TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Ústav nových technologií a aplikované informatiky

VYBRANÉ ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY Z ELEKTROMAGNETISMU

Ing. Bc. Jiří Primas, Ph.D.

Ing. Bc. Michal Malík, Ph.D.

Recenzent: *Prof. Ing. Václav Kopecký, CSc.*

Vydala Technická univerzita v Liberci v roce 2024.

ISBN 978-80-7494-703-2

Předmluva

Následující text, který se čtenáři dostává do ruky, je soupisem vybraných základních pojmů a vztahů z elektromagnetismu. Tematicky se rozpadá do tří hlavních částí – elektřina, magnetismus a optika. V žádném případě se nejedná o ucelená skripta, nebo dokonce monografii. Zájemce o hlubší studium této problematiky odkazujeme na doporučenou literaturu.

Lze očekávat, že čtenáři jsou především studenti předmětu Elektromagnetismus, který je vyučován na Fakultě mechatroniky, informatiky a mezioborových studií na Technické univerzitě v Liberci, a text jim bude sloužit jako pomůcka při přípravě na zkoušku. Proto byla zvolena takto stručná forma, bez hlubšího odvození vzorců, důkazů, či řešených příkladů, které jsou probírány na přednáškách a cvičeních.

Elektromagnetismus

Elektrické pole je prostor obklopující elektricky nabité těleso (tj. těleso, na kterém je přítomen elektrický náboj), v tomto prostoru se projevuje působení elektrické síly.

Elektrický náboj je fyzikální vlastnost hmoty, která se projevuje tím, že na hmotu s elektrickým nábojem působí v elektromagnetickém poli síla.

Značení: ***Q***, skalární veličina, jednotka: *Coulomb* [C].

Tělesa s nulovým elektrickým nábojem označujeme jako *elektricky neutrální*, tělesa s nenulovým nábojem jako *elektricky nabitá*.

Přítomnost elektrického náboje je nutná pro vznik elektromagnetického pole, stejně jako je přítomnost hmoty nutná pro existenci gravitačního pole.

Elektrický náboj rozlišujeme *kladný* a *záporný*. Souhlasné náboje se odpuzují, opačné se přitahují (využití např. v elektroskopu).

Pokud se na tělese nachází více elektrických nábojů, pak celkový elektrický náboj Q_c tělesa je roven algebraickému součtu elektrických nábojů jednotlivých částí Q_i, tj.:

$$Q_c = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Zákon zachování elektrického náboje – celkové množství náboje v elektricky izolované soustavě je konstantní (elektrický náboj nelze vytvořit ani zničit, lze ho pouze přemístit).

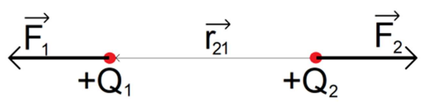
Experimenty (Faraday, Milikan) ukázaly, že celkový elektrický náboj je vždy celočíselným násobkem nejmenšího možného tzv. elementárního náboje Q_e (Q_e = 1,602·10^{-19} C), elektrický náboj je tedy *kvantován*.

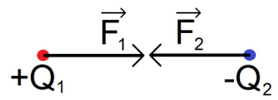
Velikost elektrického náboje je invariantní při transformacích vztažné soustavy, tj. velikost elektrického náboje se při jeho pohybu nemění (na rozdíl např. od hmotnosti).

Mezi bodovými a stacionárními náboji působí **elektrická síla** popsána **Coulombovým zákonem**:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_R} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|}$$

kde ε_0 je permitivita vakua ($\varepsilon_0 \doteq 8{,}85\cdot10^{-12}$ F·m^{-1}), ε_R je relativní permitivita prostředí, Q_1 a Q_2 je velikost jednotlivých nábojů a vektor $\vec{r}_{21}$ reprezentuje orientovanou vzdálenost mezi nimi.





Ze zákona akce a reakce plyne, že síla F_2 je stejně velká jako síla F_1, ale opačně orientovaná.

Síla má směr přímky, která spojuje oba náboje. Je zde zřejmá analogie s Newtonovým gravitačním zákonem:

$$\left|\vec{F}_g\right| = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Ale elektrické interakce jsou více než 10^{20} krát silnější než gravitační.

Je-li nábojů více než dva, k výpočtům silové interakce mezi nimi použijeme **princip superpozice** – síla působící na jakýkoliv náboj je vektorovým součtem Coulombových sil pocházejících od všech ostatních nábojů:

$$\vec{F}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Prostředníkem interakce mezi nabitými tělesy je *elektrické pole*. Důkazem jeho existence je síla, která působí na malý kladný testovací náboj v daném místě elektrického pole. Podílem této síly a velkosti náboje je definována **elektrická intenzita** (též **intenzita elektrického pole**) $\vec{E}(\vec{r})$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q}$$

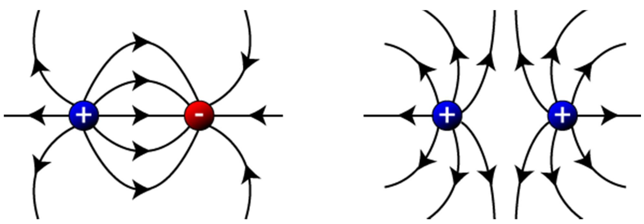
Základní jednotkou je [N/C], ale v technické praxi se používá téměř výhradně [V/m].

Elektrická intenzita je jednoznačná funkce, která elektrické pole popisuje. Je-li pole vybuzeno více náboji, tak opět platí princip superpozice, v tomto případě:

$$\vec{E}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Graficky můžeme elektrické pole znázornit pomocí *elektrických siločar* – jsou to myšlené orientované křivky s následujícími vlastnostmi:

- každým bodem prostoru prochází právě jedna siločára (siločáry se neprotínají)
- orientovaná tečna každého bodu siločáry je určena směrem intenzity elektrického pole
- siločáry vycházejí z kladných a vstupují do záporných nábojů (případně mohou začínat a končit v nekonečnu)
- hustota siločar je úměrná velikosti intenzity elektrického pole.



Dále definujeme **tok elektrické intenzity** Φ_E, který popisuje množství elektrické intenzity, která proteče kolmo ploškou, která je popsaná svým vnějším normálovým vektorem $d\vec{s}$ a je tak malá, aby se intenzita na ní dala považovat za konstantní.

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V některých složitějších případech není možné použít k výpočtu silových interakcí Coulombův zákon, ale je nutné použít jeho obecnější tvar – **Gaussovu větu z elektrostatiky**, která říká, že tok elektrické intenzity skrz libovolnou uzavřenou plochu je roven celkovému náboji, který plocha obepíná, dělenému permitivitou vakua:

$$\Phi_E = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$$

Integrální forma:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Diferenciální forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

kde ρ je *hustota náboje*, kterou můžeme obecně definovat:

- na jednotku objemu (ve 3D): $dQ = \rho \cdot dV$

- na jednotku plochy (ve 2D): $dQ = \sigma \cdot dS$

- na jednotku délky (v 1D): $dQ = \tau \cdot dl$

Na částici s nábojem Q působí v elektrickém poli popsaném intenzitou $\vec{E}$ **elektrická síla** $\vec{F}_E$:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

kde Q je náboj částice a $\vec{E}$ je intenzita *vnějšího* pole (protože nabitá částice není ovlivněna vlastním elektrickým polem). Jestliže je náboj částice kladný, elektrická síla má směr intenzity, je-li záporný, má opačný směr.

Pro výpočet pohybu bodového náboje použijeme *pohybovou rovnici*:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

Působení elektrické síly se prakticky využívá např. v elektrostatických odlučovačích prachu, nebo u inkoustových tiskáren.

Elektrický potenciál je skalární fyzikální veličina, která vyjadřuje potenciální energii jednotkového elektrického náboje v konstantním elektrickém poli. Je to množství práce potřebné pro přenesení jednotkového náboje z bodu s nulovým potenciálem (tzv. vztažného bodu) do místa jiného.

Za místo s nulovým potenciálem uvažujeme v teoretických úlohách bod v nekonečnu, nebo povrch Země.

Značení: $\boldsymbol{\varphi}$, skalární veličina, jednotka: *Volt* [V].

Nejobecnější je definice potenciálu objemově rozloženého náboje s hustotou náboje ρ:

$$\varphi(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_R}\int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}dV$$

kde $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ jsou polohové vektory dvou bodů v prostoru.

Výrazně jednodušší formu vidíme např. v případě Coulombova potenciálu bodového náboje, který popisuje potenciál φ ve vzdálenosti r od bodového náboje (v tomto případě se za vztažný bod považuje potenciál v nekonečnu):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_R}\frac{Q}{r}$$

Diferenciální definice potenciálu:

$$\vec{E} = -grad(\varphi)$$

Pokud tento vztah dosadíme do *Gaussova zákona z elektrostatiky*, dostaneme:

$$div\vec{E} = -div[grad(\varphi)] = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Tento výsledný vztah nazýváme ***Poissonovou rovnicí***.

Ve speciálním případě, kdy se $\rho = 0$, pak i $\Delta\varphi = 0$. Tento výraz nazýváme ***Laplaceovou rovnicí***. Jedná se o eliptickou parciálně diferenciální rovnici, a jejím řešením je vždy harmonická funkce.

Elektrické napětí je rozdíl potenciálů mezi dvěma body:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Značení: ***U***, skalární veličina, jednotka: *Volt* [V].

Elektrická kapacita vyjadřuje schopnost vodivých těles shromažďovat elektrický náboj.

Značení: ***C***, skalární veličina, jednotka: *Farad* [F].

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

kde φ reprezentuje hodnotu elektrického potenciálu na povrchu daného tělesa.

Je tedy zřejmé, že se jedná o vlastnost každého vodiče, v praxi se využívá u technické součástky – kondenzátoru. Zde místo potenciálu na povrchu tělesa uvažujeme rozdíl potenciálů (tedy elektrické napětí) mezi elektrodami:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}$$

Kondenzátorem obecně rozumíme každou soustavu vzájemně izolovaných vodivých těles (pozor na v technické praxi významné parazitní kapacity). V elektrotechnice se ale jedná o dvojpólovou součástku s přesně definovanou kapacitou. Nejčastěji je řešen jako modifikace deskového kondenzátoru, jehož kapacita *C* je určena:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_R \frac{S}{d}$$

kde ε_0 a ε_R definují elektrické vlastnosti dielektrika mezi deskami kondenzátoru, *S* je plocha vzájemného překryvu desek a *d* je vzdálenost mezi nimi.

Dále můžeme definovat **energii nabitého kondenzátoru** W_E [J]:

$$W_E = \frac{1}{2} C U^2$$

Vzhledem k tomu, že desky kondenzátoru jsou nabity každá na opačný náboj, tak mezi nimi musí působit **vzájemná přitažlivá síla** $\vec{F}_K$:

$$|\vec{F}_K| = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_R \frac{S \cdot U^2}{d^2} = \frac{W}{d}$$

Magnetické pole je fyzikální pole, jehož zdrojem je pohybující se elektrický náboj (tj. *elektrický proud I*). Lze ho pozorovat v okolí vodičů, kterými prochází elektrický proud (zde je zdrojem magnetického pole *volný elektrický proud*) a také v okolí permanentních magnetů (zde jsou zdrojem *vázané elektrické proudy*). Jedná se o vektorové pole, které charakterizuje veličina **magnetická indukce.** Ta vyjadřuje silové účinky magnetického pole na pohybující se nabitou částici.

Značení: $\vec{B}$, vektorová veličina, jednotka: *Tesla* [T].

Tyto silové účinky popisuje *Lorentzova síla* $\vec{F}_L$:

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Za zjednodušujícího předpokladu, kdy $\vec{E} = 0$, můžeme ze vzorce odvodit sílu $\vec{F}_M$, která působí na vodič protékaný proudem *I* v externím magnetickém poli, tzv. *Ampérův zákon*:

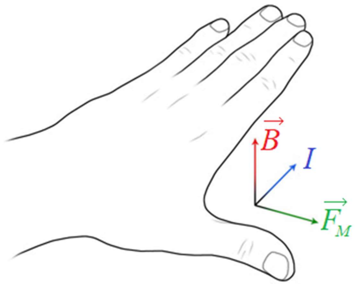
$$\vec{F}_M = I \cdot \int_k d\vec{l} \times \vec{B}$$

kde integrace probíhá přes celou parametrickou křivku *k*, která odpovídá tvaru vodiče a $d\vec{l}$ je orientovaný element délky vodiče.

Vzorec lze dále zjednodušit pro homogenní magnetické pole a pro přímý (rovný) úsek vodiče:

$$\vec{F}_M = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Směr, kterým magnetická síla působí, určíme pomocí *Flemingova pravidla levé ruky*:



Pokud prsty ukazují směr protékajícího proudu a indukční čáry vnějšího magnetického pole vstupují do dlaně, pak palec ukazuje směr síly, kterou vnější magnetické pole působí na vodič s proudem.

K popisu magnetického pole v technické praxi používáme *magnetické indukční čáry*. Jedná se o uzavřené, neprotínající se orientované křivky, jejichž tečna v daném bodě má směr vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ a jejichž hustota je úměrná jeho velikosti. Je zde zřejmá analogie s elektrickými siločarami.

Magnetickou indukci vyvolanou pohybujícím se nábojem, nebo proudem protékajícím vodičem charakterizuje *Biot-Savartův zákon*:

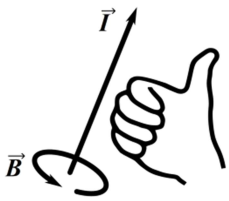
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_k \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r'}}{\left|\vec{r'}\right|^3}$$

kde μ_0 je permeabilita vakua (μ_0 = 4π.10^{-7} N.A^{-2}), *I* je proud tekoucí vodičem, $d\vec{l}$ je element délky vodiče a $\vec{r'}$ je vektor od elementu vodiče do bodu, kde pole zjišťujeme ($\vec{r'} = \vec{r} - \vec{l}$).

Ve zjednodušeném případě lze uvažovat magnetickou indukci kolem velmi dlouhého přímého vodiče:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$$

kde *d* je vzdálenost od vodiče, kde nás magnetická indukce zajímá. Směr magnetické indukce je závislý na orientaci proudu, a lze ho určit podle *Ampérova pravidla pravé ruky*.



V případě, kdy neuvažujeme pouze jeden osamocený vodič, je situace komplikovanější. Máme-li dva přímé, nekonečné, tenké a paralelní vodiče ve vzdálenosti *r* s protékajícím proudem, lze jejich vzájemnou silovou interakci určit jako sílu na jednotku délky:

$$\frac{\left|\vec{F}\right|}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r}$$

Magnetické vlastnosti látek

Diamagnetika jsou látky, jejichž částice mají nulový magnetický moment. Diamagnetika jsou lehce vytlačována ven z magnetického pole. Relativní permeabilita diamagnetik $\mu_R < 1$.

Paramagnetika jsou látky, jejichž magnetický moment je nenulový, ale momenty jsou orientovány náhodně, takže výsledný magnetický moment je nulový. Paramagnetika jsou lehce vtahována do magnetického pole. Relativní permeabilita paramagnetik $\mu_R > 1$.

Feromagnetika jsou látky obsahující tzv. *domény*, v nichž jsou magnetické dipóly orientovány shodně. Bez vnějšího magnetického pole jsou magnetické dipóly jednotlivých domén orientovány náhodně, ale při vložení do externího magnetického pole se domény orientují a srovnají dle vnějšího pole. Po vypnutí externího pole zůstávají tyto látky magnetické buď dočasně (*magneticky měkká feromagnetika*), nebo trvale (*magneticky tvrdá feromagnetika*). Relativní permeabilita feromagnetik $\mu_R \gg 1$. Feromagnetika jsou intenzivně vtahována do magnetického pole.

Magnetický indukční tok vyjadřuje celkový tok magnetické indukce $\vec{B}$ skrz danou jednoduše souvislou plochu (pokud zobrazujeme $\vec{B}$ pomocí indukčních čar, pak je magnetický indukční tok mírou celkového počtu indukčních čar procházejících danou plochou).

Značení: Φ, skalární veličina, jednotka: *Weber* [Wb].

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

kde plošný integrál je určen elementem orientované plochy $d\vec{S}$.

Je-li $\vec{B}$ homogenní a plocha *S* je rovinná, pak můžeme využít zjednodušenou formulaci:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

kde α je úhel, který svírá normálový vektor plochy *S* s vektorem magnetické indukce $\vec{B}$.

Indukčnost je schopnost daného geometrického rozmístění elektricky vodivých těles protékaných elektrickým proudem vytvářet ve svém okolí magnetické pole.

Značení: *L*, skalární veličina, jednotka: *Henry* [H].

Indukčnost tenké vodivé smyčky se rovná podílu magnetického indukčního toku, který prochází smyčkou, a elektrického proudu, který jej vyvolal, tj.:

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Cívka, která je tvořena *N* závity, má výslednou indukčnost *N*-násobnou.

Je-li indukčnost cívky konstantní (většina případů v reálné praxi), pak platí následující vzorce pro velikost napětí U_i indukovaného na cívce:

$$U_i = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

kde záporné znaménko ve vzorci je vyjádřením *Lenzova zákona* – indukovaný elektrický proud v uzavřeném obvodu má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického indukčního toku, která je jeho příčinou.

Jedním z praktických důsledků je existence tzv. *Foucaultových vířivých proudů*. Jedná se o proudy, které vznikají v elektrickém vodiči, pokud v jeho okolí dochází ke změně magnetického indukčního toku s časem.

Dále definujeme **energii magnetického pole** W_M [J] (za zjednodušujícího předpokladu magneticky lineárního prostředí):

$$W_M = \frac{1}{2} L I^2$$

Speciální typ cívky s mnoha závity, která má výrazně větší délku, než průměr, nazýváme *solenoid*. Díky tomu můžeme zanedbat okrajové jevy a dostáváme vzorec pro **indukčnost solenoidu**:

$$L = \mu_0 \mu_R \frac{N^2 S}{l}$$

kde *N* je počet závitů, *S* je plocha průřezu solenoidu a *l* je jeho délka.

Spojením (ať už paralelním, nebo sériovým) cívky s indukčností *L* a kondenzátoru s kapacitou *C* získáme tzv. LC obvod, nebo rezonanční obvod. Jeho **rezonanční frekvence** f_R [Hz] je popsána *Thompsonovým vztahem*:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Optika

Paprsková optika

Postuláty paprskové optiky:

1. Světlo se skrz *optické prostředí* šíří ve formě paprsků, ty jsou emitovány světelnými zdroji a mohou být pozorovány, když dosáhnou optického detektoru (oko, CCD čip, atd.).

2. Optické prostředí charakterizujeme **indexem lomu** *n*:

$$n = \frac{c_0}{c}$$

kde c_0 je rychlost světla ve vakuu a *c* je rychlost světla v daném optickém prostředí. Z toho plyne, že index lomu je vždy větší nebo maximálně roven jedné (tj. $n \geq 1$).

V obecném *nehomogenním prostředí* platí $n(\vec{r})$, kde $\vec{r}$ = (*x, y, z*) je polohový vektor. Pak můžeme definovat **délku optické dráhy** *l* jako vzdálenost, kterou světlo urazí ve vakuu za stejný čas jako v daném látkovém prostředí s indexem lomu *n*, pomocí křivkového integrálu po dráze *s*:

$$l = \int_A^B n(\vec{r})ds$$

kde *ds* je element dané trajektorie.

V homogenním optickém prostředí, kde *n* je konstantní, je délka optické dráhy *l* rovna prostému součinu $n \cdot s$.

3. *Fermatův princip* – paprsky šířící se mezi dvěma body A a B sledují takovou trajektorii, aby délka optické dráhy mezi těmito dvěma body dosahovala extremální hodnoty vzhledem k sousedním drahám. Musí tedy platit:

$$\delta \int_A^B n(\vec{r})ds = 0$$

Extrémem může být minimum, maximum, nebo inflexní bod. Ve většině praktických případů se ale jedná o minimum, mluvíme potom o *principu nejkratšího času* – světelné paprsky se šíří podél dráhy s nejkratší dobou šíření.

V homogenním optickém prostředí přechází Fermatův princip v tzv. *Heronův princip* – dráha s minimálním časem požadovaná Fermatovým principem je též dráhou s minimální vzdáleností – tj. přímka, z toho plyne – *paprsky se šíří přímočaře*.

Paprsková optika umožňuje zkoumat základní světelné jevy, např.:

Odraz, kde úhel dopadu se rovná úhlu odrazu: $\alpha = \alpha'$ a odražený paprsek leží v rovině dopadu.

Lom na rozhraní dvou optických prostředí, kde první prostředí má index lomu n_1 a druhé n_2, je určen tzv. *Snellovým zákonem*:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

kde n_{21} je relativní index lomu na rozhraní dvou prostředí.

Zatímco všechny tyto vztahy platí v prostředí bez ztrát, pro ztrátové prostředí je nutné definovat *komplexní index lomu*:

$$\hat{n} = n + i.\beta$$

kde koeficient β vyjadřuje množství ztrát absorpcí v daném prostředí.

Totální reflexe je jev, který spojuje lom i odraz světla. V situaci, kdy na rozhraní dvou prostředí úhel $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, pak $\sin\alpha_2 = 1$ a lze napsat:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_m = \frac{n_2}{n_1}$$

Úhel α_m pak označuje mezní úhel, při kterém (pro daný relativní index lomu) ještě dojde k lomu. Překročíme-li tento mezní úhel, dojde k totální reflexi, při které se paprsek odrazí zpět do prostředí 1 a do prostředí 2 se vůbec nedostane.

Vlnová optika

Paprsková optika byla mezním případem vlnové optiky, uvažujeme-li vlnovou délku λ nekonečně malou, tj. $\lambda \to 0$. Toto zjednodušení bylo adekvátní pro případy, kdy se světlo šířilo mezi objekty, jejichž velikost byla mnohem větší než vlnová délka světla.

Ve vlnové optice je světlo popsáno skalární vlnovou funkcí *u*, která splňuje vlnovou rovnici.

Postuláty vlnové optiky:

1. Světlo se šíří ve formě vln, které ve vakuu postupují rychlostí c_0.

2. *Homogenní prostředí* je charakterizováno indexem lomu *n*, $n \geq 1$. Rychlost šíření světla pro dané prostředí je potom definováno:

$$c = \frac{c_0}{n}$$

3. Optická vlna je popsána reálnou funkcí polohy $\vec{r} = (x, y, z)$ a času *t*. Tato reálná funkce se značí $u(\vec{r}, t)$, nazývá se *vlnová funkce* a vyhovuje *vlnové rovnici*:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = 0$$

Každá funkce, která této rovnici vyhovuje, popisuje možnou optickou vlnu. Protože je vlnová rovnice lineární, platí pro ni *princip superpozice*. To znamená, že pokud $u_1(\vec{r}, t)$ a $u_2(\vec{r}, t)$ jsou optické vlny (splňují vlnovou rovnici), pak také funkce $u(\vec{r}, t)$, definovaná jako $u(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r}_1, t) + u_2(\vec{r}_2, t)$, také představuje optickou vlnu.

Fyzikální smysl vlnové funkce $u(\vec{r}, t)$ nebyl definován, ale **optická intenzita *I*** daná vztahem:

$$I(\vec{r}, t) = 2 \cdot \langle u^2(\vec{r}, t) \rangle$$

vyjadřuje její souvislost s fyzikálně měřitelnou veličinou I [$W \cdot m^{-2}$]. Optická intenzita je tedy optický výkon na jednotku plochy.

Operací $\langle f \rangle$ rozumíme *středování* funkce přes čas, který je mnohem delší než perioda optické vlny, ale mnohem kratší než všechny další uvažované časy:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt$$

Monochromatická vlna je vyjádřena vlnovou funkcí s časovou harmonickou závislostí:

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cdot \cos[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})]$$

kde $a(\vec{r})$ je amplituda vlnění, ν je frekvence a $\varphi(\vec{r})$ je jeho fáze.

Pro zjednodušení některých výpočtů je výhodné zavést *komplexní formalismus*, kde reálnou vlnovou funkci $u(\vec{r}, t)$ vyjádříme pomocí *komplexní vlnové funkce* $\widehat{U}(\vec{r}, t)$:

$$\widehat{U}(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cdot e^{i\varphi(\vec{r})} \cdot e^{i2\pi\nu t}$$

takže platí:

$$u(\vec{r}, t) = Re\{\widehat{U}(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{2}\left[\widehat{U}(\vec{r}, t) + \widehat{U}^*(\vec{r}, t)\right]$$

Stejně jako reálná vlnová funkce $u(\vec{r}, t)$ i komplexní vlnová funkce $\widehat{U}(\vec{r}, t)$ musí splňovat vlnovou rovnici:

$$\Delta\widehat{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\widehat{U}}{\delta t^2} = 0$$

Komplexní vlnová funkce může být také zapsána takto:

$$\widehat{U}(\vec{r}, t) = \widehat{U}(\vec{r}) \cdot e^{i2\pi\nu t}$$

kde $\widehat{U}(\vec{r})$ je komplexní amplituda, která nezávisí na čase *t*.

Dosazením předchozího vyjádření do vlnové rovnice dostaneme *Helmholtzovu rovnici*, která je časově nezávislým zápisem vlnové rovnice:

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot \widehat{U}(\vec{r}) = 0$$

kde k je vlnové číslo, definované jako: $k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$.

Nejjednodušším řešením Helmholtzovy rovnice pro homogenní prostředí je rovinná nebo sférická vlna.

Rovinná vlna je definována:

$$\widehat{U}(\vec{r}) = \hat{A} \cdot e^{-i \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

kde $\hat{A}$ je komplexní obálka a $\vec{k}$ je vlnový vektor, pro který musí platit, že velikost vlnového vektoru se musí rovnat vlnovému číslu, tj. $|\vec{k}| = k$.

Vlnoplochy jsou zde tedy rovnoběžné roviny kolmé na vlnový vektor $\vec{k}$, který zároveň určuje směr šíření vlnění. Vlnoplochy jsou od sebe vzdáleny o vlnovou délku $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{\nu}$. Vlnová funkce je tedy periodická v čase s periodou $\frac{1}{\nu}$ a periodická v prostoru s periodou λ.

Sférická vlna je definována:

$$\hat{U}(\vec{r}) = \frac{\hat{A}}{r} \cdot e^{-i \cdot k \cdot r}$$

kde *r* je zde pouze vzdálenost od počátku.

Vlnoplochy jsou v tomto případě kulové plochy vzdálené radiálně o vlnovou délku λ a postupují fázovou rychlostí *c*.

Mějme sférickou vlnu vznikající v počátku souřadné soustavy a zkoumejme ji v bodech dostatečně blízko ose *z*, ale dostatečně daleko od počátku, takže platí $\sqrt{x^2 + y^2} \ll z$, pak sférickou vlnu můžeme aproximovat vlnou parabolickou:

$$\hat{U}(\vec{r}) \approx \frac{\hat{A}}{z} \cdot e^{-i \cdot k \cdot z} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{x^2 + y^2}{2z}}$$

a tomuto postupu říkáme *Fresnelovo přiblížení*.

Interference

Za dodržení následujících podmínek dojde při interakci dvou a více vln k jejich *interferenci*:

1. Zdroje vlnění musí být *koherentní* (koherentní vlnění je vlnění o stejné frekvenci a fázi).
2. Vlnění musí být *monochromatické* (tj. musí mít stejnou vlnovou délku).
3. Musí platit *princip superpozice*.
4. Vlny musí mít *stejnou polarizaci*.

Tyto podmínky zároveň vysvětlují, proč za běžných podmínek není interference pozorovatelná (např. pro sluneční světlo).

Výsledná intenzita vlny vzniklé při interferenci není prostým součtem jednotlivých intenzit interferujících vln. Mějme dvě monochromatické vlny s komplexními amplitudami $\hat{U}_1(\vec{r})$ a $\hat{U}_2(\vec{r})$ a ty spolu interferují, výsledná komplexní amplituda je potom dána jako prostý algebraický součet: $\hat{U}(\vec{r}) = \hat{U}_1(\vec{r}) + \hat{U}_2(\vec{r})$. Užitím vztahu pro intenzitu a dosazením dostáváme: $I = |\hat{U}(\vec{r})|^2 = |\hat{U}_1(\vec{r}) + \hat{U}_2(\vec{r})|^2$. Užitím vyjádření komplexní amplitudy $\hat{U}_1(\vec{r}) = \sqrt{I_1} \cdot e^{i\varphi_1}$ a $\hat{U}_2(\vec{r}) = \sqrt{I_2} \cdot e^{i\varphi_2}$ a dosazením dostáváme *interferenční rovnici*:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot cos\,\varphi$$

kde φ je fázový rozdíl dvou interferujících vln ($\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$). Je zřejmé, že pokud $\varphi = 0$, tak funkce nabývá maxima a hovoříme o tzv. *konstruktivní interferenci*, naopak pro $\varphi = \pi$ nabývá výsledná intenzita minima a jedná se o tzv. *destruktivní interferenci*.

Důležité praktické využití jevu interference je v přístrojích zvaných *interferometry*. Ty používají dělič světla, který štěpí vlnu na dvě se shodnými vlastnostmi (frekvence a fáze). Rozdělené vlny urazí různé optické dráhy a pomocí zrcadel se poté opět spojí a vyhodnocuje se výsledná intenzita jejich superpozice.

Mějme dvě rovinné vlny, kde obě mají intenzitu I_0 a obě se šíří ve směru osy *z*. Jedna vlna je vůči druhé posunuta o vzdálenost *d*, takže platí $\widehat{U}_1 = \sqrt{I_0} \cdot e^{-ikz}$ a $\widehat{U}_2 = \sqrt{I_0} \cdot e^{-ik(z-d)}$. Dosazením do rovnice interference pak dostaneme výslednou intenzitu *I* interferujících vln:

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right)\right]$$

Je zřejmé, že výsledná intenzita je velmi citlivá na posunutí *d* v řádech srovnatelných s vlnovou délkou λ použitého světla. Z toho plyne, že je možné detekovat i nepatrné změny v délce optické dráhy.

Nyní se dostáváme ke kompletnímu popisu elektromagnetického pole pomocí *Maxwellových rovnic*, které budou základním postulátem elektromagnetické optiky. Nejprve si ale ještě definujeme další tři důležité veličiny:

Proudová hustota je vektorová fyzikální veličina, která popisuje lokální rozložení elektrického proudu.

Značení: $\vec{j}$, vektorová veličina, jednotka: [$\mathrm{A \cdot m^{-2}}$].

Proudová hustota $\vec{j}$ je definována jako součin hustoty náboje ρ a rychlosti pohybu nábojů $\vec{v}$:

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

Elektrická indukce (pozor, jedná se o veličinu, nikoliv o děj elektromagnetické indukce) je vektorová fyzikální veličina, která charakterizuje elektrické pole bez započtení vlivu elektrických nábojů vázaných v dielektriku.

Značení: $\vec{D}$, vektorová veličina, jednotka: [$\mathrm{C \cdot m^{-2}}$].

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_R \vec{E} + \vec{P}$$

Vektor $\vec{P}$ je vektor elektrické polarizace. Ve většině případů budeme považovat $\vec{P} = 0$.

Intenzita magnetického pole je vektorová fyzikální veličina, která popisuje silové účinky magnetického pole, ale pouze z hlediska „vnějších" zdrojů, tj. volných elektrických proudů.

Značení: $\vec{H}$, vektorová veličina, jednotka: [$\mathrm{A \cdot m^{-1}}$].

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_R \vec{H} + \vec{J}$$

Vektor $\vec{J}$ je vektor magnetické polarizace. Ve většině případů budeme považovat $\vec{J} = 0$.

Maxwellovy rovnice jsou kompletním klasickým popisem elektromagnetického pole, zde si je uvedeme v nejjednodušším možném tvaru - pro vakuum, tj. $\mu_R = 1$ a $\varepsilon_R = 1$.

1. Maxwellova rovnice říká, že (rotující) magnetické pole je vyvolané procházejícím proudem a změnou elektrického pole za čas:

$$rot\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

2. Maxwellova rovnice říká, že napětí indukované v uzavřeném obvodu závisí na změně magnetické indukce za čas:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Maxwellova rovnice říká, že zdrojem elektrického pole jsou prostorově rozložené elektrické náboje:

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4. Maxwellova rovnice konstatuje, že neexistují magnetické monopóly – tedy „zdrojové částice“ magnetického pole:

$$div\,\vec{B} = 0$$

Elektromagnetická optika

Protože pomocí vlnové optiky není možné vysvětlit jevy jako polarizace nebo dvojlom v anizotropním prostředí, musíme přejít k teorii, kde na rozdíl od vlnové optiky už světlo nebude popsané pouze *skalární vlnovou funkcí* ale *vektorovým polem*.

Postuláty elektromagnetické optiky:

1. Světlo, jako elektromagnetické vlnění, je popsáno Maxwellovými rovnicemi. Ty můžeme zapsat pro látkové prostředí bez volných nábojů následovně:

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{D} = 0$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_R \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_R \vec{H}$$

Pokud přidáme podmínku, že prostředím je vakuum, lze upravit poslední dvě rovnice takto:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

2. Aby $\vec{E}$ a $\vec{H}$ splňovaly Maxwellovy rovnice, každá z jejich složek musí vyhovovat vlnové rovnici:

$$\text{pro } \vec{E}: \quad \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta t^2} = 0$$

$$\text{pro } \vec{H}: \quad \Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\vec{H}}{\delta t^2} = 0$$

kde rychlost světla *c* je definována:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_R \mu_0 \mu_R}}$$

Pro vakuum:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Index lomu z vlnové optiky je nyní možné definovat jako: $n = \sqrt{\varepsilon_R}$

3. Stále platí *princip superpozice*.

Dielektrická prostředí

V *lineárním prostředí* je vztah mezi intenzitou elektrického pole $\vec{E}$ a polarizací $\vec{P}$ lineární:

$$\vec{P} = k.\vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

V *nedisperzním prostředí* permitivita ε nezávisí na frekvenci ν, takže vektor polarizace $\vec{P}$ v čase *t* závisí na intenzitě elektrického pole $\vec{E}$ pouze v čase *t*.

V *izotropním prostředí* je vektor polarizace $\vec{P}$ rovnoběžný s vektorem intenzity elektrického pole $\vec{E}$ ($\vec{P} \| \vec{E}$), a prostředí se tedy jeví ve všech směrech stejné.

V *homogenním prostředí* je permitivita konstantní v celém objemu: $\varepsilon = konst.$.

Pokud je *prostředí nehomogenní*, jeho permitivita není konstantní v celém objemu, a je tedy závislá na poloze: $\varepsilon = \varepsilon(r)$.

Prostředí můžeme považovat za *lokálně homogenní*, pokud je permitivita ε konstantní na okolí o velikosti odpovídající vlnové délce λ.

Jako příklad uveďme nejjednodušší prostředí – vakuum, které je lineární, nedisperzní, izotropní a homogenní.

Helmholtzova rovnice v elektromagnetické optice – protože složky vektorů $\vec{E}$ a $\vec{H}$ splňují vlnovou rovnici, tak musí vyhovovat (stejně jako ve vlnové optice) také Helmholtzově rovnici:

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot U = 0$$

kde skalární funkce U reprezentuje vždy jednu ze šesti složek vektorů $\vec{E}$ a $\vec{H}$ a vlnové číslo k je pro vakuum dáno:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

Pro **monochromatickou elektromagnetickou vlnu** platí, že všechny složky elektrického i magnetického pole jsou harmonickými funkcemi času:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\{\hat{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = Re\{\hat{H}(\vec{r}) \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\}$$

kde $\hat{E}(\vec{r})$ a $\hat{H}(\vec{r})$ jsou komplexní amplitudy elektrického a magnetického pole.

Poyntingův vektor udává plošnou hustotu toku výkonu, jeho směr a orientace udávají směr a orientaci toku výkonu.

Značení: $\vec{S}$, vektorová veličina, jednotka: [W·m^{-2}].

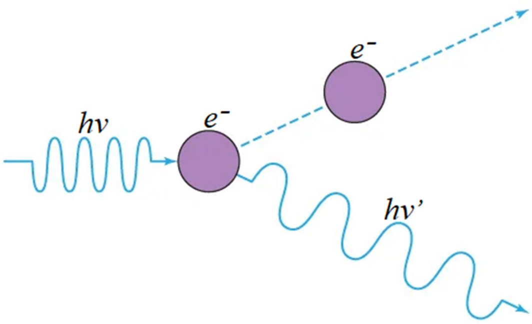
$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$$

Nyní můžeme definovat optickou intenzitu I jako časovou střední hodnotu *komplexního Poyntingova vektoru* $\hat{S}$:

$$I = \langle\hat{S}\rangle = \frac{1}{4}\left(\hat{E} \times \hat{H}^* + \hat{E}^* \times \hat{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{S} + \hat{S}^*\right) = Re\{\hat{S}\}$$

Interakce záření s hmotou

1. *Comptonův jev* – interakce fotonu s volným nebo slabě vázaným elektronem – část energie fotonu se dokonale nepružnou srážkou předá elektronu ve formě hybnosti, a tím dojde ke změně vlnové délky záření.

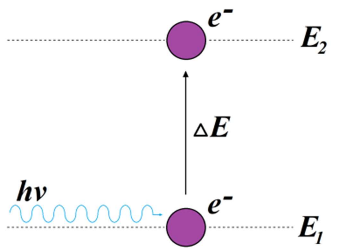


2. *Fotoelektrický jev* – emise původně vázaného elektronu z hmoty vlivem absorpce záření, při které elektron získá dostatečnou energii, aby mohl opustit atom.

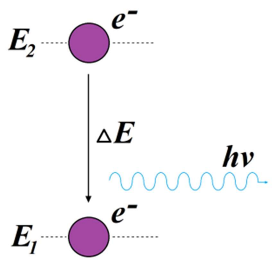
3. *Vznik párů* – při průletu fotonu o dostatečné energii v dosahu Coulombovského působení jádra atomu je energie fotonu využita na vznik páru elektron – pozitron: $h\nu \rightarrow e^- + e^+$ a zbylá energie se změní na kinetickou energii jádra.

4. *Excitace elektronu* – fyzikální jev, při kterém dochází k přechodu energetického stavu vázaného elektronu na vyšší energetickou hladinu. Tj. ze základního stavu E_1 do stavu excitovaného E_2. V tomto

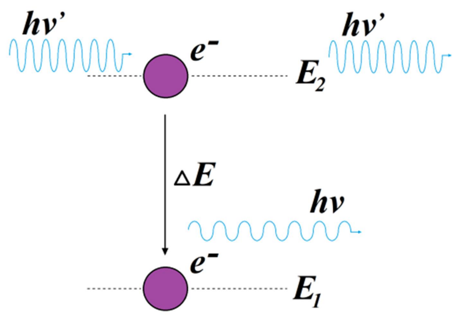
případě je změna vyvolána fotonem, jehož energie se spotřebovala na přechod elektronu mezi energetickými hladinami.



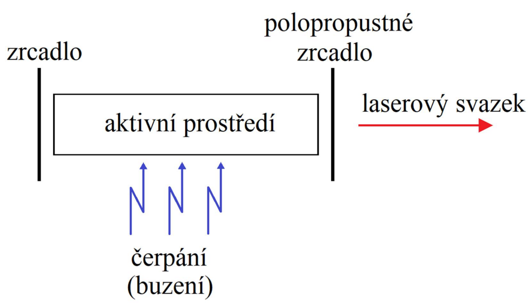
5. *Spontánní emise* – inverzní jev k excitaci, po určité době, která je charakteristická pro daný atom, dojde k spontánnímu návratu excitovaného elektronu do základního stavu a k vyzáření energie ve formě fotonu s vlnovou délkou, která odpovídá ΔE.



6. *Stimulovaná emise* – fyzikální proces, kdy foton vyvolá přechod elektronu z excitovaného stavu do stavu základního. Při tomto přechodu dojde k emisi fotonu, jehož energie odpovídá rozdílu energií mezi energetickými hladinami.



Laser – je optický oscilátor, který generuje záření pomocí stimulované emise fotonů.



Naprostá většina elektronů v atomech aktivního prostředí je za běžných podmínek v základním stavu. Dodáním energie do aktivního prostředí (čerpáním/buzením) dojde k tzv. *inverzi populace* – tj. stavu, kdy většina elektronů je naopak ve stavu excitovaném. Nyní dojde v aktivním prostředí k stimulované emisi fotonů (vyvolané ať už externím fotonem, nebo fotonem vzniklým spontánní emisí v některém z excitovaných atomů). Díky tomu, že zrcadla tvoří optický rezonátor, je energie naakumulovaná v aktivním prostředí vyzářena ve formě laserového paprsku.

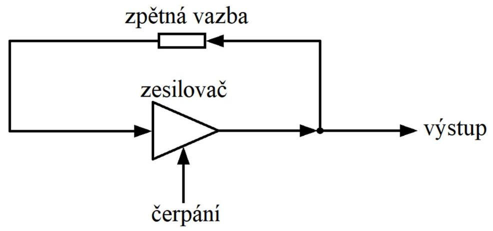
Důležité vlastnosti laserového paprsku:

1. Paprsek je *kolimovaný* – nerozbíhá se, tj. velká energie je soustředěna na malé ploše.

2. Paprsek je *monochromatický* – fotony generované laserem mají stejnou frekvenci (a tedy i vlnovou délku).

3. Paprsek je *koherentní* – všechny laserem generované fotony jsou ve fázi.

Na laser se můžeme podívat také jako na *optický oscilátor*, který se skládá z rezonančního optického zesilovače, jehož výstupní signál se vrací zpětnou vazbou sfázovaný zpět na vstup.



Pokud na vstupu není žádný signál, tak není ani na výstupu, ale sebemenší šum (který je vždy přítomen) iniciuje vznik oscilací. Vstupní signál je poté zesílen a z výstupu přiveden zpět na vstup, načež je znovu zesílen. Tento proces se opakuje, a tím postupně vzniká výstupní signál s velkou amplitudou. Zvětšování signálu je omezeno *saturací zisku* zesilovače a systém dosáhne ustáleného stavu, ve kterém na rezonanční frekvenci zesilovače vzniká výstupní signál. Aby oscilace nastaly, musí být splněny dvě podmínky:

1. *Zisk zesilovače* (jeho zesílení) musí být větší než ztráty zpětné vazby, takže při jednom oběhu smyčkou se zpětnou vazbou se dosahuje čistého zisku.

2. *Celková změna fáze* při jednom oběhu musí být celočíselným násobkem 2π, takže signál zpětné vazby je sfázovaný s původním vstupním signálem.

Doporučená literatura

1. FEYNMAN, R. P. *Feynmanovy přednášky z fyziky*, díl 2. FRAGMENT Havlíčkův Brod, 2001. ISBN 80-7200-420-4.
2. HAŇKA, L. *Teorie elektromagnetického pole*. SNTL Praha, 1975. ISBN 04-519-75.
2. MYSLÍK, J. *Elektromagnetické pole – základy teorie*. BEN Praha, 2002. ISBN 80-86056-43-0.

Název	Vybrané základní pojmy a vztahy z elektromagnetismu
Autor	Ing. Bc. Jiří Primas, Ph.D.
	Ing. Bc. Michal Malík, Ph.D.
	.
Vydavatel	Technická univerzita v Liberci
	Studentská 1402/2, Liberec
Schváleno	Rektorátem TUL dne 7. 5. 2024, čj. RE 26/24
Vyšlo	v květnu 2024
Vydání	1.
ISBN	978-80-7494-703-2
Č. publikace	55-026-24

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

9 788074 947032