, *The digital turn in architecture 1992–2012*, John Wiley & Sons Ltd, 2013

Další vybraná bibliografie

Manuel De Landa: A thousand years of nonlinear history. swerve edition, New York, 2000, ISBN 978-0-94229-932-8

Manuel De Landa: Assemblage Theory, Continuum, New York, 2006, ISBN 978-0-8264-9169-5

Sanford Kwinter: Far from Equilibrium, New York, 2008, 978-8496540644

Patrik Schumacher: Autopoiesis of Architecture, I, Wiley London 2009/2010, ISBN 978-0470772980

Patrik Schumacher: Autopoiesis of Architecture, IO, Wiley London 2010/2011, ISBN 978-0-470-66616-6

Peter Eisenman: Inside Out, Yale University Press, London, ISBN 0-300-09008-0

Arturo Tedeschi: AAD – Algorithms – aided design, le penseur Publisher, Brienza 2017, ISBN 978-88-95315-30-0

Reiser + Umemoto: Atlas of novel Tectonic, Princeton Architectural Press, New York, 2006, ISBN 978-1-56898-554-1

Odkazy

https://medium.com/@AAA_Publication/topological-architecture-3e7e4288dc27

<https://www.sci-en-tech.com/ICCM2018/PDFs/3481-11539-1-PB.pdf>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerovsk%C3%BD_graf

https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_graf%C5%AF

https://cs.wikipedia.org/wiki/Sedm_most%C5%AF_m%C4%9Bsta_Kr%C3%A1lovce

https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerovsk%C3%BD_tah

https://medium.com/@AAA_Publication/topological-architecture-3e7e4288dc27

<https://www.abicko.cz/clanek/precti-si-technika/29462/dall-e-nakresli-mi-cokoliv.html>

<https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Typology%20to%20Topology.html>

<https://blogs.cornell.edu/arch5302sp15/2015/05/20/the-digital-turn-in-architecture-1992-2012-mario-carpo/>

Other selected bibliography

Manuel De Landa: A thousand years of nonlinear history. swerwv edition, New York, 2000, ISBN 978-0-94229-932-8

Manuel De Landa: Assemblage Theory, Continuum, New York, 2006, ISBN 978-0-8264-9169-5

Sanford Kwinter: Far from Equilibrium, New York, 2008, 978-8496540644

Patrik Schumacher: Autopoesis of Architecture, I, Wiley London 2009/2010, ISBN 978-0470772980

Patrik Schumacher: Autopoesis of Architecture, IO, Wiley London 2010/2011, ISBN 978-0-470-66616-6

Peter Eisenman: Inside Out, Yale Univeristy Press, London, ISBN 0-300-09008-0

Arturo Tedeschi: AAD – Algorithms – aided design, le penseur Publisher, Brienza 2017, ISBN 978-88-95315-30-0

Reiser + Umemoto: Atlas of novel Tectonic, Princeton Architectural Press, New York, 2006, ISBN 978-1-56898-554-1

Links

https://medium.com/@AAA_Publication/topological-architecture-3e7e4288dc27

<https://www.sci-en-tech.com/ICCM2018/PDFs/3481-11539-1-PB.pdf>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerovsk%C3%BD_graf

https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_graf%C5%AF

https://cs.wikipedia.org/wiki/Sedm_most%C5%AF_m%C4%9Bsta_Kr%C3%A1lovce

https://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerovsk%C3%BD_tah

https://medium.com/@AAA_Publication/topological-architecture-3e7e4288dc27

<https://www.abicko.cz/clanek/precti-si-technika/29462/dall-e-nakresli-mi-cokoliv.html>

<https://www.patrikschumacher.com/Texts/From%20Typology%20to%20Topology.html>

<https://blogs.cornell.edu/arch5302sp15/2015/05/20/the-digital-turn-in-architecture-1992-2012-mario-carpo/>

Za nový vizuální náhled

Směrování k novému vizuálnímu významu

Aleš Svoboda

For a New Visual Insight

Towards a New Visual Meaning

Aleš Svoboda

Abstrakt

Bezděčné a v zásadě neuvědomělé užívání specifických vizuálních preferencí se stabilizuje v určitých, navzájem výrazněji diferencovaných epochách, a odpovídá tomu, co se většinou označuje jako světový názor.

Jakkoliv jde o komplikovaný a obsáhlý celek představ, hodnot a věr sdílených společností v myslích jednotlivců, je jedním z jeho rozpoznatelných produktů právě osvojení si určitých strukturních vizuálních klíčů, které udržují pojetí „návoru“ coby právě určité ztotožňující a přehledné názornosti.

Tak jako se renesanční lineární perspektiva nebo různé druhy středověké lineární a byzantské dynamické perspektivy sdružovaly s odpovídajícím sebepojetím člověka a jeho obecnou vizí světa, tak se v současné zlomové době zdá, že se vynořuje nový vizuální přístup pro tvorbu názoru a názornosti.

Je stále více založený na permanentní proměnlivosti pozice prvků systému a spíše na topologické stabilitě jejich vztahů než lpění na jejich proporční trvalosti. Nové vizuální významy se tvoří z toku náhodných a zaměnitelných částic, roste úloha paměti, která v představách komprimuje proměny do vzorců. Cestu k tomuto pojetí otevřela především počítačová technika a následně novomediální generativní umění, i když příznaky této změny už obsahovala avantgarda (futurismus, dada, konstruktivismus a abstraktní umění) a posléze i konkrétní umění a kinetismus. Článek se věnuje náznakům hledání nového vizuálního názoru.

Abstract

In certain mutually differentiated eras, the unconscious and basically inadvertent use of specific visual preferences stabilizes and corresponds to what is usually referred to as a world view.

However complex and comprehensive the set of ideas, values and beliefs shared by the society in the minds of individuals, one of its recognizable products is the very adoption of certain structural visual cues which sustain the notion of 'an opinion' as a kind of identifying and transparent illustrativeness.

Just as the Renaissance linear perspective and various kinds of medieval linear and Byzantine dynamic perspectives went hand in hand with man's corresponding self-concept and his general vision of the world, the new visual approach for forming of an opinion and illustrativeness seems to be emerging at present crucial time.

It is increasingly more based on the permanent variability of the position of the system elements and more on the topological stability of their relations rather than on clinging to their proportional permanence. New visual meanings are formed from a flow of random and interchangeable particles, and the role of memory which compresses the transformation into patterns in the imagination is growing. It was especially the computer technology and, consecutively, the new media generative art that opened the path to this perception, although the signs of this change were already embodied in the avant-garde (Futurism, Dada, Constructivism and abstract art) and later in concrete art and kineticism. This article explores the indications of the search for a new visual insight.

1. Pravda vidění, renesanční a byzantská perspektiva

Naše důvěra ve zrakovou evidenci je trvalá. Narůstá s naší socializací a odvolává se na ony tradiční důkazy „přirozenosti“, které dokáže filozofie a zvláště pak sémiotika odhalit jako falešné. Principiální problém spočívá v interpretaci vizuálních podnětů, která se týká všech úrovní jejich zpracování – neurofyzilogické, psychologické a sociokulturní včetně. Je prakticky zbytečné se ptát, čeho je naše vidění důsledkem, protože ovlivňování podnětů a vizuálního vědomí je obousměrné jak v diachronních, tak synchronních sítích. Výběr, hierarchie a propojení podnětů je již důsledkem našeho osobního i společenského vývoje a každý aktuální výsledek zase ovlivňuje řada pragmatických i zcela náhodných psychologických vlivů. Tázat se, co je pravým počátkem a předmětem procesu vidění, je už samo o sobě zmatené, protože jeho podstatou je právě trvalá zacyklenost, snad lze říci „celostnost“. Jedním z mála trvalých a v určité míře empiricky hodnotitelných výsledků jsou vizuální znaky v celé škále pozorovatelných médií. A jako znaky sui generis vyžadují přítomnost znakových polí, která mohou být sice neuvědomovaná, nicméně musí být přítomna.

Badatelská pozornost se jim celá staletí věnuje a doznala určitých vrcholů například v teoriích Panovského, Francastela (2003), Gombricha (1985). Analýza kdysi výhradní lineární, tedy renesanční perspektivy ji představila jako alternativní systém, který do geometrické zákonitosti ukládá určité zjednodušené a zobecněné stanovisko vztahu člověka ke světu. Tuto principiální nerozhodnutelnost vyjadřuje například Jacques Aumont takto: „Perspektiva je geometrická transformace, spočívající v projekci trojrozměrného prostoru do prostoru dvojrozměrného (do rovné plochy) podle určitých pravidel zaručujících, že budou zachovány informace o promítnutém prostoru. Pravidla této transformace jsou nesmírně proměnlivá a z geometrického pohledu tedy existuje velký počet perspektivních systémů, alespoň potenciálně.“ (Aumont 2005: 214) Uklidňující pravda renesančních perspektivních schémat je preparování určité umrtné alternativy.

Studie Panofského, Francastela a Gombricha nás už vlastně století utvrzují o existenci zvláštního řádu, kterým se organizuje obrazový prostor a jeho struktura se pak promítá zpět do našeho chápání a vztahování se k nesmírnosti světa.

Do názvu slavné Gombrichovy knihy analyzující vidění se dostal pojem „iluze“. Ten obecně chápeme jako chybně interpretovaný smyslový vjem. Jak jsme již podotkli, smyslové receptory reagují na určitou škálu podnětů, které se v následné apercepci za podpory ostatních smyslů a paměťových struktur propojují s určitými přesvědčeními o stavu věcí. Pokud jsou tato přesvědčení ve shodě s našimi pragmatickými cíli a potvrzuje je naše následné ověřování, naplňuje se naše vize aktuálního stavu skutečnosti, pokud nikoliv, registrujeme je jako chybná vyhodnocení, jako omyl našeho vědomí. To, co rozhoduje, a přitom nebývá předmětem pochybností, je samotné nastavení tohoto systému.

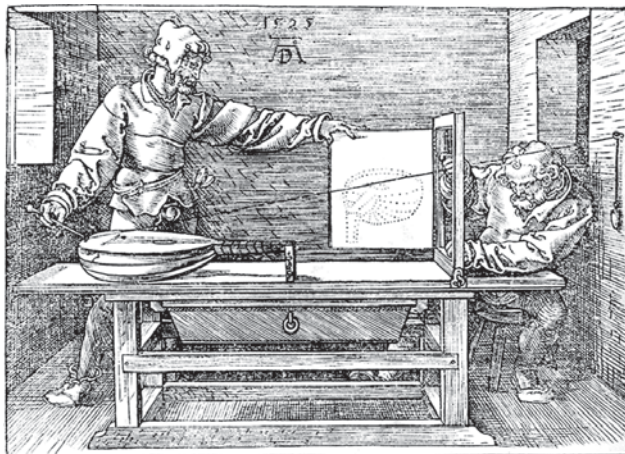
1. The Truth of Seeing; Renaissance and Byzantine Perspective

Our confidence in visual evidence is permanent. It grows with our socialization and appeals to those traditional proofs of 'naturalness' which philosophy, and especially semiotics, can expose as false. The principle problem lies in the interpretation of visual stimuli which involves all levels of processing – neurophysiological, psychological and sociocultural included. It is practically pointless to ask what our vision is the result of because the influence of stimuli and visual consciousness is bidirectional in both diachronic and synchronic networks. The choice, hierarchy and connection of stimuli is already a consequence of our personal and social development and every actual outcome is in turn affected by a number of pragmatic and quite random psychological influences. To ask what is the true beginning and object of the process of seeing, is in itself confused because its essence lies in the very permanent circularity, one could even say 'holism'. Some of the few enduring and to some extent empirically assessable results are visual signs in the full range of observable media. And as *sui generis* signs, they require the presence of sign fields which – while they may be unacknowledged – must nevertheless be present.

Research attention has tried to examine them for centuries and reached certain peaks, for example, in the theories of Panofsky, Francastel (2003) and Gombrich (1985). The analysis which of the once exclusively linear, that is, Renaissance perspective presented it as an alternative system that imposes certain simplified and generalized view of man's relations to the world. Jacques Aumont, for instance, expresses this principal indecisiveness as follows: 'Perspective is a geometric transformation consisting in the projection of three-dimensional space into two-dimensional space (into a flat surface) according to certain rules guaranteeing that the information about projected space will be preserved. The rules of this transformation are extremely variable and, thus, from the geometric point of view, large number of perspective systems exists, at least potentially'. (Aumont 2005: p. 214) The reassuring truth of Renaissance perspective schemes is the prefiguration of a certain deadened perspective.

In fact, the studies of Panofsky, Francastel and Gombrich have for a century been confirming the existence of a special order which organizes the pictorial space and its structure is then reflected back into our understanding and relating to the immensity of the world.

The term 'illusion' was incorporated into the title of the famous Gombrich's book. We understand an illusion to be a misinterpreted sensory perception. As we have already pointed out, the sensory receptors respond to a certain range of stimuli which in subsequent apperception and with the support of other senses and memory structures link to certain beliefs about the state of affairs. If these beliefs are consistent with our pragmatic goals and are confirmed by our subsequent validation, our vision of the actual state of reality is fulfilled; if not, we register them as misjudgements, as mistakes of our consciousness. What is decisive – and yet is not the subject of doubt – is the very setting of this system.



OBR. 1 Albrecht Dürer: Kreslíř loutny (1525)

FIG. 1 Albrecht Dürer: The Draughtsman of the Lute (1525)

Ústředním problémem se ovšem stává jmenovaná ztráta dynamiky pohledu, se kterou koreluje i principiální dynamika našeho světa. Alternativou, která pohltila větší míru povědomí o dynamičnosti a procesualnosti našeho vidění byla zřejmě byzantská perspektiva. Žeginův¹ pečlivý rozbor této dynamické, byzantské perspektivy ji ukazuje právě jako jistého soupeřníka a alternativu řešení západního umění (Žegin 1980).

1 — Lev Fjodorovič Žegin byl nejprve avantgardním umělcem, malířem, který na počátku století zručně reagoval na postimpresionistické výzvy (Hnojil 2021). Jistě i tato zkušenost s postupným osamostatňováním malířských znaků ho ve druhé etapě života, tedy v kontextu stalinské, chruščovské a brežněvské totality, přivedla ke studiu a osvětlení principů ruského středověkého malířství.

Geometrie, jako přírodovědná kompetence, podkládá pravidelně a obecně naši intuitivní výstavbu systémů vidění. Její nová pojetí, často ještě nedokonale přístupná v našich představách, se mohou stát nástrojem vybudování nové názornosti. Právě v obousměrném rozvoji praxe topologie lze očekávat novou alternativu vizuálního systému.

2. Geometrie a matematika jako umělecké ready-mades

„Čistá matematika je svým způsobem poezie logických myšlenek. Hledají se nejobecnější zásady operace, která spojí v jednoduchém, logickém a sjednoceném tvaru nejrozsáhlejší možný okruh formálních vztahů. V tomto úsilí směřem k logické kráse se objevují duchovní vzorce, které jsou nezbytné pro hlubší proniknutí do zákonů přírody.“ Albert Einstein, dopis vydavateli New York Times, květen 1935

Tento citát, převzatý z knihy Lynn Gamwellové *Matematika + umění*, s podtitulem Kulturní historie (Gamwell 2016), vyjadřuje přesvědčení nepochybnitelné vědecké autority o účinnosti matematiky jako nástroje pro zkoncentrování a zpřehlednění komplikované morfologie jevů. Matoucí složitost našeho světa může být zredukována do čitelných schémat, která budeme podobně jako poezii vnímat s estetickým uspokojením. Napětí, vyvolávané spleťnými aktuálními účinky jevů, se překryje rastrem srozumitelných důvodů. Právě kniha Lynn Gamwellové² snáší rozsáhlou řadu příkladů, kdy se umělecká díla opírají o matematiku či matematické inspirace. Propojení s uměním lze nalézt v aritmetice i geometrii, ve využívání proporčních systémů či různých symetrií, v osvojení měření i zahrnování představy nekonečnosti, ve formalismu a formalistické estetice, v logice a rozhodování, ve výpočtech (od středověkých staveb a katedrál přes renesanční perspektivu k dnešní geometrické abstrakci) až k počítačovému umění.

2 — Mimochodem je kniha Lynn Gamwellové *Mathematics + art, A cultural history* některými recenzenty kladená na roveň Gombrichovy knihy *The Sens of Order*.

However, it is the aforementioned loss of the dynamics of perspective with which the fundamental dynamics of our world also correlates which is the central problem. The alternative which absorbed a greater degree of awareness of the dynamic and processual nature of our vision was probably the Byzantine perspective. Zhegin's¹ thorough analysis of this dynamics shows the Byzantine perspective precisely as a kind of contemporary and alternative solution to Western art (Zhegin 1980).

1 — Lev Fedorovich Zhegin was first an avant-garde artist, a painter who at the beginning of the century skillfully responded to the post-impressionist challenges (Hnojil 2021). It was surely also this experience with gradual independence of painting signs which led him to studying and illuminating the principles of Russian medieval painting in the second stage of his life, in the context of Stalinist, Khrushchchevite and Brezhnevite totalitarianism.

Geometry, as a scientific competence, underlies regularly and generally our intuitive construction of systems of vision. Its new notions, often still imperfectly accessible in our imagination, can become a tool for building a new visuality. It is in the bidirectional development of the practice of topology that we can expect a new visual system alternative.

2. Geometry and Mathematics as Artistic Ready-Mades

'In a way, pure mathematics is the poetry of logical ideas. The most general principles of operation are sought that will bring together in a simple, logical and unified form the widest possible range of formal relations. In this striving towards logical beauty, spiritual formulas emerge which are necessary for a deeper penetration into the laws of nature'. Albert Einstein, letter to the New York Times editor, May 1935

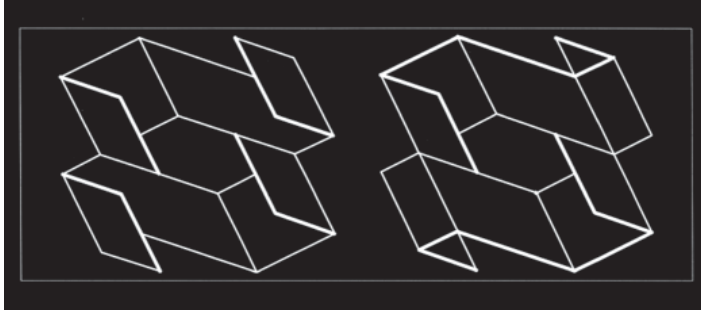
This quote taken from Lynn Gamwell's book *Mathematics + Art, A cultural history* (Gamwell 2016), expresses the conviction of an unquestioned scientific authority on the efficacy of mathematics as a tool for concentrating and clarifying the complicated morphology of phenomena. The confusing complexity of our world can be reduced to legible schemes which, just like poetry, we will perceive with aesthetic satisfaction. The tension created by intricate actual effects of phenomena is overlaid with a grid of intelligible reasons. Lynn Gamwell's book² in particular brings together a vast array of examples of artworks being inspired by mathematics or mathematical inspirations. Connections with art can be found both in arithmetic and geometry, in the use of proportional systems or various symmetries, in the mastery of measurement and the incorporation of the concept of infinity, in formalism and formalist aesthetics, in logic and decision-making, in computation (from medieval buildings and cathedrals, through Renaissance perspective to today's geometric abstraction), and in computer art.

2 — Incidentally, Lynn Gamwell's book *Mathematics + Art, A cultural history* is considered by some reviewers to be on a par with Gombrich's *The Sense of Order*.

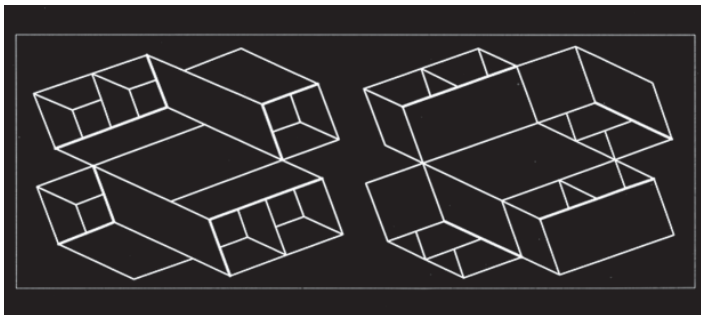


OBR. 2 Max Bill: Jednohranný povrch v prostoru, 1959

FIG. 2 Max Bill: Monoangulated Surface in Space, 1959



OBR. 3 Josef Albers: Pár strukturních konstelací „Duo H“, 1966
FIG. 3 Josef Albers: Pair of Structural Constellations 'H Duo', 1966



OBR. 4 Josef Albers: Pair of Structural Constellations „Duo B“, 1966
FIG. 4 Josef Albers: Pair of Structural Constellations 'B Duo', 1966

Co může vést umělce k určitému „zhlížení se“ v matematických postupech a demonstracích? Je to v zásadě určitá podoba (pattern), strukturální vzorec, který si lze osvojit a následně ho využívat v mnoha různých situacích. Princip geometrizace vnímaných jevů, který se zdá být přítomný v evropském kulturním prostředí vlastně neustále³, vábí novou silou a přitažlivostí avantgardu 20. století. Působivá principiální čistota ideje souzní s jednoduchostí geometrického výrazu, případně s přehledností matematické formule. Umění podle vizionářů a průkopníků nezobrazivého umění počátku jmenovaného století má směřovat k čistotě a jasnosti. Není snad příkladnějšího představitele této myšlenky než Františka Kupky, u kterého nalezneme v knize *Tvoření v umění výtvarném* toto konstatování: „Umění jako každý projev lidského ducha, spěje k očišťování. Budoucnost umění je v jasnosti; k ní směřuje naše veškeré úsilí.“ (Kupka 1923: 186)

3 — Připomeňme například středověké kresební principy prosazované Villardem de Honnecourt ve 13. století.

Uměleckým hnutím, které nejvíce pohlcuje zájem o prozkoumání elementární morfologie a jednoznačně vyjádřených vztahů právě v duchu hledání „jasnosti“, bylo rozhodně konkrétní umění. Průběžně však prokazuje, že ona jasnost není simplifikací, zjednodušováním a ztrátou smyslu. Max Bill, švýcarský konkrétista, dokonce snad můžeme říci „vlajkonos“ konkrétního umění od 40. let 20. století, adoptuje v řadě svých děl princip Möbiovy pásky. Názorný příklad neorientované plochy, který je tu převzat jako hotové téma uměleckého díla, situace ne nepodobná duchampovskému ready-made. Plastika názorně odkazuje k určitému paradoxnímu jevu, kdy je naše vnímání konfrontováno s pohledem na plochu, která má jen jednu stranu. Ambivalence pohledové jednoduchosti a současné nejednoznačnosti následného hodnocení je typickým případem dynamizování „návoru“.

Josef Albers a Moholy-Nagy, oba dědicové Bauhausu, působili v posledním úseku svého života ve Spojených státech. Albers se v 60. letech 20. století často vrací ke kresbám prostorově obtížně identifikovatelných tvarů založených na principu Neckerovy krychle. Nejistota prostorové interpretace schematizovaného objektu vyvolávala u současníků konotaci s op artem. Albers býval dokonce označován za jednoho z jeho otců. Proti tomu se ovšem ohrazoval⁴, evidentně proto, že mu nešlo o vyvolání senzuální přitažlivosti a o zábavnost, jako tomu je u op artu přednostně, ale o předitření a zkoumání vizuální ambivalence, možnosti dvojznačně chápat reprezentovanou prostorovou situací. Ačkoliv je grafická lineární struktura přehledná a jasná, nutí k nestrnulému vnímání, ke snaze zahrnout širší interval interpretací.

4 — Margit Weinberg Staber o tom svědčí osobní vzpomínkou: „Alberse ani v nejmenším netěšilo, když najednou zjistil, že se o něm mluví jako o otci op artu. Jeho studium barevné situace a barevné aktivity nemá nic společného s povrchními mihotajícími se efekty, stejně málo jako jeho lineární konstrukce vyjadřují pouze iluzivní optickou prostorovost.“ (Lauter 2002: 79)

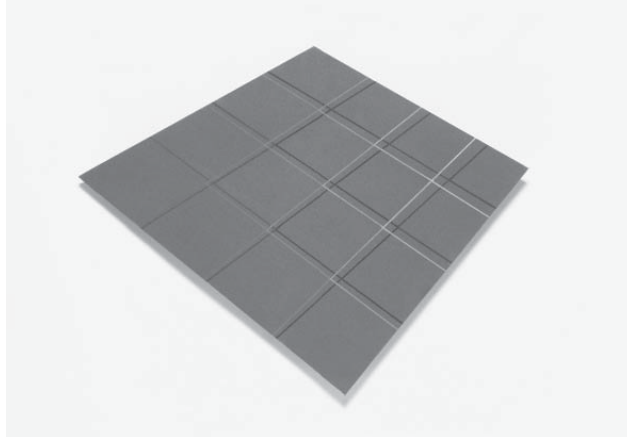
What can lead an artist to a certain ‘worship’ of mathematical procedures and manifestations? It is in principle a certain pattern, a structural formula which can be learned and subsequently used in many different situations. The principle of geometrization of perceived phenomena which seems to be present in the European cultural milieu virtually constantly³ lures the 20th century avant-garde with a new power and appeal. The impressive purity of principle of and idea is in harmony with the simplicity and clarity of a mathematical formula. According to the visionaries and pioneers of non-representational art of the early part of 20th century, art should aim at purity and clarity. There is hardly a more representative example of this thought than František Kupka, who says the following in his book *Creating in Fine Art*: ‘Art, like any other expression of human spirit, tends towards purification. The future of art is in clarity; all our efforts are aimed towards it’. (Kupka 1923: p. 186)

3 — Remember, for instance, the medieval drawing principles advocated by Villard de Honnecourt in the 13th century.

Concrete art was definitely the artistic movement that was most absorbed by interest in exploring the elementary morphology and unambiguously expressed relationships in the very search of ‘clarity’. It has, however, continuously demonstrated that such clarity is not a simplification, reduction or a loss of meaning. Max Bill, a Swiss Concretist, we may perhaps even say the ‘flag bearer’ of concrete art since 1940s, adopts the principle of Möbius strip in a number of his works. An illustrative example of a non-orientable surface that is adopted here as the ready-made subject of an artwork, a situation not unlike the Duchampian ready-made. The sculpture illustratively refers to a certain paradoxical phenomenon where our perception is confronted with the sight of a surface which only has one side. The ambivalence in the visual simplicity and the simultaneous ambiguity of the subsequent evaluation is a typical example of the dynamization of an ‘opinion’.

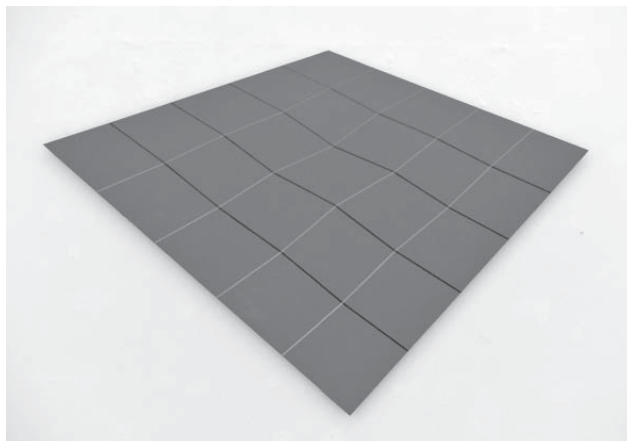
Josef Albers and Moholy-Nagy, both heirs to the Bauhaus, both worked in the last period of their lives in the United States. In the 1960s, Albers often returned to drawings of spatially hard to identify objects based on the principle of the Necker cube. The uncertainty of the spatial interpretation of the schematized object evoked a connotation with op art among his contemporaries. Albers was even referred to as one of op art fathers. He, however, objected to this⁴, apparently because he was not concerned with evoking sensual appeal and entertainment, as is the primary concern of op art, but with presenting and exploring visual ambivalence, the possibility of ambiguously understanding the spatial situation represented. Although the graphic linear structure is clear and straightforward, it forces to non-rigid perception, to the effort of encompassing a broader range of interpretations.

4 — Margit Weinberg Staber testifies to this with a personal memory: ‘Albers was not in the least pleased when he suddenly discovered that he was being referred to as the father of op art. His study of the colour situation and colour activity had nothing in common with the superficial flickering effects, just as little as his linear constructions would express optical spatiality only’. (Lauter 2002: 79)



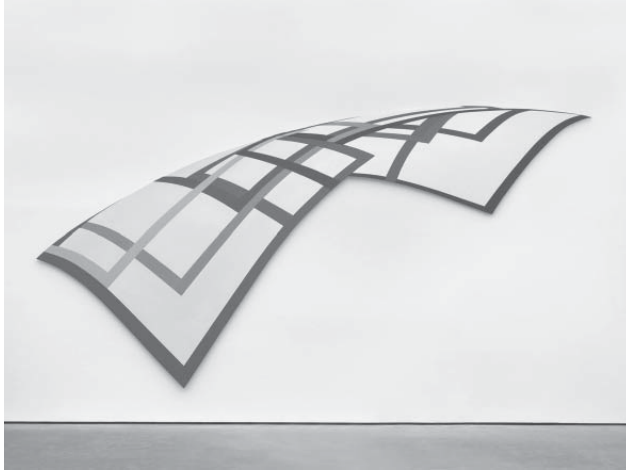
OBR. 5 Hans Jörg Glattfelder: Protichůdné úrovně jasu z modré, 2012

FIG. 5 Hans Jörg Glattfelder: Opposing Levels of Brightness of Blue, 2012



OBR. 6 Hans Jörg Glattfelder: 4 modré a 4 žluté přechody, 2014

FIG. 6 Hans Jörg Glattfelder: Four Blue and Four Yellow Transitions, 2014



OBR. 7 Dóra Maurer: Quod Libet 39, 1999

FIG. 7 Dóra Maurer: Quod Libet 39, 1999

Albers i Moholy-Nagy tematizují ve svých nezobrazivých konfiguracích také transparentnost. Budťo stupňováním překrývajících se a sousedících barevných valérů, nebo přímo transparentními materiály. Ať už iluzivní nebo reálná superpozice také vede diváka k citlivosti pro nejednoznačnost a dynamiku prostorových situací. Pokud jsme ale zmiňovali možné nástroje dynamizace standardních znakových vyjádření, je na místě připomenout intuici mnohých konkretistů, kteří rozehrávají podobnou ambivalenci plochy a prostoru. Hans Jörg Glattfelder a Dóra Maurer staví řadu svých děl na konfrontaci přirozené plošnosti maleb s jejich schopností vyvolávat prostorové iluze. Nejistota perspektivních náznaků, různých překroucení a deformací, které gestalem odhalený sklon interpretuje v nejsnadnější a nejpravděpodobnější podobě, ukazuje tato díla jako demonstrace uvolněné a osvobuzující vize, která zahrnuje i určitý aspekt iracionality a absurdity, otevírající je další kognitivní dynamice.

3. Mondrian v topologické interpretaci

Nezobrazivá malba, resp. veškeré nezobrazivé vizuální umění zahazuje tradiční významový klíč – námětovou identifikaci, která bývá běžnou cestou k rozpoznání ikonografického poselství výtvarného díla a dříve bývala dominantním zdrojem jeho významu. Jistěže se tím jeho obsah nikdy nevyčerpával, nicméně právě postimpresionistický zlom přesunul zásadní pozornost diváka na vlastní hodnoty používaných médií. Formalistický přístup Rogera Frye a Cliva Bella daný do souvislosti s kantovským analytickým sebebepřevěřováním vyjadřovacích prostředků v reflexi Clementa Greenberga⁵ otevřel nesmírně rozlehlé pole pro zkoušení a zkoumání působivosti samotného uměleckého tvarosloví. Samozřejmě i tak zůstávají nadále důležité pro chápání významu díla jeho kontextové vazby jednak na individuální styly, jednak na styly uměleckých směrů, ať už v souvislostech synchronních nebo diachronních. Nově ovšem vyvstává význam vlastní kvality tvarosloví jeho „exemplifikací“⁶ a hlavně – nabízí se dosud významově nezatížené „signifiant“ ke svému naplnění novým „signifié“.

5 — Viz slavná stať Clementa Greenberga *Modernistická malba* z roku 1960.

6 — Účinný postřeh Nelsona Goodmana v knize *Způsoby světátvorby*, 1978.

Mezi autory průkopnických dob nezobrazivého umění samozřejmě patří Piet Mondrian. Jeho postupné zdokonalování osobního stylu, kdy musel nejprve překonat společenskou konvenci holandské malby, postupně se připojit k fauvistickému cítění a následně se ponořit do jisté geometrické analýzy viděného v jisté období s geometrickými analýzami raného kubismu, dospělo nakonec destilací všeho nahodilého k rovnovážné, oproštěné a elementární stavebnosti obrazů vrcholného období (1919–1938).

Both Albers and Moholy-Nagy also thematise transparency in their non-representational configurations, either by gradation of overlapping and adjacent coloured tonal values, or directly through transparent materials. Whether illusory or real, the superposition also leads the viewer to sensitivity for the ambiguity and dynamics of spatial situations. However, since we mentioned possible tools for the dynamization of standard sign expressions, it is also worth recalling the intuition of many Concretists who play with similar ambivalence of space and surface. Hans Jörg Glatfelder and Dóra Maurer base many of their works on the confrontation of the natural flatness of paintings with their ability to evoke spatial illusions. The uncertainty of the perspectival cues, various distortions and deformations which interpret the gestalt-revealed inclination in the easiest and most plausible form, show these works as manifestations of a relaxed and liberating vision that includes certain aspect of irrationality and absurdity, opening them to further cognitive dynamics.

3. Mondrian in Topological Interpretation

Non-representational painting, or rather all non-representational visual art throws away the traditional key to meaning – a subject identification which is a common way of recognizing the iconographic message of the art work and used to be the dominant source of its meaning. Certainly the content of the art work was never emptied by this, but it was actually the post-impressionist turning point which shifted the viewer's fundamental attention to the inherent values of the media used. The formalist approach of Roger Fry and Clive Bell, given in the context with the Kantian analytical self-reflection of the means of expression in Clement Greenberg's⁵ reflection, opened up an extremely vast field for testing and exploring of the impactfulness of the actual artistic morphology. Even still, of course, its contextual connections to both individual styles and the styles of artistic movements, whether in synchronic or diachronic contexts, remain important for understanding the meaning of the work. However, the significance of the intrinsic quality of the morphology through its 'exemplification'⁶ emerges and, above all, the 'signifiant' so far unburdened with meaning offers itself to be fulfilled with the new 'signifié'.

5 — See Clement Greenberg's famous 1960 essay *Modernist Painting*.

6 — Nelson Goodman's powerful insight in his book *Ways of Worldmaking*, 1978.

Piet Mondrian is of course one of the pioneer artists of the non-representational art. The gradual refinement of his personal style which first had to overcome the social conventions of Dutch painting, step by step joined the Fauvist sentiments and subsequently plunged into a kind of geometrical analysis which was perceived as a certain analogy to the geometrical analyses of early Cubism, finally arrived – through a distillation of all things haphazard – at a balanced, exempt and elementary structuring of his paintings from his peak period (1919–1938).

Výtvarník Anthony Hill (1930–2020) své původní umělecké zalíbení v dada a surrealismu na konci 40. let rozšířil o obdiv ke geometrii a konkrétnímu umění. A zájem o dílo tehdejšího protagonisty konkretismu Maxe Billa (právě například o jeho plastiky vytvořené na základě Möbiovy pásky) ho přivedl k topologii, kombinatorice a iracionálním číslům. Hill se v roce 1951 stal spoluzakladatelem londýnské Konstruktivistické skupiny (Constructivist Group), kterou dále tvořili Victor Pasmor (1908–1998), Adrian Heath (1920–1992), John Ernest (1922–1994), Kenneth Martin (1905–1984), Mary Martinová (1907–1969), Gillian Wiseová (1936–2020) a Stephen Gilbert (1910–2007) a která se již v tomto roce prezentovala první výstavou. V logice v tomto oddíle již naznačované se v roce 1954 stal tématem skupinové výstavy vztah mezi umělcem a technickými prostředky. Nejen pro Hilla, ale i pro ostatní členy skupiny sestává ústředním cílem zaměřením na cílevědomé ovládnutí volby metod, materiálů a procesů. Geometrie a propočty sloužily Hillovi k důkladné sebereflexi vlastní práce, aniž by ji snad na matematiku zamýšlel redukovat, což prozrazuje i jeho formulace: „...matematické téma nebo matematický proces může být pouze složkou: člověk počítá nebo organizuje něco, co zjevně není matematické“ („...the mathematical thematic or mathematical process can only be a component: one is calculating or organising something which is clearly not mathematical.“)

Ve stejném duchu se Hill pustil i do analýzy výstavby typických mondrianovských kompozic, čemuž věnoval článek publikovaný v časopise *Leonardo* (Hill 1968a: 188–196) a kapitolu ve sborníku *DATA* (Hill 1968 b: 251–269), jenž sám editoval a který byl zaměřený na vztah moderního a poválečného umění k vědě.

Stať uvedená v tomto sborníku má název „Program. Paragram. Struktura“ a na půdorysu těchto pojmů buduje svou hypotézu o zásadním růstu významu struktury v umění, který se zdá být potvrzený vývojem linií „moderní umění – abstraktní umění – konstruktivistické umění“. Ve smyslu konkretistického chápání uměleckého díla jako „záměru rovnajícího se myšlence konkretizované prostřednictvím díla“ vidí Hill jako prostředek k naplnění této konkretizace systematické vytváření programů rozvíjejících a ověřujících účinnost syntaktické stránky uměleckých děl⁷.

7 — Tady Hill odkazuje na sémiotiku Charlese W. Morrisa a jeho tři roviny semióze: syntaktika – sémantika – pragmatika.

Dalším důležitým Hillovým pojmem je „paragram“, tedy vizuální pomůcka výkladu, jako je diagram, tabulka, graf atd., která doplňuje myšlenky vyjádřené obvyklou lineární prózou. Všimá si aktuálních případů, které lze nalézt ve výtvarných teoriích (Alfred Barr: *Diagram vývoje moderního umění*, 1936, The Museum of Modern Art, New York), ale především v uměleckých dílech samotných (Malevič, Picabia, Charles Biederman, Max Bill, Georges Mathieu, Ianis Xenakis ad.). Připomenul, že původ paragramů by bylo možné sledovat od starověku, přičemž bezprostřední počátky moderních paragramů spadají do konce 17. století. Především se objevují ve vědě, logice a matematice jako prostředky „grafického argumentu“. Podle Hilla

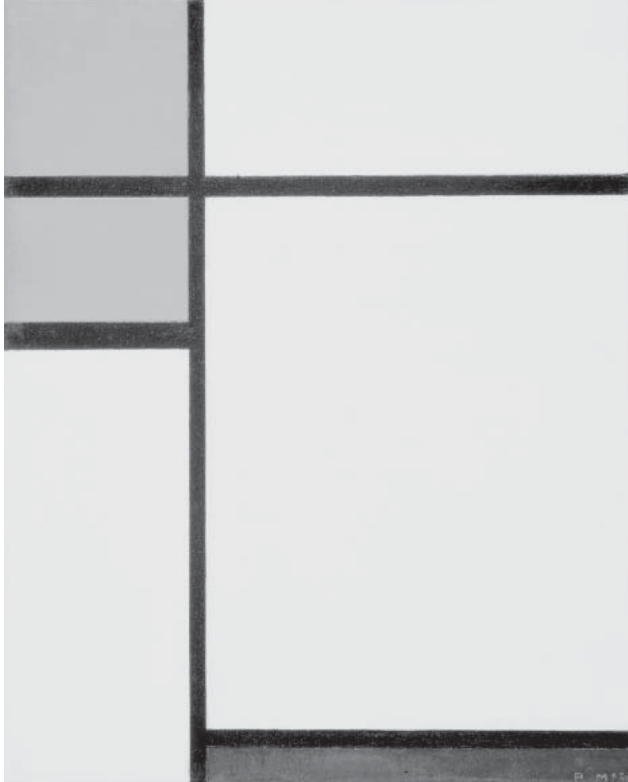
The artist Anthony Hill (1930–2020) expanded his original artistic predilection for Dada and Surrealism in the late 1940s to include his admiration for geometry and concrete art. And his interest in the work of Max Bill, the protagonist of Concretism at the time (for instance in his sculptures inspired by the Möbius strip) brought him to topology, combinatorics and irrational numbers. In 1951, Hill co-founded the Constructivist Group in London, together with Victor Pasmor (1908–1998), Adrian Heath (1920–1992), John Ernest (1922–1994), Kenneth Martin (1905–1984), Mary Martin (1907–1969), Gillian Wise (1936–2020) and Stephen Gilbert (1910–2007); in the same year, the group presented their first exhibition. Following the logic already indicated in this section, the relationship between the artist and technical means became the subject of a group exhibition in 1954. For both Hill and other group members, the fundamental goal is the purposeful control over the choice of methods, materials and processes. Geometry and calculus served Hill to thoroughly reflect on his own work, without perhaps intending to reduce it to mathematics, as his formulation gives away: ‘...a mathematical theme or a mathematical process can only be a component: one is calculating or organising something which is clearly not mathematical’.

In the same spirit, Hill also embarked on an analysis of typical Mondrian compositions, to which he devoted an article published in the *Leonardo* magazine (Hill 1968a: pp 188–196) and a chapter in the anthology *DATA* (Hill 1968 b: pp251–269) which he edited and in which focused on the relationship between modern and post-war art and science.

The article presented in this anthology is titled *The Programme. The Paragram. The Structure* and it builds its hypothesis on the basis of these concepts about the fundamental growth of the importance of structure in art which seems to be confirmed by the developmental line ‘modern art – abstract art – constructivist art’. In the sense of the concretistic perception of the work of art as ‘an intention equal to an idea concretized through a work of art’, Hill sees the systematic creation of programmes developing and verifying the effectiveness of the syntactic aspect of artworks as a means to fulfil this concretization.⁷

7 — Here Hill refers to the semiotics of Charles W. Morris and his three levels of semiosis: syntactics – semantics – pragmatics.

‘Paragram’ was another important concept of Hill’s, meaning a visual aid to interpretation, such as a diagram, table, chart, etc. that complements the ideas expressed the common linear prose. It notes actual instances which could be found in art theories (Alfred Barr: *Diagram of development of modern art*, 1936, *The Museum of Modern Art*, New York), but especially in the art works themselves (Malevich, Pica-bia, Charles Biederman, Max Bill, Georges Mathieu, Ianis Xenakis and others). He noted that the origins of paragrams could be traced back to antiquity, with the immediate beginnings of modern paragrams dating back to the late 17th century. We find them especially in science, logic and mathematics as means of ‘graphical argument’. According to Hill, Leibniz can be considered the father of paragrams; Leibniz also gave rise to systematic topology, started to become aware of isomorphism



OBR. 7 Piet Mondrian: Kompozice s červenou a modrou, 1933
FIG. 7 Piet Mondrian: Composition with Red and Blue, 1933

Lze za otce paragramů pokládat Leibnitze, který také podal podnět pro systematickou topologii, začal si uvědomovat isomorfismus mezi tvrzeními učiněnými logikou a geometrií a konstruoval analogie pro logické vztahy. Následně inicioval Euler skutečné počátky topologie s prvními teorémy, s nimiž se započala teorie grafů (nalezení „struktur“ skládajících se z čar a bodů pro představení množin a logiky). Právě „teorii grafů“ potvrzuje Hill jako specifické východisko pro paragramy. Grafy se stávají významným nástrojem a „...mohou být označeny jako nová lingua franca.“

Anthony Hill pak dále uvažuje o možnosti změřit obsah strukturních sítí a prověřuje dva přístupy: estetickou míru G. D. Birkhoffa a Rashevského návrh „topologického informačního obsahu grafů“ pocházející z molekulární biologie. Nalézá zde prostředek hodnocení symetrie. Východiskem se stává určení grafu jako asymetrického, když jeho automorfni skupina obsahuje jenom identitní automorfismus. Protože se obecně soudí, že typickým rysem Mondrianova kompozičního schématu je záměrné vyhýbání se konvenční symetrii, studuje Hill na jeho obrazech „vztahy symtopie“ (topologické symetrie a asymetrie). „Konvenční symetrii“ lze ve shodě s tím popsat jako „vlastnost obrazců a uspořádání, podle níž objekt vypadá stejně po vzájemném vyměnění některých svých částí“. V topologických pojmech (pojmech teorie grafů) se jeví Mondrian tak, že nikdy nepoužil zcela pravidelné sítě, nicméně využíval „identitní“ sítě. Hill uvádí způsob, jak mohou být tři z pěti platónských těles předvedeny ve tvarech síťového grafu, které při zachování své strukturní podstaty mohou být upraveny z původní pravidelné mřížky do tvaru, kdy obvyklé kritérium symetrie nakonec mizí [OBR. 8].

Úplnější studium „měření“ symetrie a asymetrie by mělo podle Hilla srovnávat Rashevského myšlenku se zcela odlišnou metodou používanou v teorii grafů. Vzhledem k tomu, že úroveň automorfismu grafu může v určitém smyslu být považována za míru jeho symetrie, může být problém pojat jako získání míry asymetrie v asymetrickém grafu. Pro srovnání ještě uvedeme další dva příklady Mondrianových kompozic a jejich topologických přepisů, které podává Hill [OBR. 9,10].

Hill ve svém příspěvku především předpokládá růst významu diskuze pro potřebnou obecnou fenomenologii struktur. Na příkladu abstraktně-nezobrazivých děl Pieta Mondriana srovnal dvě různé strukturní úrovně, jejich rozdílnosti a podobnosti s ohledem na implicitní a explicitní symetrické vztahy a dospěl ke zjištění hlavního rozdílu: zatímco metrická symetrie jako vlastnost je v určité míře vždy relativní, přičemž její součástí jsou odchylky, přibližnosti atd., je topologická symetrie vždy absolutní a neměnnou kvalitou.

Hillova práce se v kontextu našeho směřování jeví jako užitečná právě návrhem vnímat statické sítě topologickým přístupem, který uvolňuje původní statickost, ztuhlost a nepoddajnost směrem k dynamice, uvolněnosti a proměnlivosti vnímání, jež zároveň ponechává hodnotu setrvalosti.

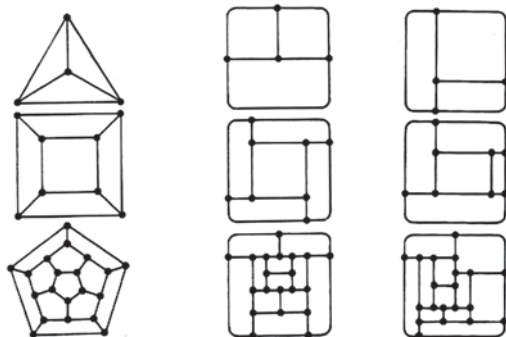
between statements made by logic and geometry and constructed analogies for logical relations. Subsequently, Euler initiated the true beginnings of topology and the first theorems with which graph theory (finding of ‘structures’ made of lines and points to represent sets and logic). It is the very ‘graph theory’ that Hill affirms as the specific starting point for paragrams. Graphs become an important tool and they ‘...can be described as the new lingua franca’.

Furthermore, Anthony Hill speculates about the possibility to measure the area of structural networks and examines two approaches: the aesthetic measure of G. D. Birkhoff and Rashevsky’s proposal of ‘topological information content of graphs’ coming from molecular biology. And he finds a way to assess symmetry. His solution is defining the graph as asymmetrical when its automorphism group contains only the identity automorphism. Since it is generally believed that the typical feature of Mondrian’s compositional scheme is the deliberate avoidance of conventional symmetry, Hill examines the ‘relations of symptomia’ (topological symmetry and asymmetry) in his paintings. ‘Conventional symmetry’ can be, in harmony with this, described as ‘the property of patterns and arrangements according to which the object looks the same after some of its parts had been interchanged’. In topological terms (graph theory terms) Mondrian seems to never have used quite regular networks, but he did use ‘identity’ networks. Hill shows an example of how three of the five Platonic solids could be transformed into a form of network graph which, while keeping their structural essence, can be modified from the original regular grid into a shape in which the usual symmetry criterion eventually disappears [FIG. 8].

According to Hill, a more comprehensive study of the ‘measurement’ of symmetry and asymmetry should compare Rashevsky’s idea with an entirely different method used in graph theory. And since the automorphism level of a graph can in certain sense be thought of as a measure of its symmetry, the problem can be approached as obtaining a measure of asymmetry in an asymmetric graph. For the sake of comparison, we have another two examples of Mondrian’s compositions and their topological transcriptions, as given by Hill [FIG. 9,10].

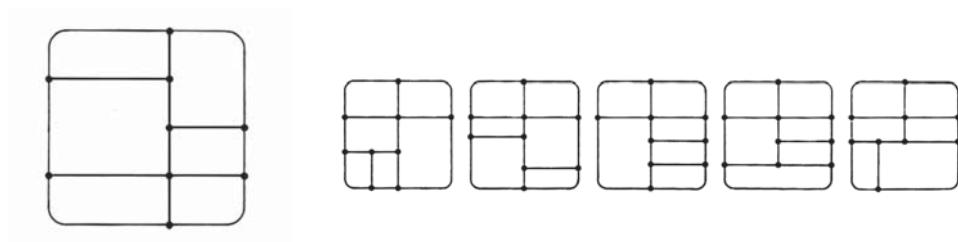
In his paper, Hill first of all assumes the growing importance of the discussion for the necessary general phenomenology of structures. Using the example of Piet Mondrian’s abstract-non-representational works, he compared two structural levels, their differences and similarities with respect to implicit and explicit symmetric relations, and arrived at the key difference: while metrical symmetry as a property is always to certain degree relative, involving deviations, approximations, etc., topological symmetry is always an absolute and immutable quality

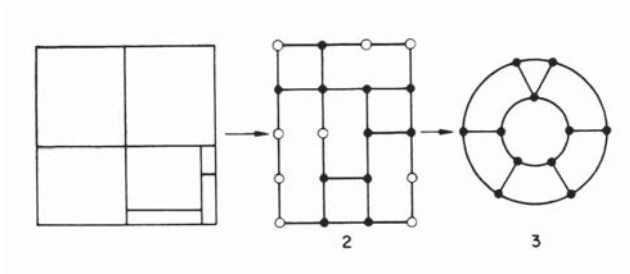
In the context of our focus, Hill’s work seems useful precisely for proposing to perceive static networks with a topological approach which releases the original staticity, stiffness and unyieldingness towards dynamics, relaxedness and mutability of perception which at the same time remains the value of permanence.



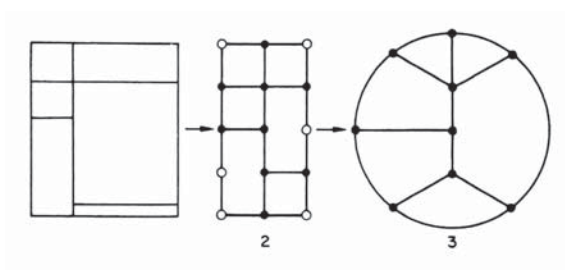
OBR. 8 Síťové diagramy tří platónských těles ve třech podobách. Následující příklad představuje identitní síť, která slouží jako infra-struktura ve výše uvedené Mondrianově malbě (Piet Mondrian: Kompozice s červenou a modrou, 1933). Jde o identitní síť pravděpodobně nejmenší svého druhu (tj. nejmenší, která může být vložena do pravoúhlé mříže). Schéma může být nakresleno pěti rozdílnými, ačkoliv topologicky shodnými způsoby.

FIG. 8 Network diagrams of the three Platonic solids in three forms. The following example represents identity network which serves as infra-structure in the above Mondrian painting (Piet Mondrian: Composition with Red and Blue, 1933). It is probably the smallest identity network of its kind (i.e. the smallest that can be inserted into a rectangular grid). The diagram can be drawn in five different, yet topologically identical ways.





OBR. 9 Piet Mondrian: Kompozice č. III, s červenou, modrou, žlutou a černou, 1929
FIG. 9 Piet Mondrian: Composition No. III, with Red, Blue, Yellow and Black, 1929



OBR. 10 Piet Mondrian: Kompozice s modrou, žlutou, červenou a černou, 1922
FIG. 10 Piet Mondrian: Composition with Blue, Red, Yellow and Black, 1922

4. Potřeba dynamického paradigmatu

Pravděpodobně nevyvolá spor tvrzení, že výrazným fenoménem současnosti je změna, proměna. Neznamená to, že by snad nebyla trvale přítomna v lidském vnímání a hodnocení, pouze se její naléhavost i uplatnění za poslední století výrazně zvýšily. Ve skutečnosti samotné narostla váha dynamicky se proměňujících jevů, zároveň vzrostl nárok na pohotovost našeho vnímání provázený jistou chronickou rozptýleností. Celé 20. století prokazuje jak v teoretických reflexích filozofů, historiků a sociologů, tak v uměleckých projevech rostoucí pozornost k proměně, pohybu a rychlosti.

Subverze dada vynesla mezi umělecké prostředky reálný pohyb (Marcel Duchamp: Kolo, 1913), který konečně prolomil druhové omezení výtvarného umění a uvedl do něj pohyblivost, dosud jen deklarovanou futurismem. Že se u Duchampa nejednalo jen o náhodný výstřelek, potvrzuje jeho následný trvalý zájem o využívání pohybu v uměleckých artefaktech (Rotující skleněné desky, 1920, Rotative demisphere /Rotary demisphere, 1925 a Rotoreliéfy, 1935). Z přelomu let 1919–1920 také pochází Kinetická konstrukce (Stojící vlna) Nauma Gaba, kterou následuje roku 1920 Realistický manifest bratrů Gaba a Pevsnera, jenž explicitně hovoří o potřebě nahrazení „statických rytů“ dosavadního umění „rytmy kinetickými“ (Pevsner 2008: 78–79). Podobně již zmiňovaný dědic Bauhausu Moholy-Nagy tvoří na konci dvacátých let objekt rozptýlující v prostoru efemérní světelné struktury (László Moholy-Nagy, Modulátor světla a prostoru, 1929–30).

Problému změny se už na počátku 20. století věnoval s velkou pozorností Henri Bergson. Ve stati Vnímání změny (Bergson 2003: 140–171) nás konfrontuje s rozporem pojmového pokrytí jevů, které mají počátek v našich vjemech. Ovšem ani pečlivě budované pojmové systémy, ani aktuální schopnost jevy vnímat nejsou pro naše pochopení světa nakonec při nutném omezení dostatečné. Bergson nás chce vrátit „přímému vnímání změny a pohyblivosti“, k představě *každé změny a každého pohybu jako absolutně nedělitelných* (Bergson 2003: 154). To nás pak může dovést k pochopení, že *„existují změny, ale pod změnou neexistují věci, které se mění: změna nepotřebuje oporu. Existují pohyby, ale neexistuje netečný, invariantní předmět, který se pohybuje: pohyb neimplikuje něco, co se pohybuje.“* (Bergson 2003: 159)

Jistou obdobnou dynamizující a dematerializovanou představu nám nabízí i teoretický fyzik David Bohm. Stále obtížněji představám přístupné poznání kvantové povahy světa a nejasnost jeho důsledků pro náš vztah k němu se snaží překonat svou teorií implikátního řádu. S přispěním metafory holografu buduje Bohm teorii o základním řádu univerzálního celopohybu, který je neustálým svinováním a následným rozvinováním. Bohm konstatuje, že „...svinutí a rozvinutí jsou primární skutečnosti a objekty, entity, tvary atd., které se v tomto pohybu objevují, jsou druhotné.“ (Bohm 1992: 19) Ve svých důsledcích tato myšlenka vede k představě, že „...jak mysl, tak hmota jsou nakonec v implikátních řádech, a že explikátní řády představují relativně samostatné, odlišné a nezávislé objekty, entity a formy, rozvíjející

4. The Need for a Dynamic Paradigm

No one is probably going to argue when we claim that change, transformation is a distinctive phenomenon of our time. It does not mean to say it is not permanently present in human perception and evaluation, only that both its urgency and its application in the past century grew significantly. In an actual reality, the weight of dynamically changing phenomena has increased while at the same time the demand for the readiness of our perception has grown, which is accompanied by a certain chronic distraction. The entire 20th century demonstrates, both in the theoretical reflections of philosophers, historians and sociologists and in artistic expressions the growing attention to change, movement and speed.

The subversion of Dadaism brought some real movement (Marcel Duchamp: The Wheel, 1913) to the artistic devices which finally broke the generic limitations of visual art and introduced to it fluidity that had been only declared by Futurism before. And it was not just an accidental fad for Duchamp; this is confirmed by his subsequent and sustained interest in the use of movement in artistic artefacts (Rotating Glass Plates, 1920, Rotary Demisphere (Precision optics), 1925, and Rotoreliefs, 1935). Naum Gabo's Kinetic Construction (Standing Wave) also dates from the turn of 1919–1920, which is followed in 1920 by the Realistic Manifesto of the Pevsner brothers Gabo and Antoine which explicitly speaks of replacing the 'static rhythm' of existing art with 'kinetic rhythms' (Pevsner 2008: p. 78–79). Similarly, the aforementioned Bauhaus heir Moholy-Nagy creates an object in the late 1920s that disperses ephemeral light structures in space (László Moholy-Nagy, Light-Space Modulator, 1929–30).

Henri Bergson paid great attention to the problem of change at the beginning of 20th century. In his essay *The Perception of Change* (Bergson 2003: pp 140–171) he confronts us with the contradiction of the conceptual coverage of phenomena which originate in our perceptions. However, neither the carefully constructed conceptual systems, nor the actual ability to perceive phenomena are ultimately sufficient for our understanding of the world, considering the necessary limitations. Bergson wants to bring us back to the 'direct perception of change and mobility', to the idea of *every change and every movement as absolutely indivisible* (Bergson 2003: p. 154). This can then lead us to the understanding that *'changes exist, yet underneath the changes there are no things that change: a change does not need support. There are movements, but there is no inert, invariant object that moves: a movement does not imply something that moves'*. (Bergson 2003: p. 159)

The theoretical physicist David Bohm provided us with a similar dynamizing and dematerialized idea. He tries to overcome the increasingly difficult to imagine knowledge of the quantum nature of the world and the ambiguity of its implications for our relationships to the world with his theory of implicate order. Using the metaphor of a holograph, Bohm builds a theory of the fundamental order of universal whole motion (holomovement) which is a constant enfolding and unfolding.

se z implikátních řádů. [...]...nabízí se cesta pro takový pohled na svět, v němž lze mysl i hmotu spojit konsistentně bez přijetí redukcionistického hlediska.“ (Bohm, 1992: 23) Mentální a materiální jsou tak dvě stránky jedné skutečnosti. Bohmovo pojetí také nabízí nový pohled na souvislost celku a částí.

V určitém smyslu je této představě blízké i svinutí programů v počítačích.⁸ John D. Barrow, astronom a filozof vědy, využívá v knize *Teorie všeho* (1996) při hledání smyslu vědeckých teorií inspirační termín – „algoritmická stlačitelnost“. Věda sice sbírá data a její významná část se věnuje pozorování, ale nemůže se zastavit u pouhého sestavování atlasů jevů. Očekávají se od ní předpovědi, které bude možné potvrdit. Prostředkem k tomu se stává odhalování pravidelností, tedy rozpoznávání řádu, a to pak vede k zestručnění, kondenzaci dat. Algoritmicky stlačitelný je pak každý řetězec symbolů, který lze zapsat v úspornější, zkrácené formě. A právě na této víře v algoritmickou stlačitelnost vesmíru je podle Barrowa založena věda. Lidský duch je nástrojem, který to dokáže provést, mozek je „nejúčinnějším algoritmickým kompresorem informace“ (Barrow 1996: 21).

8 — Koneckonců sám Bohm uvádí jako další analogii počítačové hry a jejich vazbu na displej (Bohm 1992: s. 21).

Algoritmická stlačitelnost ale musí umožňovat své rozvinutí do explicitního tvaru, který se stává smyslově vnímatelným a ve vizuálním umění jde vlastně především tohle.

5. Počítačové generativní umění jako nástroj hledání nového paradigmatu názornosti

Lev Manovich, novomediální teoretik a umělec, publikoval v roce 2004 v knize *Abstraction Now*, která provázela stejnojmennou výstavou konající se od 29. srpna do 28. září 2003 v Künstlerhaus Wien, první verzi⁹ studie *Abstraction and Complexity*. Zamýšlí se zde nad specifičností nového fenoménu vizuálního umění – počítačovým generativním uměním, v textu označovaném jako „softwarová abstrakce“. Zběžný, byť jen povrchní pohled odhaluje zásadní proměnu pojetí „abstrakce“, tedy nezobrazivého vizuálního jazyka ve 20. století. Manovich srovnává abstraktní umění z počátku 20. století s tím, kterým se zabývají umělci konce téhož století a počátku století 21. Rozdíl se jeví markantní – průkopníci abstrakce směřovali k omezení vizuálních prostředků, k redukci. Naproti tomu díla současníků, která se opírají o počítač jako umělecký nástroj, pracují s bezbřehou mnohostí, kupením

9 — Studii později ještě přepracoval, její nová verze je dostupná na Manovichových internetových stránkách (http://manovich.net/content/04-projects/044-abstraction-and-complexity/41_article_2004.pdf).

Bohm states that ‘...the enfolding and unfolding are the primary facts and objects, entities, forms etc., which appear in this movement are secondary’ (Bohm 1992: p. 19). In its implications, the thought leads to an idea that ‘...both mind and matter are ultimately in implicate orders and that explicate orders represent relatively separate, distinct and independent objects, entities and forms which develop from implicate orders. [...] ...a way is offered for such view of the world in which mind and matter can be combined consistently without adopting a reductionist point of view’ (Bohm, 1992: p. 23). Mental and material are thus two sides of one reality. Bohm’s approach also offers a new perspective on the coherence of the whole and the parts.

In a sense, the contraction (compression) of computer programs is also close to this concept.⁸ John D. Barrow, astronomer and philosopher of science, uses an inspiring term in his book *Theories of Everything* (1996) in his search for the meaning of scientific theories – ‘the algorithmic compressibility’. Science does collect data and its important part of it deals with observation, yet it cannot stop at merely compiling atlases of various phenomena. It is expected to make predictions which can be confirmed. The way to do this is the detection of regularities, that is, the recognition of order, which then leads to the abbreviation, condensation of data. Any chain of symbols which can be written in a more economical, abbreviated form is then algorithmically compressible. And it is this belief in the algorithmic compressibility of the universe that Barrow believes science is based. The human spirit is an instrument which can do this; the brain is ‘the most efficient algorithmic compressor of information’ (Barrow 1996: p. 21).

8 — After all, Bohm presents the computer game and its link to the display as yet another analogy (Bohm 1992: p. 21).

The algorithmical compressibility must, nevertheless, allow for its unfolding into the explicit shape which becomes sensually perceptible, and in fact this is what visual art is all about.

5. Computer Generative Art as a Tool for Finding a New Paradigm of Visualization

In 2004, Lev Manovich, a new media theorist and artist, published in his book *Abstraction Now*, which accompanied the exhibition of the same name held from 29th August to 28th September, 2003, at the Künstlerhaus Wien the first version⁹ of his study *Abstraction and Complexity*. He reflects here on the specificity of the new phenomenon in visual art – the computer generated art, referred to in the text as ‘software abstraction’. A cursory, if only superficial, glance reveals a fundamental transformation of the term ‘abstraction’,

9 — He has revised his study later and the new version is available from Manovich’s website: (http://manovich.net/content/04-projects/044-abstraction-and-complexity/41_article_2004.pdf).

tvář, jejich překrýváním, řetěžením a především ustavičnou dynamikou vzniku, zanikání a opětovné obnovy. Manovich pro to nalézá i vysvětlení. Jakkoliv byla abstrakce Mondriana, Delaunay, Kandinského nebo italských futuristů formálně různorodá – vrcholný Mondrian pracuje s křížením horizontál a vertikál, Delaunay rozepisuje po obrazové ploše kružnice, Kandinskij směřuje postupně k omezenému repertoáru geometrických figur a futuristé ke tkanivu proplétajících se jasně vyznačených křivek, společně směřují k vytvoření přehledného stavebního řádu. A jakkoliv jsou také ideové inspirace této abstrakce podobně různorodé – od synestézie, symbolismu, přes theosofii až ke komunismu, výsledná modernistická abstrakce sdílí právě onen „redukcionismus“, který je mnohem obecnějším paradigmatem a je charakteristický i pro souběžně se rozvíjející moderní vědu.

Také věda se totiž v oné době již dlouho přidržuje metodické redukce jako prostředku pro zjednodušení popisu světa a snadnější predikci. Především fyzika a chemie, ale i experimentální psychologie a mnohé další vědy dekonstruují složité objekty svého zájmu na skladbu zjednodušených stavebních prvků, pro které je snadné určit jednoduché a obecné zákony, které je rámcově ovládají. Pokud pro přírodní vědy jsou těmito prvky atomy, molekuly a buňky, pro psychologii je takovým elementem izolovaný, přímo „preparovaný“ smyslový počitek a celá vizuální zkušenost je nazírána jako slučování oddělených aspektů vnímání.

Manovich tak dokonce může hovořit o „redukcí vizuální zkušenosti“ v nastupujícím moderním umění. Od Maneta a impresionistů přes symbolismus, fauvismus až ke kubismu lze sledovat sklon k abstrahování od dílčích a náhodných připomínek viděných jevů¹⁰. Odkazuje se zde na slavný příklad postupného zjednodušování malby stromu u Mondriana v letech 1908 až 1914¹¹. Jistý posun k úspoře a zefektivnění složitosti vizuálních znaků ovšem vede až k odstranění všech rozpoznatelných stop odkazujících k tradici naší běžné vizuální zkušenosti. Zřetelně tak vystupuje shodné paradigma prosazující se jak v moderním umění, tak v moderní vědě a které lze postihnout právě slovem „redukce“.

10 — V Ecově terminologii (Eco 2001) by to bylo prosazování kódů rozpoznávání, ve kterých se stále více uplatňuje „princip ekonomie“.

11 — S tímto výběrem a názornou komparací přišel v polovině 60. let Copplestone (1965).

Od 60. let minulého století se však vynořuje nové paradigma. Redukcionismus dosavadní vědy stále více selhává při potřebě vysvětlit rozmanitost různých fyzikálních a biologických fenoménů. V mnoha různých disciplínách se společně prosazují blízká témata: teorie chaosu, komplexní systémy, sebe-organizace, autopoiesis, emergence, umělý život, neuronové sítě. Teorie se zaměřují na komplexní a nelineární dynamické systémy a na modelování vývoje či chování těchto systémů, které může být velmi složitým výsledkem interakce souboru jednoduchých prvků v intencích limitovaných pravidel. Takové interakce vedou k emergentním vlastnostem, tedy vlastnostem, které nebylo možné z bytí determinovaného chování předem určit a představují nepředvídatelné globální chování. Řád v takových systémech se

that is, of a non-representational visual language of the 20th century. Manovich compares the abstract art of the early 20th century with that of the artists of the late 20th and early 21st centuries. The difference appears to be striking – the pioneers of abstractions aimed at reducing the visual means, at reduction. In contrast, the works of the contemporaries, which rely on the computer as an artistic instrument, work with boundless multiplicity, accumulation of shapes, their overlapping, chaining and, above all, the constant dynamics of emergence, vanishing and renewal. Manovich also finds an explanation for this. However formally varied the abstract works of Mondrian, Delaunay, Kandinsky or the Italian Futurists were – Mondrian at his prime works with the intersection of horizontals and verticals, Delaunay plants circles on the surface of the painting, Kandinsky gradually moves to a limited repertoire of geometric figures, and the Futurists towards a fabric of intertwining and clearly marked curves, together they aim to create a clear structural order. And as varied as the ideological inspirations for such abstraction are – from synaesthesia, to symbolism, to theosophy, to communism – the resulting modernist abstraction shares precisely that ‘reductionism’ which is a much more general paradigm and is also characteristic for the simultaneously developing modern science.

Also science had at that time long adhered to methodological reduction as a means of simplifying the description of the world and for making predictions easier. It is especially physics and chemistry, but also experimental psychology and many other sciences, which deconstruct complex objects of their interest into a composition of simplified building blocks for which it is easy to identify the simple and general laws that govern them. If these elements are atoms, molecules and cells for natural sciences, for psychology this element is the isolated, directly ‘prepared’ sensory perception and the entire visual experience is viewed as a merging of separate aspects of perception.

Thus, Manovich can even speak of ‘a reduction of visual experience’ in the emerging modern art. From Manet and the Impressionists, through Symbolism, Fauvism and Cubism, we can trace the tendency to abstract from partial and random reminders of observed phenomena.¹⁰ There is a reference to the famous example of the gradual simplification of the painting of a tree by Mondrian between 1908 and 1914.¹¹ However, certain shift towards economy and streamlining of the complexity of visual signs leads to the removal of all recognizable traces referring to the tradition of our ordinary visual experience. Thus, the same paradigm emerges clearly which is asserting itself in both modern art and modern science which can be captured by the very word ‘reduction’.

10 — In Eco’s terminology, this would be the enforcement of codes of recognition in which the ‘principle of economy’ is increasingly applied.

11 — Copplestone came in the mid-1960s (1965) with this selection and illustrative comparison.

However, a new paradigm has been emerging since 1960s. The reductionism of existing science is significantly failing when trying to explain the diversity of physical and biological phenomena. In various disciplines, close themes are gaining ground: chaos theory, complex systems, self-organization, autopoiesis, emergence, artificial

spontánně vynořuje, nemůže být jednoduše dedukován z vlastností prvků, které systém vytvářejí. Nové paradigma komplexity rozšiřuje dřívější chápání vesmíru jako „hodinového strojků“ klasické fyziky, aby mohlo zahrnout jevy politické, společenské, ekonomické a technické, jež se nyní jeví mnohem propojenější, dynamičtější a složitější, než jak se jevíly kdykoliv dříve. Lineární modely koncipované shora dolů a redukcionistický přístup odkrývá své hranice, paradigma komplexity se přibližuje životu, existenci a evoluci přírodních, biologických a sociálních systémů.

A právě komplexitu identifikuje Manovich jako paradigma, které stojí za současnými „softwarovými abstrakcemi“. Není však v zásadě autory explicitně zmiňována, nicméně díla estetiku komplexity sledují a opírají se o komplexní systémy v přirozeném světě. Od průkopnických dob počítačového umění hledali jeho umělci vzdor principiálnímu determinismu standardních algoritmů cesty k dosažení svobodného a nepředvídatelně konstituovaného uměleckého díla. Původně zahrnutá náhodnost, pohybující se v mezích definovaných v parametrech, se ve stále komplikovanějších algoritmech počala vymykat jednoduchým apriorním představám.

Manovichův odkaz na „softwarovou abstrakci“ jde ztotožnit, jak už jsme naznačili, s tím druhem počítačového umění, které bývá definováno jako počítačové generativní umění. O jeho vymezení se pokusil v roce 2003 Philip Galanter v článku *What Is Generative Art? Complexity Theory as a Context for Art Theory* pro konferenci generativního umění v Miláně (Galanter 2003). Definici časem ještě doplnil a přepracoval ve stati *Generative Art Theory* (Paul 2016: 146–180).

Jak tušíme z názvů obou článků, je principem určení počítačového generativního umění, tedy synonyma Manovichovy „softwarové abstrakce“, vymezení obecnějšího pojmu „generativní umění“. To podle původní definice „...odkazuje ke každé umělecké praxi, ve které umělec používá nějaký systém, jako třeba soubor pravidel přirozeného jazyka, počítačový program, stroj nebo jinou vynalezenou proceduru, která je uvedena do pohybu s určitým stupněm nezávislosti, aby přispěla k tvorbě díla nebo do hotového uměleckého díla vyústila.“ (Galanter 2003) Generativní umění především deleguje podobně jako konceptuální umění tvůrčí praxi na předem vymezené postupy, které mohou fungovat nezávisle na aktuální vůli tvůrce, ovšem ve smyslu jeho původních intencí. Galanter svou definici ještě dále zdokonaluje ve smyslu očekávané autonomie: „Generativní umění odkazuje k jakémukoli umělecké praxi, ve které umělec postoupí řízení nějakému systému s funkční autonomií, která přispívá k hotovému uměleckému dílu nebo do něj ústí. Systémy mohou zahrnovat instrukce v přirozeném jazyce, biologické nebo chemické procesy, počítačové programy, stroje, samoorganizující materiály, matematické operace a další procedurální konstrukce (Galanter 2008). Co se pak týče vlastního „počítačového“ generativního umění, potvrzuje Galanter, že „...současní generativní umělci zpravidla směřují ke zkoumání a využití komplexních systémů.“ (Paul 2016: 146–180)

life, neural networks. The theories focus on complex and non-linear dynamic systems and on modelling the evolution or behaviour of these systems which could be a very complex result of an interaction between a set of simple elements within a context of limited rules. Such interactions lead to emergent properties, i.e. properties which could not be determined in advance even if from a determined behaviour and they represent an unpredictable global behaviour. Order in such systems emerges spontaneously; it cannot be simply deduced from the properties of the elements that form the system. The new paradigm of complexity extends the previous understanding of the universe as 'clockwork' of classical physics to encompass political, social, economic and technical phenomena which now appear much more interconnected, dynamic and complex than they ever have before. As linear models conceived from top down and the reductionist approach reveals their limits, the complexity paradigm is moving closer to life, existence and evolution of natural, biological and social systems.

And it is the actual complexity that Manovich identifies as a paradigm behind all the contemporary 'software abstractions'. It is not explicitly mentioned by the authors, though, yet the works deal with the aesthetics of complexity and rely on complex systems in the natural world. From the pioneer days of computer art, its artists have sought ways to achieve free and unpredictably constituted art work, despite the principal determinism of the standard algorithms. The originally incorporated randomness, moving within predefined parameters, began to defy the simple a priori notions in increasingly complicated algorithms.

Manovich's reference to 'software abstraction' can be identified, as we have already suggested, with the kind of computer art that is usually defined as computer generative art. Its definition was attempted by Philip Galanter in 2003 in his article *What Is Generative Art? Complexity Theory as a Context for Art Theory* for the conference of generative art in Milan (Galanter 2003). He revised and expanded his definition in his essay *Generative Art Theory* (Paul 2016: pp 146–180).

As we suspect from the titles of both articles, the principle of defining the computer generative art, a synonym of Manovich's 'software abstraction', is to define the more general term 'generative art'. Generative art, according to the original definition, '... refers to any artistic practice in which an artist uses a system, such as a set of rules of natural language, a computer program, machine or another invented procedure put into motion with some degree of independence in order to contribute to the creation of a work or to result in an accomplished work of art' (Galanter 2003). Generative art, like conceptual art, delegates creative practice to predefined procedure which can function regardless of the actual will of the creator, but in the sense of his/her original intentions. Galanter refines his definition further in the sense of expected autonomy: 'Generative art refers to any art practice in which the artist cedes the control to some system with functional autonomy which contributes to the finished work of art or results in it. The systems can include instructions in natural language, biological or chemical processes, computer programs,

Nepřeberný počet příkladů v tomto příspěvku zjednodušíme na tři. Volná tvorba herního designéra Franka Force představuje v roce 2022 škálu vizuálních procesů, které autor nazval Chaospills. Chaotický algoritmus se s nárůstem zrozených prvků vymyká kontrole, naši pozornost vtahuje generativní umění pohybující se před hranou chaosu. Jednotlivé obrazy, respektive animace, mají specifickou „tvář“, nesou vlastní tvarovou charakteristiku, která rozšiřuje naše chápání okolních jevů, zvyšuje naši citlivost k nim a zanechává využitelné stopy v naší vizuální paměti.

Chaospills inscenují nekonečné, opakované a stále nově se diferencující drama dění, oživlé a soupeřící o naši pozornost. Velmi pozoruhodným příkladem vizuálního generativního počítačového umění je simulace vícerozměrné krychle Manfreda Mohra. Tématu se Mohr věnoval delší dobu a jeho výsledkem je jak dynamická projekce, „animace“ procesu, tak jednotlivé snímky v podobě velkoplošných počítačových tisků. Složitost konfigurací jednotlivých linií, které reprezentují hrany tělesa, a jejich obtížně identifikovatelná vzájemná propojenost při neustálé změně jejich sklonu, velikosti a pozice, je při našem pozorování akceptovatelná jen s určitým topologickým nadhledem.

Reasovou Articulate z roku 2003 představuje vizualizaci chování systému, které není ani lineární, ale ani náhodné – mění své konfigurace stav od stavu, rozpoznává tendenci k stabilitě, kterou opět překonává a rozptyluje hledání nové rovnováhy proměněných intencí. Struktura osciluje mezi řádem a chaosem – analogicky ke komplexním systémům přirozeného světa.

Počítačové generativní umění neomezuje vizuální počitky redukcionismem se záměrem vyvolat představu strukturní jednoduchosti, naopak přítomná funkční jednoduchost, i když často jen intuitivně tušená, je zdrojem vtahující a pohlcující složitosti spojené s neodlučitelnou dynamikou proměny.

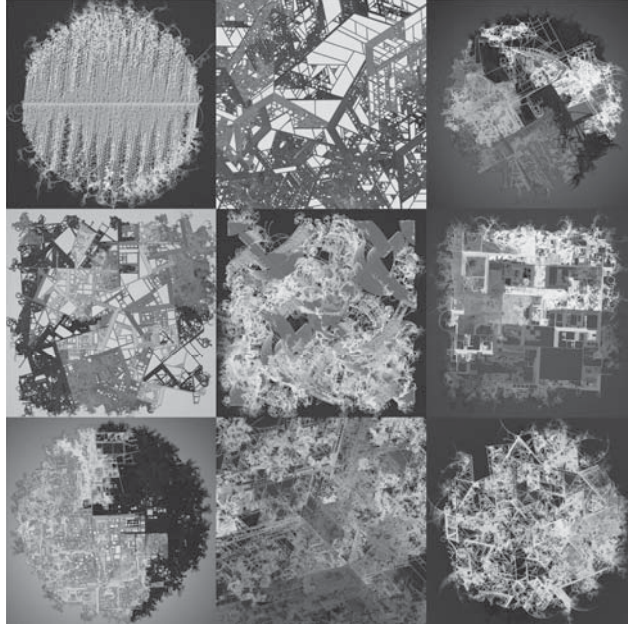
machines, self-organizing materials, mathematical operations and other procedural constructs' (Galanter 2008). As for the actual 'computer' generative art, Galanter confirms that '...contemporary generative artists generally tend towards the exploration and use of complex systems' (Paul 2016: pp. 146–180).

We will reduce the myriad of possible examples for this to the following three: The free work of game designer Frank Force in 2022 presents a range of visual processes their author called Chaospills. As the chaotic algorithm grows out of control with the growing number of emerging elements, our attention is drawn to the generative art moving before the edge of chaos. Individual images, or animations, have a specific 'face', bearing their own shape characteristics which expand our understanding of surrounding phenomena, increase our sensitivity to them and leave usable traces in our visual memory.

Chaospills stage an endless, repetitive and ever-newly differentiating drama of action, animating and competing for our attention. Manfred Mohr's simulation of a multidimensional cube is a very striking example of visual generative computer art. Mohr has been working on the subject for some time and the result is both a dynamic projection, an 'animation' of the process, and individual images in the form of large-scale computer prints. The complexity of the configurations of the individual lines which represent the edges of the solids and their interconnectedness which is hard to define considering their constant change of inclinations, size and positions, is only acceptable with certain topological insight in our observation.

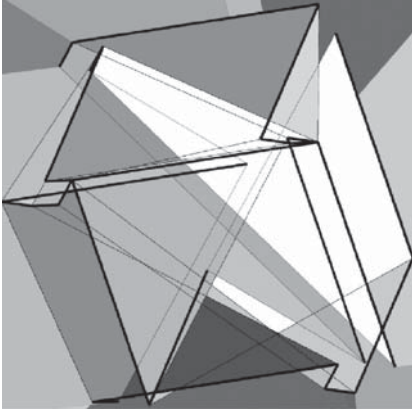
Reas' 2003 *Articulate* is a visualization of the behaviour of a system that is neither linear nor random – it changes its configurations state by state, recognizing a tendency toward stability that is again overcome and distracted by the search for a new equilibrium of altered intentions. The structure oscillates between order and chaos – in an analogy to the complex systems of the natural world.

Computer generative art does not limit visual counts by reductionism with the intention of evoking the notion of structural simplicity, quite the opposite: the present functional simplicity, even if often only intuitively perceived, is the source of absorbing complexity associated with the inseparable dynamics of transformation.

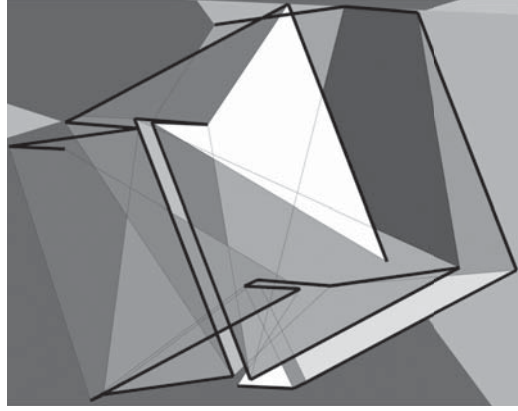


OBR. 11 Frank Force: Chaospills, 2022

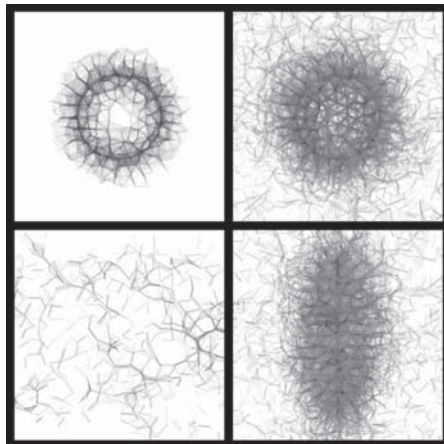
FIG. 11 Frank Force: Chaospills, 2022



OBR. 12 Manfred Mohr, P-706/B, 2000
FIG. 12 Manfred Mohr, P-706/B, 2000



OBR. 13 Manfred Mohr, P-792-P, 2000–2007
FIG. 13 Manfred Mohr, P-792-P, 2000–2007



OBR. 14 Casey Reas: Articulate, 2003
FIG. 14 Casey Reas: Articulate, 2003

6. Závěr

Stížnosti na disparátnost, případně nedosažitelnost a neúčinnost světového názoru naší doby se často a z různých stran opakují. Přesto se jeho sdílení a uvedení v platnost stává stabilizující hodnotou každé kultury a v ještě ambicióznější perspektivě i veškeré civilizace. Jeho produktem a oporou je onen obecný „vizuální názor“. Současný svět potřebuje v pojetí názornosti vyřešit vzájemně si odporující nároky: nesmí zjednodušit, zredukovat pocit složitosti světa, má přitom svým duchem vést k přesvědčení o jeho přijatelnosti, vstřebatelnosti a noetické dosažitelnosti, kterou označují pojmy „čistoty“ a „jasnosti“. Lze předpokládat, že taková názornost musí nutně zůstat dynamickou, otevřenou a v určité míře i nejednoznačnou, tak aby udržovala v plné aktivitě celou šíři našich mnohdy rozporuplných zkušeností, nesystematicky ukládaných v paměti.

6. Conclusion

Complaints about the disparity or unattainability and uselessness of the worldview of our time are often repeated from various sides. Yet sharing it and bringing it to life becomes a stabilizing value of every culture and, in an even more ambitious perspective, of the entire civilization. The general 'visual view' is its product and support. The contemporary world needs to resolve conflicting claims in the perception of representativeness: it must not simplify and reduce the sense of world's complexity, yet at the same time it has to lead in spirit to the conviction of its acceptability, absorbability and noetic accessibility, which is marked by the concepts of 'purity' and 'clarity'. We can assume that such illustrativeness has to necessarily stay dynamic, open and, to certain extent, also ambiguous, so to keep the full width of our often contradictory experiences, unsystematically stored in memory, fully active.

Literatura

- Aumont, Jacques, 2005 (2003). *Obraz*. Praha: Akademie múzických umění v Praze, ISBN 80-7331-045-7
- Barrow, John, D., 1996 (1991). *Teorie všeho*. Praha: Mladá fronta. ISBN 80-204-0602-6
- Bergson, Henri, 2003. *Myslení a pohyb*. Praha: Mladá fronta. ISBN 80-204-1014-7
- Bohm, David, 1992 (1985). *Rozvíjení významu*. Praha: Unitaria, ISBN 80-900305-8-0
- Copplestone, Trewin, 1965 (1964). *Moderní umění*. Praha: Státní nakladatelství krásné literatury a umění
- Francastel, Pierre, 2003 (1951). *Malířství a společnost*. Brno: Barrister & Principal, ISBN 80-86598-49-7
- Galanter, Philip, 2003. „What Is Generative Art? Complexity Theory as a Context for Art Theory.“ Proceedings of the International Conference on Generative Art, Milan, Italy. Generative Design Lab, Milan Polytechnic: City
- Galanter, Philip, 2008. „What Is Complexism? Generative Art and the Cultures of Science and the Humanities.“ Proceedings of the International Conference on Generative Art, Milan, Italy. Generative Design Lab, Milan Polytechnic: City
- Gamwell, Lynn, 2016. *Mathematics + art, A cultural history*, Princeton and Oxford, University Press, ISBN 978-0-691-16528-8
- Gombrich, Ernst H., 1985 (1959). *Umění a iluze*. Praha: Odeon
- Goodman, Nelson, 1996. *Způsob světatvorby*, Bratislava: Archa, ISBN 80-7115-120-3
- Hill, Anthony, 1968a. Art and Mathesis: Mondrian's Structures, *Leonardo*, č. 1, s. 233–241, 1968; in: Malina, Frank J. (ed.): *Visual Art, Mathematics and Computers: Selection from the Journal LEONARDO*, Oxford – New York – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt: Pergamon Press
- Hill, Anthony, 1968 b. Program. Paragram. Structure, in: Hill, Anthony (ed.): *DATA: Direction in Art, Theory and Aesthetics*, London: Faber and Faber
- Hnojil, Adam, Seifert, Aleš (ed.), 2021. *Malevič, Rodčenko, Kandinskij a ruská avantgarda ze sbírky Muzea umění Jekatěrinburg*. Hluboká nad Vltavou: Alšova jihočeská galerie, ISBN 978-80-7641-019-8

References

- Aumont, Jacques, 2005 (2003). *Obraz*. (Image), Praha: Akademie múzických umění v Praze, ISBN 80-7331-045-7
- Barrow, John, D., 1996 (1991). *Teorie všeho* (Theories of Everything), Praha: Mladá fronta. ISBN 80-204-0602-6
- Bergson, Henri, 2003. *Myšlení a pohyb* (Thinking and Motion), Praha: Mladá fronta. ISBN 80-204-1014-7
- Bohm, David, 1992 (1985). *Rozvíjení významu* (Developing the Meaning) Praha: Unitaria, ISBN 80-900305-8-0
- Copplestone, Trewin, 1965 (1964). *Moderní umění* (Modern Art), Praha: Státní nakladatelství krásné literatury a umění
- Francastel, Pierre, 2003 (1951). *Malířství a společnost* (Painting and Society), Brno: Barrister & Principal, ISBN 80-86598-49-7
- Galanter, Philip, 2003. 'What Is Generative Art? Complexity Theory as a Context for Art Theory'. Proceedings of the International Conference on Generative Art, Milan, Italy. Generative Design Lab, Milan Polytechnic: City
- Galanter, Philip, 2008. 'What Is Complexism? Generative Art and the Cultures of Science and the Humanities'. Proceedings of the International Conference on Generative Art, Milan, Italy. Generative Design Lab, Milan Polytechnic: City
- Gamwell, Lynn, 2016. *Mathematics + Art, A cultural history*, Princeton and Oxford, University Press, ISBN 978-0-691-16528-8
- Gombrich, Ernst H., 1985 (1959). *Umění a iluze* (Art and Illusion), Praha: Odeon
- Goodman, Nelson, 1996. *Způsoby světatvorby* (Ways of Worldmaking), Bratislava: Archa, ISBN 80-7115-120-3
- Hill, Anthony, 1968a. Art and Mathesis: Mondrian's Structures, *Leonardo*, No. 1, pp. 233–241, 1968; in: Malina, Frank J. (ed.): *Visual Art, Mathematics and Computers: Selection from the Journal LEONARDO*, Oxford – New York – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt: Pergamon Press
- Hill, Anthony, 1968 b. Program. Paragram. Structure, in: Hill, Anthony (ed.): *DATA: Direction in Art, Theory and Aesthetics*, London: Faber and Faber

Kupka, František, 1923. Tvoření v umění výtvarném, Praha: SVU Mánes.

Lauter Mariene (ed.), 2002. *Konkrete kunst in Europa nach 1945 / Concrete art in Europe after 1945*, Ostfildern-Ruit: Hatje Cantz Verlag, ISBN 3-7757-1191-0

Manovich, Lev, 2004. Abstraction and Complexity, in: *Abstraction Now*, Graz: Edition Camera Austira, ISBN 3-900508-51-8

Manovich, Lev, 2018 (2001). *Jazyk nových médií*. Praha: Karolinum 2018, ISBN 978-80-246-2961-2

Paul, Christiane, (ed.), 2016, *A Companion to Digital Art*, Chichester: John Wiley & Sons, Inc., ISBN 978-1-11-847518-8

Pevsner, Antoine, 2008. *Dopisy bratrovi*. Praha: Arbor vitae, ISBN 978-80-86300-54-2

Žegin, Lev Fjodorovič, 1980 (1970). *Jazyk malířského díla*. Praha: Odeon

Hnojil, Adam, Seifert, Aleš (ed.), 2021. *Malevič, Rodčenko, Kandinskij a ruská avantgarda ze sbírky Muzea umění Jekatěrinburg* (Malevich, Rodchenko, Kandinsky and the Russian Avant-garde from the Collection of the Yekaterinburg Museum of Art), Hluboká nad Vltavou: Alšova jihočeská galerie, ISBN 978-80-7641-019-8

Kupka, František, 1923. *Tvoření v umění výtvarném* (Creating in Fine Art), Praha: SVU Mánes.

Lauter Mariene (ed.), 2002. *Konkrete kunst in Europa nach 1945 / Concrete art in Europe after 1945*, Ostfildern-Ruit: Hatje Cantz Verlag, ISBN 3-7757-1191-0

Manovich, Lev, 2004. Abstraction and Complexity, in: *Abstraction Now*, Graz: Edition Camera Austira, ISBN 3-900508-51-8

Manovich, Lev, 2018 (2001). *Jazyk nových médií* (The Language of New Media), Praha: Karolinum 2018, ISBN 978-80-246-2961-2

Paul, Christiane, (ed.), 2016, *A Companion to Digital Art*, Chichester: John Wiley & Sons, Inc., ISBN 978-1-11-847518-8

Pevsner, Antoine, *Dopisy bratrovi* (Letters to Brother), 2008. Praha: Arbor vitae, ISBN 978-80-86300-54-2

Zhegin, Lev Fedorovich, 1980 (1970). *Jazyk malířského díla* (The Language of a Painting), Praha: Odeon

Jaroslav Nešetřil

Matematik, profesor Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, výtvarník. Studoval na Matematicko-fyzikální fakultě UK, na Universität Wien (1968), na McMaster University v Hamiltonu (1969). Od roku 1970 působí na Matematicko-fyzikální fakultě UK, kde zastával funkci ředitele Institutu teoretické informatiky a Dimatia Centre. Hlavní oblastí Nešetřilovy akademické a výzkumné činnosti v oboru matematiky jsou geometrie a topologie. Je autorem řady prací z oblasti matematiky, teoretické informatiky, kombinatoriky, teorie grafů a dalších. Mezi základní Nešetřilova díla patří *Teorie grafů* (1979), mezinárodní učebnice s Jiřím Matouškem *Kapitoly z diskrétní matematiky* (1998) a kniha *Sparsity* (spolu s P. Ossnou de Mendezem). Ve výtvarném umění spolupracoval dlouhodobě s malířem Jiřím Načeradským. Roku 2015 založil spolu s Tomášem Vlčkem Interdisciplinární seminář topologických studií poetiky umění, krajiny a architektury.

Tomáš Vlček

Historik a teoretik umění, fotograf a autor z oblasti akčního umění. Studoval na Filozofické fakultě Univerzity Karlovy do roku 1967, působil jako kurátor Památníku národního písemnictví (1967–1969) jako aspirant Ústavu teorie a dějin umění Československá akademie věd (1969–1990), od roku 1900 do roku 1992 jako ředitel uvedeného ústavu. V roce 1992 založil Department of History and Philosophy of Art na Středoevropské univerzitě v Praze a Budapešti. Od roku 1996 do roku 2000 působil jako hostující profesor na evropských a amerických univerzitách. Od roku 2001 do roku 2011 byl ředitelem Sbírek moderního a současného umění Národní galerie v Praze. Současně přednášel na Fakultě umění a designu Univerzity Jana Evangelisty Purkyně a Fakultě umění a architektury, Technické univerzity v Liberci kde působí dodnes. Roku 2015 založil spolu s Jaroslavem Nešetřilem Interdisciplinární seminář topologických studií poetiky umění, krajiny a architektury.

Aleš Pultr

Matematik, který přispívá zejména k rozvoji teorie kategorií, topologii, teorii her, k rozvoji algebry a teoretické informatiky. Studoval na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy (1958–1961) od roku 1961 zde působí do současnosti. V letech 1964–1970 byl asistentem, od roku 1970 jako docent, od roku 1991 jako profesor. Publikoval řadu studií v oboru kombinatoriky, topologie, teorie kategorií, teorie her a algebry. Je členem American Mathematical Society, publikoval řadu studií z matematiky v českých a zahraničních edicích.

Jaroslav Nešetřil

Mathematician, professor at the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, and visual artist. He studied at the Faculty of Mathematics and Physics at Charles University in Prague, at Universität Wien (1968) and at McMaster University in Hamilton (1969). Since 1970, Nešetřil has been a lecturer and researcher at the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, and the head of the Institute for Theoretical Computer Science and DIMATIA Center. The principal areas of Nešetřil's academic work and mathematical research are geometry and topology. He is the author of multiple papers in the fields of mathematics, theoretical computer science, combinatorial mathematics, graph theory and others. His essential publications include *Graph Theory* (1979), international textbook *Chapters from Discrete Mathematics* (1998) co-authored by Jiří Matoušek, and *Sparsity*, a book co-authored by Patrice Ossona de Mendez. In visual arts, he is known for his long-term cooperation with painter Jiří Načeradský. In 2015, along with Tomáš Vlček, he launched Interdisciplinary Seminars on Topological Studies of Poetics, Landscape, Art and Architecture.

Tomáš Vlček

Art historian and art theorist, photographer and action artist. In 1967 he graduated from the Faculty of Arts at Charles University. Subsequently he was the curator of the Museum of Czech Literature (1967–1969), graduate student at the Institute of Art History at Czech Academy of Sciences (1969–1990), and director thereof from 1990 to 1992. In 1992, Vlček founded the Department of History and Philosophy of Art at the Central European University in Prague and Budapest. Between 1996 and 2000 he lectured as a visiting professor at various European and American universities. From 2001 to 2011 he was the director of the Collection of Modern and Contemporary Art of the National Gallery in Prague. Simultaneously he was lecturing at the Faculty of Art and Design at Jan Evangelista Purkyně University and Faculty of Arts and Architecture at the Technical University of Liberec where he has remained to this day. In 2015, along with Jaroslav Nešetřil, he launched the Interdisciplinary Seminars on Topological Studies of Poetics, Landscape, Art and Architecture.

Aleš Pultr

Mathematician, primarily contributing to developments in category theory, topology, game theory, algebra and theoretical computer science. He studied at the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University (1958–1961) where he has been teaching since 1961: in 1964–1970 as a lecturer, since 1970 as Associate Professor, and since 1991 as Professor. Pultr has published numerous studies in the fields of combinatorial mathematics, topology, category theory, game theory and algebra. He is a member of the American Mathematical Society and has published a variety of mathematical papers in Czech and international editions.

Martina Viková

Martina Viková, PhD., je docentkou na Katedře materiálového inženýrství Technické univerzity v Liberci. Mezi její výzkumné zájmy patří funkční barviva, aplikace fotochromných a termochromných systémů, syntéza nových barviv a barvení textilií. Působila jako vedoucí výzkumné skupiny IA3 projektu OP VaVpI „Inovativní výrobky a environmentální technologie“. V rámci tohoto projektu se podílela na vývoji unikátního měřicího zařízení pro měření dynamických změn barvy. Dále se věnuje problémům kamuflážních materiálů a jejich adaptivních variant. Doc. Viková je místopředsedkyní České společnosti pro osvětlování a pracuje rovněž v oblasti světelné techniky. Svůj všeobecný technologický rozhled uplatňovala při přípravě a obsahové přestavbě řady předmětů bakalářského, magisterského či doktorského studia. Přednášela na Univerzitě Granada ve Španělsku a Kyoto Institut of Technology v Japonsku. Je autorkou nebo spoluautorkou tří knih, přibližně 30 vědeckých prací publikovaných v odborných časopisech, více než 100 vědeckých příspěvků na mezinárodních konferencích a pěti patentů. Je absolventkou magisterského studia textilního inženýrství na Technické univerzitě v Liberci a doktorského studia na Herriot-Watt University, School of Textile and Design ve Velké Británii. Je editorkou a spoluautorkou knihy *Chromic Materials, Fundamentals, Measurements and Applications*, 2018; AAP: Waretown, New Jersey, USA, ISBN 978-17-71886-80-2.

Michal Vik

Michal Vik, PhD., je profesorem na Katedře materiálových věd Technické univerzity v Liberci, odborným posuzovatelem Českého institutu pro akreditaci a bývalým výzkumným konzultantem Centra pro rozvoj strojírenského výzkumu VÚTS, a. s. Jeho vědecká činnost se týká oblasti nauky o barvách (měření barev a vzhledu, vývoj vzorců pro měření barevných rozdílů, kontrola kvality a vývoj a konstrukce přístrojů), osvětlovací techniky (podání barev, metamerie, viditelnost a nápadnost) a textilní materiálové vědy (inteligentní materiály, pokročilá mikroskopie). Dr. Vik je členem České společnosti pro osvětlování a zastával funkce v České společnosti textilních chemiků a koloristů a v ČNK CIE (národní společnost Mezinárodní komise pro osvětlování – CIE). Je zástupcem České republiky v Divizi 1 Colour and Vision Mezinárodní komise pro osvětlování a členem technických výborů CIE (TC1-55, TC1-63, TC1-72, TC1-95, TC2-61). V současné době je vedoucím Kolorimetrické skupiny ČR a Laboratoře měření barev a vzhledu Katedry materiálového inženýrství Technické univerzity v Liberci a proděkanem Textilní fakulty. Kromě výuky na TU v Liberci přednášel zároveň v rámci programu Erasmus Mundus Master programme – ‘Color in Informatics and Media Technology’ (CIMET) na Univerzitě Granada, Španělsko. V roce 2017 získal medaili NRC Egypt za přínos v oblasti metrologie, fotometrie a kolorimetrie. Je autorem nebo spoluautorem šesti knih, více než 40 vědeckých prací publikovaných v časopisech, 180 vědeckých příspěvků na mezinárodních konferencích a pěti patentů.

Martina Viková

Martina Viková, PhD. is an associate professor at the Department of Materials Engineering at the Technical University of Liberec. Her research interests include functional dyes, applications of photochromic and thermochromic systems, synthesis of new dyes and dyeing of textiles. She worked as the head of the research group IA3 of the project OP VaVpI 'Innovative products and environmental technologies'. Within this project she participated in the development of a unique measuring device for measuring dynamic color changes. She is also working on problems of camouflage materials and their adaptive variants. Doc. Viková is the vice-president of the Czech Society for Illumination and works in the field of lighting technology. She has applied her general technological insight in the preparation and content reconstruction of many courses in bachelor, master, and doctoral studies. She has lectured at the University of Granada in Spain and Kyoto Institute of Technology in Japan. She has authored or co-authored three books, approximately 30 scientific papers published in peer-reviewed journals, more than 100 scientific presentations at international conferences, and five patents. She holds a master's degree in Textile Engineering from the Technical University of Liberec and a PhD from Herriot-Watt University, School of Textile and Design, UK. She is editor and coauthor of book: *Chromic Materials, Fundamentals, Measurements and Applications*, 2018; AAP: Waretown, New Jersey, USA, ISBN 978-17-71886-80-2.

Michal Vik

Michal Vik, PhD., is a professor at the Department of Materials Science at the Technical University of Liberec, an expert assessor of the Czech Institute for Accreditation and a former research consultant at the Centre for Development of Engineering Research VÚTS, a.s. His scientific activities are in the field of color science (color and appearance measurement, development of color difference measurement formulas, quality control and instrument development and design), lighting technology (color rendering, metamerism, visibility and conspicuity) and textile material science (smart materials, advanced microscopy). Dr. Vik is a member of the Czech Society for Illumination and has held positions in the Czech Society of Textile Chemists and Colorists and the CIE National Society of the International Commission on Illumination (CIE). He is the Czech Republic's representative to Division 1 Colour and Vision of the International Commission on Illumination (CIE) and a member of the CIE Technical Committees (TC1-55, TC1-63, TC1-72, TC1-95, TC2-61). Currently he is the head of the Colorimetric Group of the Czech Republic and the Laboratory of Colour and Appearance Measurement of the Department of Materials Engineering of the Technical University of Liberec and Vice Dean of the Faculty of Textiles. In addition to teaching at TU Liberec, he also lectured in the Erasmus Mundus Master programme – 'Color in Informatics and Media Technology' (CIMET) at the University of Granada, Spain. In 2017, he received the NRC Egypt Medal for his contribution in the field of Metrology, Photometry and Colorimetry. He has authored or co-authored six books, more than 40 scientific papers published in journals, 180 scientific papers in international conferences and five patents.

Karel Ježek

Neurofyziolog působící ve funkci vedoucího Laboratoře experimentální neurofyziologie Biomedicínského centra při Lékařské fakultě Univerzity Karlovy v Plzni. Studoval na Lékařské fakultě UK v Plzni, pracoval v Kavli Institute for Brain and Mind na Trondheimské univerzitě v Centru pro biologii paměti a systémové neurovědy v týmu May-Britt a Edvarda Moserových. Ježkův výzkum se zaměřuje na komplexní vztahy neurověd a humanitních disciplín poznání.

Michael Arbib

Vědec a akademik v oborech matematiky a neurovědy. Profesor Kalifornské univerzity v San Diegu, emeritní profesor Univerzity Jižní Kalifornie. Průkopník v oborech počítačových věd a expert v biologických vědách, v biomedicínském výzkumu, v neurovědách a psychologii. Studoval na univerzitě v Sydney a na MIT v Cambridge Massachusetts u profesora Norberta Wienera. V letech 1970–1986 působil na Stanfordské univerzitě a na massachusettské univerzitě Amherst. Od roku 1986 působí na Univerzitě Jižní Kalifornie. Je autorem řady vědeckých publikací v oborech kybernetiky, informatiky, počítačových her, neurologie a psychologie, nejnověji *When Brains Meet Buildings* (2021).

Filip Šenk

Historik a teoretik umění a architektury. Studoval na Filozofické fakultě Masarykovy univerzity v Brně a Faculty of Art and Social Science Lancaster University. Po studiu se věnoval výtvarné kritice. Od roku 2012 působí na Fakultě umění a architektury Technické univerzity v Liberci, od roku 2020 jako vedoucí Katedry dějin a teorie umění a architektury. Je členem Interdisciplinárního semináře topologických studií poetiky umění, krajiny a architektury. Ve své současné práci se zaměřuje na teorii a praxi místa a prostoru v architektuře.

Karel Ježek

Neurophysiologist and the head of the Experimental Neurophysiology Laboratory of Biomedical Center at the Faculty of Medicine in Pilsen. He graduated from the Faculty of Medicine at Charles University in Pilsen and worked in the Kavli Institute for Brain and Mind at the Norwegian University in Trondheim, in the Center for Memory Biology and Systems Neuroscience in the team led by May-Britt and Edvard Mosers. Ježek's research has been focused on complex relationships between neurosciences and cognition-related humanities.

Michael Arbib

Scientist and scholar in the fields of mathematics and neuroscience, Professor at the University of California San Diego, and Professor Emeritus at the University of Southern California. Arbib is a pioneer in computer sciences and an expert in biological sciences, biomedical research, neurosciences and psychology. He studied at the University of Sydney and at MIT in Cambridge, Massachusetts under Professor Norbert Wiener. Between 1970 and 1986 he was lecturing at the Stanford University and the University of Massachusetts Amherst. Since 1986 he has been lecturing at the University of Southern California. He is the author of numerous scientific publications in areas of cybernetics, theoretical computer science, computer games, neurology and psychology, most recently *When Brains Meet Buildings* (2021).

Filip Šenk

Art and architecture historian and theorist. He studied at the Faculty of Arts at Masaryk University in Brno and the Faculty of Arts and Social Sciences at Lancaster University. His main focus after graduation was art criticism. Since 2012, Šenk has lectured at the Faculty of Arts and Architecture at the Technical University of Liberec where he has been the head of the Department of Theory and History of Fine Arts since 2020. He is a member of Interdisciplinary Seminars on Topological Studies of Poetics, Landscape, Art and Architecture. In his current work he focuses on theory and practice of location and space in architecture

Jiří Uran Vítek

Architekt a stavební inženýr působící jako architekt-designer ve vlastním architektonickém studiu a v dalších ateliérech. Jako vyučující působil v letech 2017–2022 na Fakultě architektury Vysokého učení technického v Brně. Studoval na Fakultě architektury VUT v Brně, na Die Angewandte ve Vídni, ve studiu Zahah Hadid (2012–2015) a ve studiu Rani Rashid (2019–2020). Zabývá se navrhováním a výzkumem digitální/parametrické architektury a volnou výtvarnou tvorbou. Je spoluzakladatelem architektonické platformy SUPERLABOR a vede Experimentální laboratoř ELA. V roce 2019 založil studio BiotectArchitects a v roce 2020 studio URAN.

Aleš Svoboda

Výtvarník a multimediálním umělec, kritik a teoretik umění, vysokoškolský pedagog působící jako vedoucí kreativního modulu na Fakultě humanitních studií Univerzity Karlovy v Praze. Studoval na Pedagogické fakultě UK v Praze u docenta Zdeňka Sýkory. Aleš Svoboda se ve své vlastní umělecké tvorbě zabývá většinou obrazovými a grafickými návrhy a díly v souvislostech teoretického výzkumu možnosti využití interdisciplinárních vztahů vědy a umění.

Jiří Uran Vítek

Architect and civil engineer working as architect-designer in his own architectural studio as well as other studios. In 2017–2022 he taught at the Faculty of Architecture, Brno University of Technology. He studied at the Faculty of Architecture at VUT in Brno, Die Angewandte in Vienna, the Zahah Hadid studio (2012–2015) and the Rani Rashid studio (2019–2020). He is focused on design and research of digital/parametric architecture and visual artistic creation. He is co-founder of the SUPERLABOR architectural platform and leads the ELA experimental laboratory. He founded the BiotectArchitects studio in 2019 and URAN studio in 2020.

Aleš Svoboda

Visual and multimedia artist, art critic and theorist, university tutor and head of the Creative Module at the Faculty of Humanities, Charles University in Prague. He studied at the Faculty of Education at Charles University in Prague under Associate Professor Zdeněk Sýkora. In his own artistic endeavors and projects, Svoboda predominantly focuses on graphic designs in the context of theoretical research of potential applications of interdisciplinary relationships between science and arts.

NÁZEV — Topologie a poetika prostoru – Svazek II.

AUTOŘI — Michael Arbib, Karel Ježek, Jaroslav Nešetřil, Aleš Pultr, Aleš Svoboda, Filip Šenk,
Michal Vík, Martina Víková, Jiří Vítek, Tomáš Vlček

EDITORŮI — Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

VYDAVATEL — Technická univerzita v Liberci, Studentská 1402/2, Liberec

Schváleno Rektoriátem TUL dne 13. 10. 2022, čj. RE 34/23 (Svazek II.)

Vyšlo v srpnu 2023

Vydání 1.

ISBN — 978-80-7494-665-3, 978-80-7494-663-9 (soubor), 978-80-7494-664-6 (Svazek I.)

Č. PUBLIKACE — 55-034-23 (Svazek II.)

Tato kniha byla vytvořena se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu Éta, projekt Topologie a poetika prostoru TL02000573.

TITLE — Topology and Poetic of Space – Volume II.

AUTHORS — Michael Arbib, Karel Ježek, Jaroslav Nešetřil, Aleš Pultr, Aleš Svoboda, Filip Šenk,
Michal Vík, Martina Víková, Jiří Vítek, Tomáš Vlček

EDITORS — Jaroslav Nešetřil, Tomáš Vlček

PUBLISHER — Technical University of Liberec, Studentská 1402/2, Liberec

Approved by the Rectorate of TUL on 13 October 2022, no. RE 34/23 (Volume II.)

Published in August 2023

1st edition

ISBN — 978-80-7494-665-3, 978-80-7494-663-9 (File), 978-80-7494-664-6 (Volume I.)

PUBLICATION NO. — 55-034-23 (Volume II.)

This book was produced with the governmental support of the Technology Agency of the Czech Republic within the frame of the Éta Programme, Project Topology and Poetic of Space, TL02000573.



FUA TUL

Tento projekt je spolufinancován se státní podporou
Technologické agentury ČR v rámci Programu Éta.

www.tacr.cz

Výzkum užitečný pro společnost.

This project is co-financed with the governmental
support of the Technology Agency of the Czech
Republic within the frame of the Éta Programme.

www.tacr.cz/en

Research useful for society.

The second volume of the book *Topology and Poetics of Space* edited by **Jaroslav Nešetřil**, the Professor of the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague, and **Tomáš Vlček**, the Professor at the Faculty of Art and Architecture of Technical University of Liberec, develops the theme of interactions of scientific and artistic creative thinking inspired by topology. The book introduces interdisciplinary themes of contemporary humanities and scientific knowledge. The description of the origin and action of topological themes provides the mentioned studies with the option of verifying the real relations of many disciplines where topology is successfully applied, but often in metaphorical hints only. The second volume of the book represents topological themes as essential for the tendencies of the cultural turn beginning in the 1960s and continuing in the creative cognition of the present. The book presents new facts acquired when solving major issues from the fields of neuroscience, psychology, philosophy and other fields of humanities studies related to both science and art and its poetics. The book is one of the results of the studies in the environment of the Interdisciplinary Seminar of Topological Studies in the Poetics of Art, Landscape and Architecture, established in 2015 and operating at the Faculty of Art and Architecture of the Technical University of Liberec and the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague. This book was prepared on the basis of a project co-funded with state support from the Technology Agency of the Czech Republic within the Eta Programme.

T A
C R

This project is co-financed with the governmental support of the Technology Agency of the Czech Republic within the frame of the Eta Programme. www.tacr.cz/en
Research useful for society.



ISBN 978-80-7494-665-3 (Svazek II./ Volume II.)

ISBN 978-80-7494-663-9 (Soubor / Set)

ISBN 978-80-7494-664-6 (Svazek I. / Volume I.)