



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

URČENO PRO VZDĚLÁVÁNÍ  
V AKREDITOVANÝCH STUDIJNÍCH  
PROGRAMECH

IVAN KŘIVÝ

ČÍSLO OPERAČNÍHO PROGRAMU: CZ.1.07  
NÁZEV OPERAČNÍHO PROGRAMU:  
VZDĚLÁVÁNÍ PRO KONKURENCESCHOPNOST  
OPATŘENÍ: 7.2  
ČÍSLO OBLASTI PODPORY: 7.2.2

INOVACE VÝUKY INFORMATICKÝCH  
PŘEDMĚTŮ VE STUDIJNÍCH PROGRAMECH  
OSTRAVSKÉ UNIVERZITY

REGISTRAČNÍ ČÍSLO PROJEKTU: CZ.1.07/2.2.00/28.0245

OSTRAVA 2012

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Recenzent: Prof. Ing. Josef Tošenovský, CSc.

Název: Analýza časových řad  
Autor: Prof. RNDr. Ing. Ivan Křivý, CSc.  
Vydání: první, 2012  
Počet stran: 122

Jazyková korektura nebyla provedena, za jazykovou stránku odpovídá autor.

© Ivan Křivý  
© Ostravská univerzita v Ostravě

<b>ÚVOD</b>	<b>1</b>
<b>1 ZÁKLADNÍ POJMY ANALÝZY ČASOVÝCH ŘAD</b>	<b>5</b>
1.1 Časová řada	5
1.2 Problémy analýzy časových řad	6
1.3 Základní přístupy k analýze časových řad	7
1.4 Předpovědi v časových řadách	9
1.5 Základní charakteristiky časových řad	10
<b>2 APROXIMACE TRENDU MATEMATICKÝMI FUNKCEMI</b>	<b>15</b>
2.1 Subjektivní metody analýzy trendu	15
2.2 Aproximace trendu matematickými funkcemi	16
<b>3 METODY KLOUZAVÝCH PRŮMĚRŮ A KLOUZAVÝCH MEDIÁNŮ</b>	<b>27</b>
3.1 Metoda klouzavých průměrů	27
3.2 Metoda klouzavých mediánů	33
3.3 Metoda adaptivních vah	35
<b>4 EXPONENCIÁLNÍ VYROVNÁVÁNÍ</b>	<b>39</b>
4.1 Princip metody	39
4.2 Jednoduché exponenciální vyrovnávání	40
4.3 Dvojitě exponenciální vyrovnávání (Brownův algoritmus)	42
4.4 Trojitě exponenciální vyrovnávání	43
<b>5. METODY ANALÝZY SEZÓNŇÍ SLOŽKY</b>	<b>47</b>
5.1 Sezónní faktory	47
5.2 Elementární přístup k sezónní složce	49
5.3 Regresní přístupy k sezónní složce	50
<b>6 POJMY A MATEMATICKÝ APARÁT BOXOVY – JENKINSOVY METODOLOGIE</b>	<b>55</b>
6.1 Stacionarita časové řady	55
6.2 Autokorelační funkce	56
6.3 Parciální autokorelační funkce (PACF)	57
<b>7 LINEÁRNÍ MODELÝ STACIONÁRNÍCH ČASOVÝCH ŘAD</b>	<b>61</b>
7.1 Pojem lineárního procesu	61
7.2 Proces klouzavých součtů	63
7.3 Autoregresní proces	65
7.4 Smíšený proces	66
<b>8 LINEÁRNÍ MODELÝ NESTACIONÁRNÍCH ČASOVÝCH ŘAD</b>	<b>69</b>
8.1 Proces náhodné procházky	69
8.2 Smíšené integrované procesy	70
8.3 Modely volatility	73
<b>9 LINEÁRNÍ MODELÝ SEZÓNŇÍCH ČASOVÝCH ŘAD</b>	<b>79</b>
9.1 Sezónní smíšené integrované procesy SARIMA	79
9.2 Sezónní procesy klouzavých součtů SMA	81
9.3 Sezónní autoregresní modely SAR	81
9.4 Sezónní smíšené modely SARMA	81
<b>10 KONSTRUKCE MODELU V BOXOVĚ-JENKINSOVĚ METODOLOGII</b>	<b>85</b>
10.1 Identifikace modelu	85

10.2 Odhad parametrů modelu	86
9.3 Verifikace modelu	89
9.4 Výhody a nevýhody Boxova-Jenkinsova přístupu	91
<b>11 VÍCEROZMĚRNÉ ČASOVÉ ŘADY A JEJICH CHARAKTERISTIKY</b>	<b>93</b>
11.1 Pojem vícerozměrné časové řady	93
11.2 Teoretické charakteristiky	94
11.3 Empirické charakteristiky	96
<b>12 LINEÁRNÍ MODELY VÍCEROZMĚRNÝCH ČASOVÝCH ŘAD</b>	<b>101</b>
12.1 Vícerozměrný lineární proces	101
12.2 Vícerozměrné procesy klouzavých součtů	102
12.2 Vícerozměrné autoregresní procesy	103
12.3 Vícerozměrné smíšené procesy	103
12.5 Kauzální vztahy	104
12.6 Kointegrace časových řad	107
<b>13 ZÁKLADNÍ POJMY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY ČASOVÝCH ŘAD</b>	<b>111</b>
13.1 Pojem úhlové frekvence	111
13.2 Periodogram	111
13.3 Spektrální hustota	112
13.4 Filtry	113
13.5 Odhad spektrální hustoty	115
13.6 Testy periodicity	116
<b>AUTOTEST</b>	<b>119</b>
<b>LITERATURA</b>	<b>121</b>

## ANOTACE

Předkládaná inovovaná distanční opora představuje úvod do analýzy časových řad. Je určena především posluchačům distančního a kombinovaného studia studijních programů *Aplikovaná matematika*, *Aplikovaná informatika* a *Informatika*. Zahrnuje následující témata.

- Dekompozice časových řad:
  - základní pojmy analýzy časových řad,
  - aproximace trendu matematickými funkcemi,
  - metody klouzavých průměrů a klouzavých mediánů,
  - exponenciální vyrovnávání,
  - metody analýzy sezónní složky.
- Boxova-Jenkinsova metodologie:
  - pojmy a matematický aparát Boxovy-Jenkinsovy metodologie,
  - lineární modely stacionárních časových řad,
  - lineární modely nestacionárních časových řad,
  - lineární modely sezónních časových řad,
  - konstrukce modelu v Boxově-Jenkinspově metodologii,
  - vícerozměrné časové řady a jejich charakteristiky,
  - lineární modely vícerozměrných časových řad.
- Spektrální analýza časových řad:
  - základní pojmy spektrální analýzy časových řad.



## ÚVOD

Předkládaná distanční opora (modul), která se Vám dostává do ruky, byla vytvořena inovací původní opory [17] v rámci projektu „Inovace výuky informatických předmětů ve studijních programech Ostravské univerzity“, reg. číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0245. V souvislosti s inovací byly provedeny následující změny:

- upravena struktura celé distanční opory,
- stávající kapitoly (lekce) doplněny o řadu tabulek, obrázků a nových poznatků,
- nově zařazeny dvě kapitoly věnované analýze vícerozměrných časových řad.

Inovovaná opora plně pokrývá požadavky učebních osnov povinně volitelného předmětu XANCS pro posluchače distančního a kombinovaného studia ve studijních programech *Informatika, Aplikovaná informatika* a *Aplikovaná matematika* na Přírodovědecké fakultě Ostravské univerzity. Tato opora může být samozřejmě použita jako vhodný studijní materiál i pro studenty prezenční formy studia v rámci předmětu ANCAS.

### **Cíle modulu:**

Po prostudování tohoto modulu

- pochopíte souvislost mezi teorií náhodných procesů a základními principy analýzy časových řad,
- naučíte se prakticky analyzovat časové řady s využitím běžně používaných přístupů, zejména metod dekompozice a Boxovy-Jenkinsovy metodologie,
- naučíte se vybrat vhodnou metodu pro efektivní analýzu dané časové řady,
- pochopíte význam analýzy časových řad pro řešení konkrétních úloh v praxi.

Distanční opora je členěna do následujících lekcí (kapitol):

- základní pojmy analýzy časových řad,
- aproximace trendu matematickými funkcemi,
- metody klouzavých průměrů a klouzavých mediánů,
- exponenciální vyrovnávání,
- metody analýzy sezónní složky,

Inovace modulu

Poslání modulu

Obsah modulu

- základní pojmy a matematický aparát Boxovy-Jenkinsovy metodologie,
- lineární modely stacionárních časových řad,
- lineární modely nestacionárních časových řad,
- lineární modely sezónních časových řad,
- konstrukce modelu v Boxově-Jenkinsově metodologii,
- vícerozměrné časové řady a jejich charakteristiky,
- lineární modely vícerozměrných časových řad,
- základní pojmy spektrální analýzy časových řad.

Jednotlivé lekce zpravidla obsahují:

#### Struktura modulu

- formulaci cílů lekce (tedy toho, co by měl student po jejím prostudování umět, znát, pochopit),
- klíčová slova,
- průvodce studiem,
- vlastní výklad učiva,
- řešené příklady,
- kontrolní otázky k procvičení učiva,
- korespondenční úkol,
- pojmy k zapamatování,
- shrnutí.

Zařazené korespondenční úkoly mají charakter individuální seminární práce, která je určena k ověření Vašich schopností aplikovat získané teoretické znalosti na analýzu konkrétní (Vámi vybrané) časové řady. Povinnou součástí Vašich studijních povinností je vypracování dvou lektorem vybraných korespondenčních úkolů s využitím statistického software NCSS [19] a jejich odevzdání prostřednictvím systému Moodle. Jejich bodová hodnocení budou započtena do celkového hodnocení kurzu.



V každé kapitole je uvedeno vše potřebné pro samostatné studium, počínaje definicemi základních pojmů a konče využitím teoretických poznatků v praxi. V zájmu správného pochopení probírané látky jsou náročnější témata zpravidla doplněna řešením typových příkladů. Doporučujeme čtenáři, aby se nad každým příkladem důkladně zamyslel. Pochopení principů řešení je totiž nezbytným předpokladem pro porozumění dalšímu výkladu.

Čas potřebný k prostudování jednotlivých lekcí explicitně neuvádíme, neboť z našich zkušeností vyplývá, že rychlost studia závisí na Vašich schopnostech a studijních návycích.



Předpokládáme, že si mnozí z Vás budou chtít doplnit a rozšířit poznatky studiem dalších literárních pramenů (učebnic a skript), jež se zabývají jak teorií, tak i aplikacemi. Teoretické základy analýzy časových řad jsou popsány např. v monografii [1] nebo skriptech [20]. V této studijní opoře jsme vycházeli především z monografií [2,3,8,9]. Ze zahraničních pramenů doporučujeme monografie [6,15,24]. Věříme, že Vám předkládaný studijní materiál pomůže pochopit základní principy analýzy časových řad, a přejeme Vám hodně úspěchů ve studiu.



Autor

Autor děkuje touto cestou recenzentovi za pečlivé pročtení rukopisu a řadu cenných připomínek směřujících ke zkvalitnění předkládaného učebního textu.



# 1 ZÁKLADNÍ POJMY ANALÝZY ČASOVÝCH ŘAD

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte, co se rozumí pod pojmem časová řada a jaké jsou problémy spojené s vytvářením časové řady,
- poznáte základní přístupy k analýze časových řad,
- poznáte, jak se konstruují předpovědi v časových řadách,
- seznámíte se s některými charakteristikami časových řad.

**Klíčová slova:** časová řada, délka časové řady, trend, sezónní složka, cyklická složka, náhodná složka, předpovědi, střední hodnota, rozptyl, autokovarianční funkce, autokorelační funkce.

Úvodní kapitola je věnována především vymezení pojmu časové řady a objasnění některých problémů souvisejících s její konstrukcí. Dále jsou v ní stručně vysvětleny základní přístupy k analýze časových řad a konstrukci předpovědi v těchto řadách. V závěrečné části kapitoly jsou definovány některé významné charakteristiky časové řady, a to jak teoretické, tak empirické.



## 1.1 Časová řada

Pod pojmem **časová řada** rozumíme data (výsledky pozorování), která jsou chronologicky uspořádána, např. seismický záznam v geofyzice, řada nejvyšších (nejnižších) denních teplot v meteorologii, vývoj koncentrace nečistot v ekologii, změny počtu jedinců nějaké populace v demografii, vývoj rozvodovosti v sociologii nebo vývoj cen v ekonomii. Máme přitom na mysli tzv. **statistické (stochastické) řady**, které jsou zatíženy nejistotou, nikoliv řady **deterministické**, jejichž chování lze jednoznačně popsat nějakým matematickým vzorcem. Jestliže vyjdeme z teorie náhodných procesů, můžeme říci, že časová řada představuje **konkrétní realizaci** odpovídajícího **náhodného (stochastického) procesu**.

Cílem analýzy časové řady je určení modelu (mechanismu), podle něhož jsou generována sledovaná data. Znalost tohoto modelu umožňuje předpovídat budoucí vývoj systému a do jisté míry i řídit a optimalizovat chování systému vhodnou volbou vstupních parametrů a počátečních podmínek.

Časová řada



Z historického hlediska se jako první sledovaly řady astronomických a meteorologických pozorování. V současnosti se aplikace zaměřují především do ekonomické oblasti.

Zpočátku převládal deterministický přístup k analýze časových řad, který přetrvával ještě během první čtvrtiny dvacátého století, přestože byl často kritizován pro neschopnost vysvětlit nepravidelnosti v amplitudách i ve vzdálenostech mezi lokálními extrémy časových řad. Velký pokrok v rozvoji disciplíny představoval nový stochastický přístup, zejména v pracích Yulea a Sluckého, s jehož pomocí lze popsat většinu reálných časových řad z ekonomické praxe.

## 1.2 Problémy analýzy časových řad

Časové řady jsou tvořeny výsledky pozorování (měření), která jsou prováděna v diskretních časových okamžicích. Některé z nich jsou už diskretní svou povahou (např. řady úhrnné produkce nějaké zemědělské plodiny za jednotlivé roky), jiné je třeba předem diskretizovat. Mohou vznikat několikerým způsobem:

- diskretizací hodnot spojitě se měnící veličiny (např. řada hodnot amplitudy nějakého signálu v daných časových okamžicích),
- akumulací hodnot sledované veličiny za dané časové období (např. řada denních srážkových úhrnů v meteorologii),
- průměrkováním hodnot uvažované veličiny v daném časovém intervalu (např. řada průměrných denních teplot).

Časové body  
pozorování

**Volba časových okamžiků pozorování.** Máme-li možnost volby, pak se doporučuje volit kompromisní řešení. Velká hustota časových bodů pozorování umožňuje dobře vystihnout charakteristické rysy časové řady, ale mohou nastat potíže při výpočtech. V každém případě se však snížíme volit ekvidistantní intervaly mezi sousedními pozorováními.

Problémy  
s kalendářem

Při analýze ekonomických časových řad se mohou nepříznivě projevit **problémy spojené s kalendářem** (např. různá délka kalendářních měsíců, různý počet pracovních dnů v měsíci, pohyblivé svátky). V takových případech se zavádí tzv. „standardní měsíc“ o délce 30 dnů nebo standardní počet pracovních dnů v měsíci, nebo se pozorované údaje akumulují (např. použití kvartálních dat namísto měsíčních).

Délka časové  
řady

**Délka časové řady** se definuje jako celkový počet pozorování v časové řadě, nikoliv jako časově rozpětí mezi prvním a posledním pozorováním.

### 1.3 Základní přístupy k analýze časových řad

Volba přístupu k analýze (výběr metody) závisí na celé řadě faktorů: účelu analýzy, typu sledované časové řady, zkušenostech statistika, jakož i dostupnosti výpočetní techniky a statistického software.

V této části se omezíme jen na stručnou charakteristiku čtyř nejčastěji používaných přístupů k analýze časových řad. Uvažujme časovou řadu  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ .

**A. Dekompozice časové řady.** Princip tohoto přístupu je velmi jednoduchý. Časová řada se rozkládá na čtyři základní složky, jimiž jsou trend ( $Tr$ ), sezónní složka ( $Sz$ ), cyklická složka ( $C$ ) a náhodná (reziduální) složka ( $\varepsilon$ ). To znamená, že časovou řadu chápeme jako trend, na který se „nabalují“ periodické složky (sezónní a cyklická složka) a náhodná složka (nejčastěji bílý šum).

Dekompozice  
časové řady

Dekompozice (rozklad) časové řady je dvojího typu:

a) **aditivní** ve tvaru

$$Y_t = Tr_t + Sz_t + C_t + \varepsilon_t,$$

kdy všechny složky se měří ve stejných jednotkách jako  $Y_t$ ,

Aditivní  
dekompozice

b) **multiplikativní** ve tvaru

$$Y_t = Tr_t \cdot Sz_t \cdot C_t \cdot \varepsilon_t,$$

kdy pouze trendová složka je měřena ve stejných jednotkách jako  $Y_t$  a ostatní složky jsou bezrozměrné veličiny.

Multiplikativní  
dekompozice

**Trend** reprezentuje dlouhodobé změny v průměrném chování řady (dlouhodobý růst nebo pokles, popř. dlouhodobá konstantní úroveň); je způsoben faktory, jež působí systematicky, tj. ve stejném směru.

Trend

**Sezónní složka** představuje periodické změny, které se odehrávají v průběhu roku a každý rok se opakují. Tyto změny zpravidla souvisejí se střídáním ročních období (jaro, léto, podzim a zima). Pro studium sezónních vlivů se doporučuje pracovat s řadami měsíčních, nejvýše kvartálních měření.

Sezónní složka

**Cyklickou složku** chápeme jako fluktuace kolem trendu, při nichž se pravidelně střídají fáze růstu s fázemi poklesu. Délka cyklu i intenzita jednotlivých fází se přitom mohou v průběhu času měnit. Příčiny vedoucí ke vzniku cyklické složky lze zpravidla jen těžko identifikovat.

Cyklická složka

**Náhodná (reziduální) složka** představuje náhodné fluktuace, jež nemají systematický charakter. Zahrnuje též chyby měření, chyby ve

Náhodná složka

statistickém zpracování dat (např. zaokrouhlovací chyby). Často se předpokládá, že má náhodná složka charakter bílého šumu, tj. že je tvořena hodnotami nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a nějakým konstantním rozptylem.

Dekompoziční metody pracují pouze se systematickými složkami (trend, sezónní a cyklická složka), přitom se zpravidla využívá **metod regresní analýzy**.

### B. Boxova-Jenkinsova metodologie

U tohoto přístupu se zpravidla předpokládá, že časová řada je slabě stacionární. Základním prvkem při konstrukci modelu je reziduální složka. Uvedeme dva typické příklady modelu:

- model klouzavých součtů 1. řádu ve tvaru

$$Y_t = \varepsilon_t + k\varepsilon_{t-1},$$

kde  $k$  je nějaká reálná konstanta a  $\varepsilon_t$  reprezentuje tzv. bílý šum;

- autoregresní model 1. řádu definovaný předpisem

$$Y_t = \varepsilon_t + kY_{t-1}.$$

Boxova-Jenkinsova metodologie umožňuje modelovat i časové řady s výrazným trendovým a/nebo sezónním charakterem, přičemž trendová i sezónní složka mohou být (na rozdíl od dekompozice) modelovány stochasticky.

Boxovy-Jenkinsovy modely jsou mnohem flexibilnější než modely dekompoziční, což znamená, že se lépe adaptují na změny v průběhu časové řady.

Základním matematickým nástrojem pro analýzu časové řady jsou v tomto případě **metody korelační analýzy**, které umožňují zkoumat závislosti mezi jednotlivými pozorováními dané časové řady.

### C. Lineární kauzální (faktorové) modely

Takové modely, běžné v ekonometrii, jsou zpravidla konstruovány tak, že se hodnoty sledované časové řady vysvětlují pomocí jiných, tzv. **faktorových časových řad**. Uvedeme jednoduchý ekonometrický model, převzatý z monografie [8], ve tvaru

$$C_t = \alpha + \beta C_{t-1} + \gamma X_t + \delta P_t + \varepsilon_t.$$

V uvažovaném modelu se výdaje  $C_t$  obyvatelstva na nákup spotřebního zboží v roce  $t$  vysvětlují pomocí těchto výdajů  $C_{t-1}$  v roce bezprostředně předcházejícím a navíc pomocí peněžních příjmů  $X_t$  obyvatelstva a cenového indexu  $P_t$  spotřebního zboží v roce  $t$ . ( $\alpha, \beta, \gamma$  a  $\delta$  jsou

parametry modelu a  $\varepsilon_t$  značí bílý šum.) V této oblasti se používají především **metody regresní analýzy**. Faktorovými modely se nebudeme v této distanční opoře dále zabývat.

#### D. Spektrální analýza časových řad

Spektrální analýza  
časové řady

Zkoumaná časová řada se považuje za nekonečnou lineární kombinaci sinusových a kosinusových funkcí s různými amplitudami a frekvencemi. Pomocí speciálních statistických nástrojů (např. periodogram) je možno získat představu o intenzitě zastoupení jednotlivých frekvencí v časové řadě. Ve spektrální analýze časových řad se využívá především **Fourierovy analýzy**.

### 1.4 Předpovědi v časových řadách

Předpovědi v časových řadách mohou být dvojího druhu: bodové a intervalové. **Bodová předpověď** představuje bodový odhad hodnoty časové řady v určitém budoucím okamžiku. Intervalová předpověď (**předpovědní interval**) je analogií intervalu spolehlivosti. Vlastnosti dobrých bodových odhadů a metody konstrukce intervalových odhadů jsou podrobně popsány např. v monografiích J. Anděla [1]. V rámci této distanční opory se budeme zabývat pouze bodovými předpověďmi.

Bodová předpověď

Předpovědní interval

Metody pro vytváření předpovědí jsou buď kvalitativní nebo kvantitativní. Kvalitativní metody (např. metoda Delfi) jsou založeny na názoru expertů, a proto mají jen subjektivní charakter. Naproti tomu metody kvantitativní vycházejí z objektivních statistických postupů; přitom se předpokládá, že se charakter zkoumané časové řady v budoucnosti nemění.

Výběr předpovědní techniky závisí na celé řadě faktorů, zejména na požadované formě předpovědi, časovém horizontu předpovědi, požadované přesnosti, charakteru vstupních dat a jejich dostupnosti.

**Chyba předpovědi**  $e_t$  v čase  $t$  je definována vztahem

Chyba předpovědi

$$e_t = Y_t - \widehat{Y}_t(t-1),$$

v němž  $Y_t$  značí skutečně naměřenou hodnotu v čase  $t$  a  $\widehat{Y}_t(t-1)$  předpověď této hodnoty pořízenou v časovém okamžiku bezprostředně předcházejícím.

Při posuzování kvality předpovědí v dané časové řadě je nutno vzít v úvahu všechny zkonstruované předpovědi. V praxi se nejčastěji používají následující **míry kvality předpovědí**:

Míry kvality předpovědi

Míra SSE

**součet čtvercových chyb SSE** (Sum of Squared Errors)

$$SSE = \sum_{t=1}^n e_t^2,$$

Míra MSE

**průměrná čtvercová chyba MSE** (Mean Squared Error)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2 = \frac{1}{n} SSE$$

Míra MAD

**průměrná absolutní odchylka MAD** (Mean Absolute Deviation)

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t| \quad \text{a}$$

Míra MAPE

**Průměrná absolutní procentuální chyba MAPE** (Mean Absolute Percentual Error)

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{Y_t}.$$

Srovnáme-li všechny uvedené míry, zjistíme, že míry MSE a SSE (ve srovnání s MAD) posuzují mnohem přísněji velké chyby předpovědí než chyby malé. Všechny uvedené míry kvality předpovědí závisí na škále, v níž jsou měřeny hodnoty  $\{Y_t\}$ . Při porovnávání míry kvality předpovědi

Míra SMAPE

pro více časových řad je vhodnější použít **symetrickou průměrnou absolutní chybu v procentech** (SMAPE) definovanou vztahem

$$SMAPE = \frac{100}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} \frac{|e_t|}{(|Y_t| + |\hat{Y}_t(t-1)|) / 2},$$

v němž  $h$  značí horizont předpovědi.

## 1.5 Základní charakteristiky časových řad



Předpokládejme, že je dána časová řada  $\{Y_t\}_{t=1}^n = Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Na počátku musíme zdůraznit, že je principiální rozdíl mezi charakteristikami teoretickými a empirickými (výběrovými). **Teoretické charakteristiky jsou (z pohledu klasické teorie pravděpodobnosti) konstanty, jejichž přesnou hodnotu neznáme, zatímco empirické charakteristiky jsou náhodné veličiny – odhady charakteristik teoretických.**

Základními **teoretickými charakteristikami** časové řady jsou:

Střední hodnota

a) **střední hodnota**  $\mu_t = \mathbf{E}(Y_t)$ ,

Rozptyl (variance)

b) **rozptyl (variance)**  $\sigma_t^2 = \mathbf{var}(Y_t) = \mathbf{E}[(Y_t - \mu_t)^2]$ ,

Autokovarianční funkce

c) **autokovarianční funkce řádu  $k$**  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ )

$$\gamma_k = \mathbf{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \mathbf{E}[(Y_t - \mu_t)(Y_{t+k} - \mu_{t+k})],$$

Autokorelační funkce

d) **autokorelační funkce řádu  $k$**  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ )



$$\rho_k = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t+k})}{\sigma_t \sigma_{t+k}}$$

Uvedené vztahy se zjednoduší, omezíme-li se na tzv. slabě stacionární řady, tj. na řady s konstantní střední hodnotou, konstantním rozptylem a autokovarianční funkcí, která závisí pouze na hodnotě  $k$ . Pak pro uvedené teoretické charakteristiky můžeme psát:

- a) **střední hodnota**  $\mu = \mathbf{E}(Y_t)$  pro všechna  $t$ ,
- b) **rozptyl (variance)**  $\sigma^2 = \mathbf{var}(Y_t) = \mathbf{E}[(Y_t - \mu)^2]$  pro všechna  $t$ ,
- c) **autokovarianční funkce řádu  $k$**  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ )

$$\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \mathbf{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)],$$

- d) **autokorelační funkce řádu  $k$**  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ )

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t+k})}{\sigma^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Autokovarianční i autokorelační funkce jsou funkce sudé, tj.  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ ,  $\rho_k = \rho_{-k}$ , proto se určují pouze pro  $k \geq 0$ . Grafický záznam závislosti  $\rho_k$  na  $k$  se nazývá **periodogram**, přitom platí  $\rho_0 = 1$  a  $|\rho_k| \leq 1$  pro  $k > 0$ .

Odhady teoretických charakteristik (empirické charakteristiky) jsou:

- a) **aritmetický průměr**  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t$ , Aritmetický průměr
- b) **odhad rozptylu (variance)**  $S_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t^2 - \bar{Y}^2$ , Odhad rozptylu
- c) **odhad autokovarianční funkce** ( $k = 0, 1, \dots$ ) Odhad autokovarianční funkce

$$c_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y}) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} Y_t Y_{t+k} - \bar{Y}^2,$$
- d) **odhad autokorelační funkce** ( $k = 0, 1, \dots$ ) Odhad autokorelační funkce

$$r_k = \frac{c_k}{S_Y^2} = \frac{c_k}{c_0}.$$

Výpočet odhadů (empirických charakteristik) má praktický význam pro  $n > 50$ ,  $k \leq n/4$ .



### Kontrolní otázky

1. Jak se řeší problémy s kalendářem?
2. Jaký je zásadní rozdíl mezi sezónní a cyklickou složkou časové řady?
3. Jak se počítá chyba předpovědi?
4. Jaká je výhoda míry kvality předpovědi SMAPE?
5. Vysvětlete rozdíl mezi teoretickými a empirickými charakteristikami.



### Korespondenční úkol 1

Vyberte si libovolnou časovou řadu obsahující minimálně 50 pozorování a spočítejte pro ni hodnoty aritmetického průměru, rozptylu, autokovarianční a autoregresní funkce pro  $k = 1, 2, \dots, 10$ . K výpočtu použijte Excel nebo dostupný statistický software (např. NCSS, Mathematica). Vaše práce by měla mít následující strukturu:

- 1) stručný popis vybraných dat (včetně původu),
- 2) hodnoty vypočtených empirických charakteristik,
- 3) interpretace výsledků.

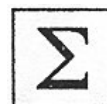


### Pojmy k zapamatování:

- časová řada (stochastická, deterministická),
- časové body pozorování,
- délka časové řady,
- dekompozice časové řady (aditivní, multiplikativní),
- trend,
- sezónní složka,
- cyklická složka,
- náhodná (reziduální) složka,
- Boxova-Jenkinsova metodologie,
- lineární faktorový model,
- faktorová (vysvětlující) časová řada,
- spektrální analýza časové řady,
- bodová předpověď,
- předpovědní interval,
- chyba předpovědi,
- míry kvality předpovědi (míry SSE, MSE, MAD, MAPE, SMAPE),
- teoretické charakteristiky časové řady (střední hodnota, rozptyl, autokovarianční funkce, autokorelační funkce),
  - empirické charakteristiky časové řady (aritmetický průměr, empirický rozptyl, empirická autokovarianční funkce, empirická autokorelační funkce)

## **Shrnutí**

V této kapitole zavádíme pojem časová řada (realizace nějakého náhodného procesu) a některé další pojmy související s časovými řadami (délka časové řady, chyba předpovědi, míry kvality předpovědi). Dále předkládáme čtenáři stručnou charakteristiku základních přístupů k analýze časových řad (dekompozice čas. řady, Boxova-Jenkinsova metodologie, lineární faktorové modely a spektrální analýza) a také přehled nejužívanějších teoretických i empirických charakteristik časové řady.





## 2 APROXIMACE TRENDU MATEMATICKÝMI FUNKCEMI

### Základní cíle této kapitoly:

- poznat základní klasické (neadaptivní) přístupy k eliminaci trendové složky
- naučit se počítat bodové odhady parametrů matematických funkcí, které jsou vhodné k aproximaci trendové složky.

Klíčová slova: vyrovnání výkyvů okolo trendu, metoda průměrování cyklů, metoda nejmenších čtverců, konstantní funkce, lineární funkce, kvadratická funkce, exponenciální funkce, modifikovaná exponenciální funkce, logistická funkce, Gompertzova funkce, spline.

Tato kapitola je věnována klasickým přístupům (ne adaptivním) k analýze trendu. Zabývá se především problematikou aproximace trendu vhodnými matematickými funkcemi. Doporučujeme čtenáři, aby si před studiem této kapitoly zopakoval princip metody nejmenších čtverců a způsob jejího využití pro odhadování parametrů regresních funkcí. Dále považujeme za vhodné, aby si zakreslil průběh jednotlivých aproximačních funkcí pro doporučené hodnoty jejich parametrů.



### 2.1 Subjektivní metody analýzy trendu

Tyto metody mají většinou jednoduchý grafický základ. Umožňují sice časovou řadu vyrovnat, ale neposkytují prostředky pro konstrukci předpovědí.

Nejjednodušší grafická metoda (**vyrovnávání dolních a horních zjevných periodických výkyvů okolo trendu**) je založena na tom, že se středy vytypovaných cyklů proloží pokud možno hladká křivka. Příklad takového vyrovnání je na obr. 2.1.

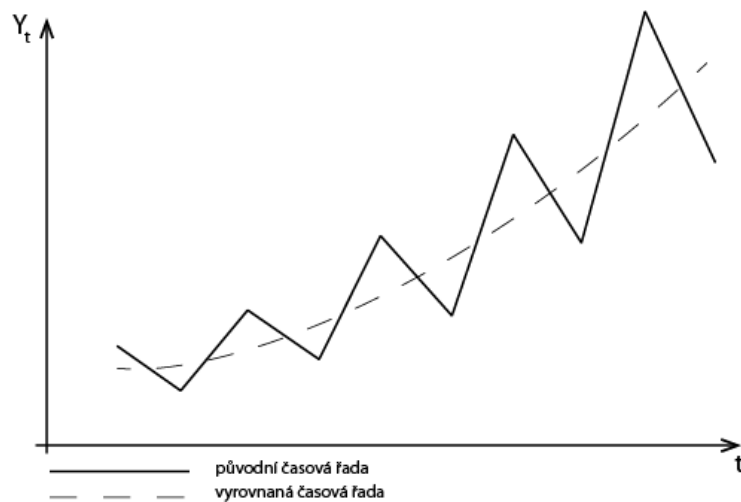
Poněkud objektivnější je **metoda průměrování cyklů**. Tato metoda (viz obr. 2.2) se realizuje ve třech krocích:

- nejprve se spojí lomenými čarami všechny horní body zvratu časové řady a také všechny dolní body zvratu,

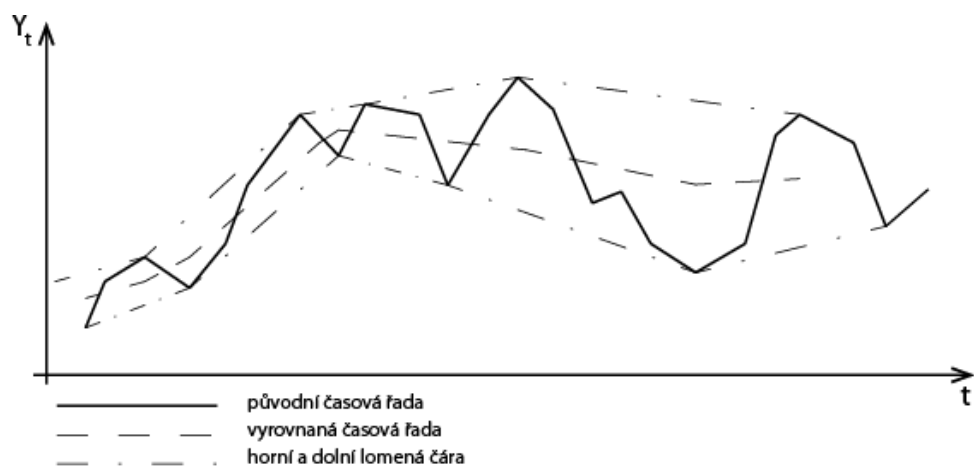
Vyrovnávání dolních a horních výkyvů

Metoda průměrování cyklů

- pak se pro všechny potřebné časové okamžiky vynesou do grafu středy vzdáleností mezi horní a dolní lomenou čarou,
- nakonec se zakreslí lomená čára spojující již zmíněné středy.



Obr. 2.1: Vyhlazování horních a dolních výkyvů kolem trendu [8]



Obr. 2.2: Metoda průměrování cyklů [8]

Více podrobností o subjektivních metodách je uvedeno v monografii T. Cipry[8].

## 2.2 Aproximace trendu matematickými funkcemi

Budeme předpokládat, že zkoumaná časová řada má tvar

$$Y_t = Tr_t + \varepsilon_t.$$

Typ nejvhodnější matematické funkce pro danou časovou řadu se určuje na základě předběžné analýzy řady, nejčastěji pomocí grafického záznamu řady nebo teoretických znalostí o průběhu trendové složky. Systematická typologie funkcí vhodných pro popis trendové složky je uvedena např. v monografii J. Kozáka [18].

### 2.2.1 Konstantní funkce

V tomto případě zřejmě platí

$$Tr_t = \beta_0, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

**Metodou nejmenších čtverců**, tj. minimalizací funkce  $S = \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0)^2$

Metoda nejmenších čtverců

dostaneme pro bodový odhad  $b_0$  parametru  $\beta_0$  vztah

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t = \bar{y}.$$

Předpověď  $\hat{Y}_T$  pro  $T > n$  je rovněž konstantní, totiž  $\hat{Y}_T = b_0$ .

### 2.2.2 Lineární funkce

Je-li trend lineární, tj.

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t, \quad 1, 2, \dots, n,$$

dostaneme pro bodové odhady  $b_0$  a  $b_1$  pomocí metody nejmenších čtverců soustavu dvou normálních rovnic

$$\begin{aligned} nb_0 + b_1 \sum_{t=1}^n t &= \sum_{t=1}^n Y_t, \\ b_0 \sum_{t=1}^n t + b_1 \sum_{t=1}^n t^2 &= \sum_{t=1}^n tY_t. \end{aligned}$$

Její řešení má tvar

$$b_0 = \frac{\sum_{t=1}^n tY_t - \bar{t} \sum_{t=1}^n Y_t}{\sum_{t=1}^n t^2 - n\bar{t}^2}, \quad b_1 = \bar{Y} - b_0 \bar{t},$$

přičemž  $\bar{t} = \frac{(n+1)}{2}$ . Pro předpovědi  $\hat{Y}_T$  budoucích hodnot časové řady pak platí  $\hat{Y}_T = b_0 + b_1 T$ .

V ekonometrických časových řadách, kde body pozorování jsou zpravidla ekvidistantní, je výhodnější použít modelu

$$Tr_t = \gamma_0 + \gamma_1 (t - \bar{t}), \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Vzhledem k tomu, že platí  $\sum_{t=1}^n (t - \bar{t}) = 0$ , soustava normálních rovnic se

zjednoduší na tvar

$$nc_0 = \sum_{t=1}^n Y_t,$$

$$c_1 \sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2 = \sum_{t=1}^n (t - \bar{t}) Y_t.$$

Odtud pro bodové odhady  $c_0$  a  $c_1$  snadno dostaneme

$$c_1 = \frac{\sum_{t=1}^n t Y_t - \bar{t} \sum_{t=1}^n Y_t}{\sum_{t=1}^n t^2 - n \bar{t}^2}, \quad c_0 = \bar{Y}$$

a pro předpovědi budoucích hodnot časové řady  $\hat{Y}_T = c_0 + c_1 (T - \bar{t})$ .

### 2.2.3 Kvadratická funkce

V případě kvadratické funkce můžeme, stejně jako u funkce lineární, použít dvou modelů:

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad \text{nebo}$$

$$Tr_t = \gamma_0 + \gamma_1 (t - \bar{t}) + \gamma_2 (t - \bar{t})^2, \quad \dots, n.$$

V obou těchto případech dostaneme soustavu tří normálních rovnic pro bodové odhady příslušných parametrů. Předpovědi budoucích hodnot časové řady se pak počítají pomocí vztahu

$$\hat{Y}_T = b_0 + b_1 T + b_2 T^2, \quad \text{resp.}$$

$$\hat{Y}_T = c_0 + c_1 (T - \bar{t}) + c_2 (T - \bar{t})^2.$$

*Poznámka.* Vzorce pro výpočet intervalových odhadů jsou uvedeny např. v monografii [9].

### 2.2.4 Exponenciální funkce

Uvažuje se dvouparametrická funkce tvaru

$$Tr_t = \alpha \beta^t, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

který se vyznačuje tím, že podíl dvou sousedních hodnot trendu ( $\frac{Tr_{t+1}}{Tr_t}$ ), stejně jako podíl dvou sousedních prvních diferencí trendu, má konstantní hodnotu rovnou  $\beta$ . Je-li  $\beta > 1$ , pak uvažovaná funkce zřejmě exponenciálně roste, zatímco pro  $0 < \beta < 1$  exponenciálně klesá.

Pro odhad parametrů exponenciálního trendu se nejčastěji používá „obyčejná“ metoda nejmenších čtverců. Vztah (2.1) se nejprve převede logaritmováním na tvar

$$\log Tr_t = \log \alpha + t \log \beta$$

a odhady obou parametrů se určí minimalizací výrazu



$$\sum_{t=1}^n (\log y_t - \log \alpha - t \log \beta)^2.$$

Lepší výsledky poskytuje **metoda nejmenších vážených čtverců**, jejíž podstata spočívá v tom, že se jednotlivá pozorování opatřují statistickými vahami  $w_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , a minimalizuje se výraz

Metoda nejmenších vážených čtverců

$$\sum_{t=1}^n w_t (\log y_t - \log \alpha - t \log \beta)^2.$$

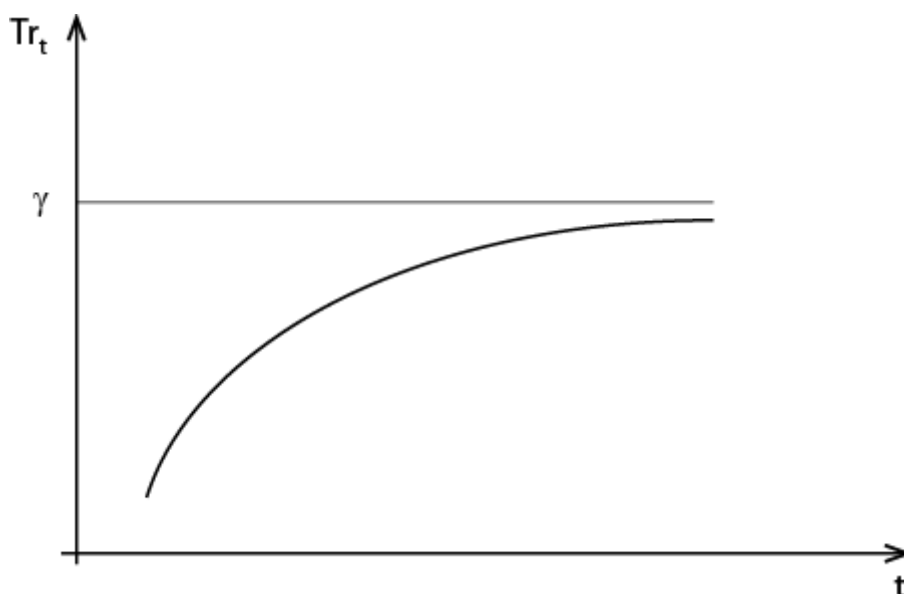
Statistické váhy je vhodné volit tak, aby platilo:  $w_t = Y_t^2$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ .

### 2.2.5 Modifikovaná exponenciální funkce

Tato funkce ve tvaru

$$Tr_t = \gamma + \alpha \beta^t, \quad \alpha < 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \gamma > 0, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

je vlastně zobecněním funkce exponenciální. Doporučuje se v těch případech, kdy podíl sousedních prvních diferencí řady je konstantní a řada je omezena hodnotou parametru  $\gamma$ . Příklad takového trendu je na obr. 2.3.



Obr. 2.3: Modifikovaný exponenciální trend [8]

Pro odhad parametrů se často využívá následující postup. Soubor všech pozorování se (po případném vynechání jednoho nebo dvou počátečních pozorování) rozdělí na tři stejně velké části o délce  $m$ . Sečteme-li pozorování v jednotlivých částech, dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_1 Tr_t &\approx \sum_1 Y_t = m\gamma + \frac{\alpha\beta(\beta^m - 1)}{\beta - 1}, \\ \sum_2 Tr_t &\approx \sum_2 Y_t = m\gamma + \frac{\alpha\beta^{m+1}(\beta^m - 1)}{\beta - 1}, \\ \sum_3 Tr_t &\approx \sum_3 Y_t = m\gamma + \frac{\alpha\beta^{2m+1}(\beta^m - 1)}{\beta - 1}.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy pak spočteme odhady všech tří parametrů

$$\begin{aligned}b &= \left( \frac{\sum_3 Y_t - \sum_2 Y_t}{\sum_2 Y_t - \sum_1 Y_t} \right)^{1/m}, \\ a &= \frac{b-1}{b(b^m - 1)^2} (\sum_2 Y_t - \sum_1 Y_t), \\ c &= \frac{\sum_1 y_t - ab(b^m - 1)(b-1)}{m}.\end{aligned}$$

## 2.2.6 Logistická funkce

Logistická funkce má tvar

$$Tr_t = \frac{\gamma}{1 + \alpha\beta^t}, \quad \alpha > 1, 0 < \beta < 1, \gamma > 0, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

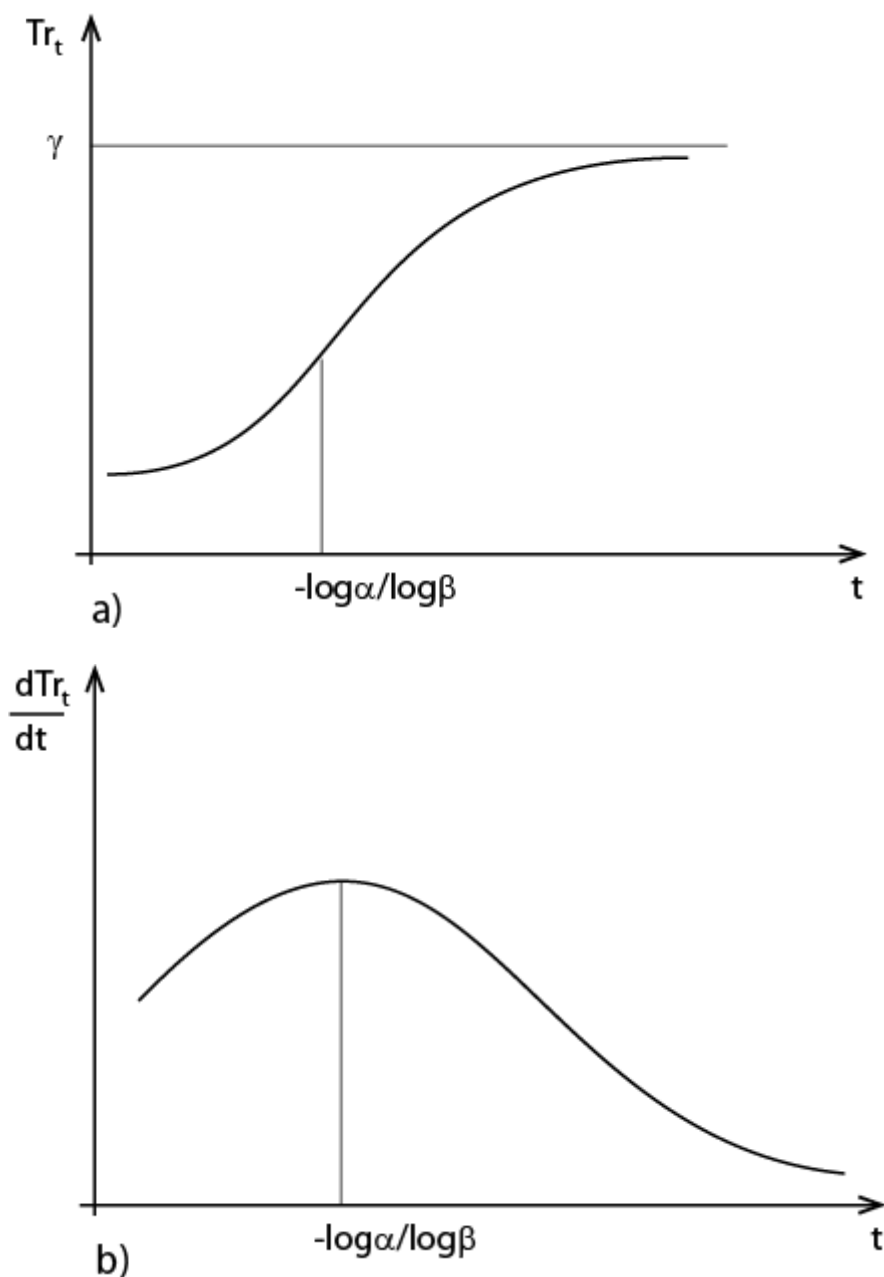
Tato funkce vykazuje inflexní bod  $t_{\text{inf}} = -\log \alpha / \log \beta$ , je rostoucí a asymptoticky omezena hodnotou parametru  $\gamma$ . Její graf (viz obr. 2.4a) má průběh typický pro tzv. *S-křivky*. Důležitou charakteristikou logistické funkce je tzv. **růstová funkce** (viz obr. 2.4b), kterou dostaneme derivováním podle času

$$\frac{dTr_t}{dt} = -\frac{\ln \beta}{\gamma} Tr_t (\gamma - Tr_t). \quad (2.2)$$

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že rychlost růstu trendu je přímo úměrná nejen dosažené úrovni  $Tr_t$ , ale i vzdálenosti této úrovně od hladiny  $\gamma$ . Růstová funkce je navíc symetrická „kolem“ inflexního bodu.

Pro odhad parametrů logistické funkce lze použít stejnou proceduru jako v případě modifikovaného exponenciálního trendu, v tomto případě se odhadovací procedura aplikuje na časovou řadu hodnot  $1/Y_t$ .

Růstová funkce



Obr. 2.4: Logistický trend: a) logistická funkce, b) růstová funkce [8]

Alternativní metoda odhadu vychází z řady prvních diferencí, tj. z řady  $Y_{t+1} - Y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ . Jestliže ve vztahu (2.2) nahradíme hodnoty trendové složky  $Tr_t$  hodnotami skutečných pozorování  $Y_t$  a použijeme aproximace  $\frac{dY_t}{dt} \approx Y_{t+1} - Y_t = \Delta_t$ , kde  $\Delta_t$  označuje řadu prvních diferencí původní časové řady, dostaneme (po malé úpravě)

$$\frac{\Delta_t}{y_t} = -\ln \beta + \frac{\ln \beta}{\gamma} Y_t.$$

Odtud už pomocí metody nejmenších čtverců spočteme odhady parametrů  $\beta$  a  $\gamma$ . Pro odhad zbývajícího parametru  $\alpha$  použijeme Rhodesova vztahu

$$\ln \alpha = -\frac{(n+1)\ln \beta}{2} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left( \frac{\gamma}{Y_t} - 1 \right).$$

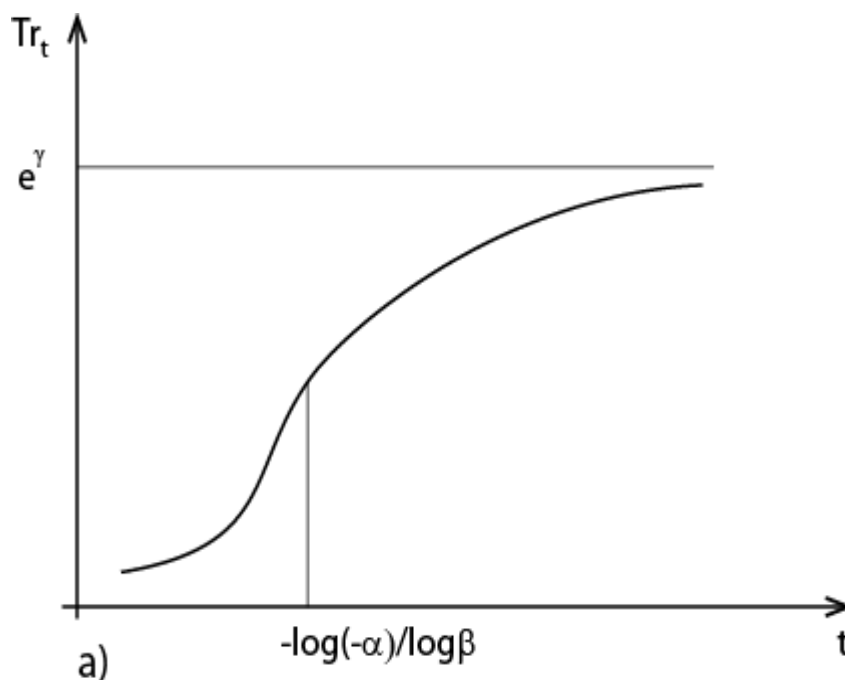
### 2.2.7 Gompertzova funkce

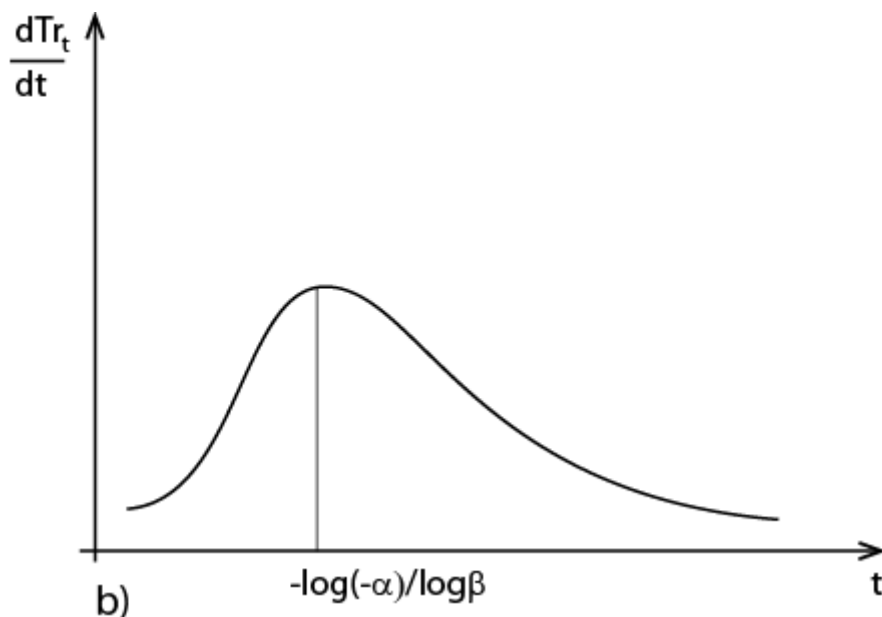
Tuto funkci dostaneme jednoduše transformací modifikované exponenciální funkce na tvar

$$\ln Tr_t = \gamma + \alpha \beta^t, \quad \alpha < -1, \quad 0 < \beta < 1, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Gompertzova funkce (viz obr. 2.5a) má inflexi v bodě  $t_{\text{inf}} = -\log(-\alpha)/\log \beta$ , je také rostoucí a asymptoticky omezena. Její graf má také podobu *S-křivky*. Příslušná růstová funkce (viz obr. 2.5b) není symetrická „kolem“ indexního bodu, ale je kladně zešikmená.

Odhad parametrů se provádí stejně jako u modifikované exponenciální funkce, ovšem odhadovací procedura se aplikuje na řadu  $\ln Y_t$ .





Obr. 2.5: Gompertzův trend: a) Gompertzova funkce, b) růstová funkce [8]

### 2.2.8 Splajnové funkce

Namísto toho, abychom se snažili popsat trend nějaké časové řady polynomem neúměrně vysokého stupně, rozdělíme časovou řadu na několik úseků a v každém z nich aproximujeme trend polynomem nízkého stupně (např. prvního nebo druhého). Výsledná funkce je pak dána spojením funkcí z jednotlivých úseků. Přitom požadujeme, aby tato funkce byla spojitá a navíc dostatečně hladká, což znamená, aby měla také spojitě derivace až do určitého řádu včetně.

**Příklad 2.1.** Pro řadu průměrných hektarových výnosů pšenice v USA v letech 1908 až 1971 lze trend popsat následujícími třemi funkcemi (viz [9]):

$$\begin{aligned}
 Tr_t &= 13,97, & t &= 1, \dots, 25, \\
 Tr_t &= 13,97 + 0,0123(t - 25)^2, & t &= 25, \dots, 54, \\
 Tr_t &= 24,314 + 0,664(t - 54), & t &= 54, \dots, 64.
 \end{aligned}$$

V bodě  $t = 25$  se derivace 1. řádu zleva i zprava rovnají, zatímco v bodě  $t = 54$  se už jednostranné derivace 1. řádu liší.

V tabulce 2.1 uvádíme přehled testů používaných v praxi pro výběr vhodné funkce pro aproximaci trendové křivky.



Tab. 2.1: Testy pro výběr aproximace trendové křivky [9]

Trendová funkce	Informativní test
Lineární	První diference jsou přibližně konstantní
Kvadratická	Druhé diference jsou přibližně konstantní
Exponenciální	Podíly sousedních hodnot $Y_{t+1}/Y_t$ jsou přibližně konstantní
Logistická	Podíly $\left(\frac{1}{Y_{t+2}} - \frac{1}{Y_{t+1}}\right) / \left(\frac{1}{Y_{t+1}} - \frac{1}{Y_t}\right)$ jsou přibližně konstantní
Gompertzova	Podíly $(\ln Y_{t+2} - \ln Y_{t+1}) / (\ln Y_{t+1} - \ln Y_t)$ jsou přibližně konstantní



### Kontrolní otázky

1. Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců.
2. Jaký průběh má exponenciální funkce pro  $\alpha > 0$ ?
3. Čím se liší logistická funkce od Gompertzovy funkce?
4. Vysvětlete princip aproximace trendu pomocí splajnů.



### Korespondenční úkol 2

Vyberte libovolnou časovou řadu a znázorněte ji graficky. Navrhněte vhodnou matematickou funkci pro aproximaci trendu této řady a pokuste se určit její parametry pomocí nějakého dostupného matematického software (lineární, popř. nelineární regrese). Doporučená struktura:

- 1) stručný popis vybraných dat (včetně původu),
- 2) tvar vybrané funkce pro aproximaci trendu a zdůvodnění výběru,
- 3) interpretace hodnot vypočtených parametrů.



### Pojmy k zapamatování:

- metoda vyrovnávání dolních a horních výkyvů,
- metoda průměrování cyklů,
- metoda nejmenších čtverců,
- metoda nejmenších vážených čtverců,
- funkce aproximující trend:

- konstantní funkce,
- lineární funkce,
- kvadratická funkce,
- exponenciální funkce,
- modifikovaná exponenciální funkce,
- logistická funkce,
- Gompertzova funkce,
- splajnové funkce,
- růstová funkce.

### **Shrnutí**

V této kapitole se zabýváme klasickými, tj. neadaptivními, přístupy k analýze trendové složky. Jsou popsány funkce, které slouží nejčastěji k aproximaci trendu, a také metody pro odhadování jejich parametrů.







## 3 METODY KLOUZAVÝCH PRŮMĚRŮ A KLOUZAVÝCH MEDIÁNŮ

### Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte principy metody klouzavých průměrů, metody klouzavých mediánů a metody adaptivních vah,
- naučíte se, jak správně volit parametry uvedených metod,
- osvojíte si princip centrování ekonometrických časových řad.

**Klíčová slova:** klouzavé průměry, délka klouzavých průměrů, řád klouzavých průměrů, klouzavé mediány, délka klouzavých mediánů, adaptivní váhy.

V této kapitole se budeme zabývat třemi adaptivními přístupy k analýze trendové složky časové řady: metodě klouzavých průměrů, metodě klouzavých mediánů a metodě adaptivních vah. . Principy těchto metod vysvětlíme na konkrétních příkladech tak, abyste je dokázali správně pochopit.



### 3.1 Metoda klouzavých průměrů

Metoda klouzavých průměrů je adaptivní, což znamená, že je schopna pracovat s takovými časovými řadami, jejichž trend podléhá časovým změnám. V tomto případě nelze aproximovat „celou“ časovou řadu matematickou funkcí (např. polynomem) s neměnnými parametry, ale je možné použít polynomu nějakého nízkého stupně k vyrovnání krátkých úseků řady. Vychází se z předpokladu, že výchozí časová řada je očištěna od sezónních a cyklických fluktuací.

#### 3.1.1 Princip metody klouzavých průměrů

Metoda klouzavých průměrů je založena na vyrovnávání krátkých úseků časové řady polynomickými funkcemi. Má dva parametry:

- délku klouzavých průměrů  $a$
- řád klouzavých průměrů.

**Délka klouzavých průměrů** udává skutečnou délku vyrovnávaných úseků časové řady. Předpokládá se, že je to liché číslo ( $2m + 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ).

Délka klouzavých  
průměrů

**Řád klouzavých průměrů** ( $r$ ) reprezentuje stupeň vyrovnávacího polynomu.

Při konstrukci klouzavých průměrů se postupuje takto. Nejprve vyrovnáme pomocí vhodného polynomu prvních  $2m+1$  členů časové řady, tj. členy  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2m+1}$ , a hodnotu vyrovnávacího polynomu v „prostředním“ bodě (v čase  $t=m+1$ ) považujeme za vyrovnanou hodnotu  $\hat{Y}_{m+1}$  dané řady v tomto bodě. Pro získání vyrovnané hodnoty  $\hat{Y}_{m+2}$  (v čase  $t=m+2$ ) provedeme tutéž operaci s hodnotami  $Y_2, Y_3, \dots, Y_{2m+2}$ , atd. Můžeme si to představit tak, že se podél zkoumané časové řady postupně (vždy o jednu hodnotu) posouvá „okno“ o délce  $2m+1$  a s hodnotami, které „leží“ uvnitř tohoto okna, se provede naznačená operace. Vyrovnané hodnoty časové řady jsou pak tvořeny lineárními kombinacemi hodnot původní řady s pevně určenými koeficienty. Nyní si ukážeme postup na konkrétním příkladu (viz [8]).

Vyrovnejme danou časovou řadu metodou klouzavých průměrů délky  $2m+1=5$  a řádu  $r=3$ . V podstatě jde vždy o vyrovnávání pěti hodnot uvažované časové řady ( $Y_{t+\tau}$ ,  $\tau=-2, -1, 0, 1, 2$ ) polynomem 3. stupně. Koeficienty vyrovnávacího polynomu se určí metodou nejmenších čtverců, tj. minimalizací výrazu

$$\sum_{\tau=-2}^2 (Y_{t+\tau} - \beta_0 - \beta_1\tau - \beta_2\tau^2 - \beta_3\tau^3)^2.$$

Odpovídající soustava normálních rovnic pro odhady  $b_j$  koeficientů  $\beta_j$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ , má tvar

$$\sum_{\tau=-2}^2 Y_{t+\tau}\tau^j - b_0 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^j - b_1 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+1} - b_2 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+2} - b_3 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^{j+3} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro lichá  $j$  platí obecně  $\sum_{\tau=-2}^2 \tau^j = 0$ , uvedená soustava

se podstatně zjednoduší

$$\begin{aligned} 5b_0 &+ 10b_2 &= \sum_{\tau=-2}^2 Y_{t+\tau}, \\ 10b_1 &+ 34b_3 &= \sum_{\tau=-2}^2 \tau Y_{t+\tau}, \\ 10b_0 &+ 34b_2 &= \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 Y_{t+\tau}, \\ 34b_1 &+ 130b_3 &= \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 Y_{t+\tau}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

V této fázi nám stačí jen hodnota vyrovnávacího polynomu v bodě  $\tau = 0$ , tj. odhad  $b_0$ . Řešením první a třetí rovnice soustavy (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{35} \left( 17 \sum_{\tau=-2}^2 Y_{t+\tau} - 5 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 Y_{t+\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{35} (-3Y_{t-2} + 12Y_{t-1} + 17Y_t + 12Y_{t+1} - 3Y_{t+2}). \end{aligned}$$

Odhad  $b_0$  představuje současně vyrovnanou hodnotu časové řady v čase  $t$ , takže

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{35} (-3Y_{t-2} + 12Y_{t-1} + 17Y_t + 12Y_{t+1} - 3Y_{t+2}),$$

což se obvykle (symbolicky) zapisuje ve tvaru

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{35} (-3, 12, 17, 12, -3) Y_t.$$

Z uvedeného je zřejmé, že klouzavé průměry délky  $2m+1$  jsou lineární kombinace hodnot  $Y_{t-m}, Y_{t-m+1}, \dots, Y_{t+m}$  s pevně určenými koeficienty. Tyto koeficienty (racionální čísla) se nazývají **váhy klouzavých průměrů** a jsou tabelovány (např. v monografii [8]).

### 3.1.2 Váhy klouzavého průměru

Pro váhy klouzavých průměrů platí následující tvrzení.

- Součet vah klouzavého průměru je roven 1.
- Váhy jsou symetrické „kolem“ střední hodnoty, tj. koeficienty u členů  $Y_{t-j}$  a  $Y_{t+j}$  pro  $j = 1, 2, \dots, m$  jsou shodné.
- Je-li řád  $r$  klouzavého průměru sudé číslo, pak klouzavé průměry řádu  $r$  a  $r+1$  jsou identické.

Váhy klouzavého  
průměru

### 3.1.3 Vyrovnání počátečních a koncových úseků časové řady

Vyrovnáním časové řady, které bylo popsáno v odstavci 3.1.1, získáme vyrovnané hodnoty pouze pro  $t = m+1, m+2, \dots, n-m$ , což znamená, že prvních  $m$  hodnot, stejně jako posledních  $m$  hodnot, dané řady zůstane nevyrovnané. Proto si nyní ukážeme, jak se získají vyrovnané hodnoty na počátku a na konci časové řady, přitom budeme navazovat na řešení příkladu z odstavce 3.1.1.

Nejprve odvodíme vztahy pro vyrovnané hodnoty  $\hat{Y}_{n-1}$  a  $\hat{Y}_n$ . Postup je založen na vyrovnání posledních pěti pozorování časové řady, tj. pozorování  $Y_{n-4}, Y_{n-3}, Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n$ , pomocí polynomu 3. stupně

$$\hat{Y}_{n-2+\tau} = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + b_3\tau^3 \quad (3.2)$$

pro hodnoty  $\tau = 1$  a  $\tau = 2$ . K tomu ovšem potřebujeme znát ještě odhady  $b_1, b_2$  a  $b_3$ . Řešením soustavy (3.1) dostaneme

$$b_1 = \frac{1}{72} \left( 65 \sum_{\tau=-2}^2 \tau Y_{t+\tau} - 17 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 Y_{t+\tau} \right),$$

$$b_2 = \frac{1}{14} \left( \sum_{\tau=-2}^2 \tau^2 Y_{t+\tau} - 2 \sum_{\tau=-2}^2 Y_{t+\tau} \right),$$

$$b_3 = \frac{1}{72} \left( 5 \sum_{\tau=-2}^2 \tau^3 Y_{t+\tau} - 17 \sum_{\tau=-2}^2 \tau Y_{t+\tau} \right).$$

Jestliže nyní dosadíme za všechny odhady do vztahu (3.2) a postupně volíme  $\tau = 1$  a  $\tau = 2$ , získáme pro vyrovnané hodnoty  $\hat{Y}_{n-1}$  a  $\hat{Y}_n$

$$\hat{Y}_{n-1} = \frac{1}{35} (2, -8, 12, 27, 2) Y_{n-2},$$

$$\hat{Y}_n = \frac{1}{70} (-1, 4, -6, 4, 69) Y_{n-2}.$$

Koncové klouzavé průměry

Právě uvedené vztahy se nazývají **koncové klouzavé průměry** a příslušné koeficienty (u jednotlivých pozorování) jsou jejich váhy.

Počáteční klouzavé průměry

Analogickým postupem použitým na vyrovnání prvních pěti pozorování dostaneme pro **počáteční klouzavé průměry** vztahy

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{70} (69, 4, -6, 4, -1) Y_2,$$

$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{35} (2, 27, 12, -8, 2) Y_2.$$

### 3.1.4 Predikce v časové řadě

Vztahu (3.2) můžeme použít i pro konstrukci krátkodobých předpovědí. Položíme-li  $\tau = 3$ , můžeme psát

$$\hat{Y}_{n+1}(n) = \frac{1}{5} (-4, 11, -4, -14, 16) Y_{n-2}, \quad (3.3)$$

kde  $\hat{Y}_{n+1}(n)$  značí předpověď hodnoty  $Y_{n+1}$  zkonstruovanou v čase  $t = n$ . Uvedený postup je použitelný jen pro získání krátkodobých předpovědí. Obecně totiž platí, že čím je vzdálenější horizont předpovědi, tím je jeho spolehlivost menší. Vztah (3.3) je příkladem **předpovědních klouzavých průměrů**.

Předpovědní klouzavé průměry



Váhy všech typů klouzavého průměru jsou tabelovány (např. v monografii [8]). Povšimněte si dále, že součet vah koncových, počátečních i předpovědních klouzavých průměrů je také roven 1, ovšem symetrie „kolem“ střední hodnoty je narušena.

### 3.1.5 Volba parametrů metody

Parametry metody klouzavých průměrů se zpravidla volí subjektivně na základě posouzení charakteru experimentálních dat s tím, že se preferují vyrovnávací polynomy co nejnižšího řádu a délka podle požadovaného stupně vyhlazení.

Délka klouzavých průměrů by měla odpovídat periodě sezónních nebo cyklických fluktuací, které chceme eliminovat (vyhladit). Pokud tomu tak není, periodické fluktuace zůstanou po vyhlazování zachovány.

V monografii [8] se uvádí objektivní kritérium pro určení řádu klouzavých průměrů. Navrhované kritérium má tvar

$$V_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\Delta^k Y_t)^2}{\binom{2k}{k}(n-k)},$$

kde  $\Delta^k Y_t$  je řada  $k$ -tých diferencí původní časové řady. Z teorie vyplývá, že pro  $k \geq r+1$  představuje hodnota kritéria  $V_k$  odhad rozptylu bílého šumu. V praxi se postupně počítají hodnoty  $V_1, V_2, \dots$ , dokud nezjistíme, že tyto hodnoty začínají konvergovat k nějaké konstantě. Jsou-li hodnoty  $V_{r+1}, V_{r+2}, \dots$  již blízké této konstantě, doporučuje se vybrat klouzavé průměry řádu  $r$ . Hodnoty  $V_k$  nejsou navzájem nezávislé a nemusí zjevně konvergovat k nějaké konstantě. V každém případě však uvedený postup umožňuje nalézt horní hranici pro řád klouzavých průměrů.

### 3.1.6 Jednoduché klouzavé průměry

Výpočet klouzavých průměrů se podstatně zjednoduší, jestliže zvolíme tzv. **jednoduché klouzavé průměry**. Jsou to prosté aritmetické průměry jednotlivých pozorování časové řady. Např. jednoduché klouzavé průměry délky 5 mají tvar

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{5}(1,1,1,1,1)Y_t.$$

Je zřejmé, že jednoduchý klouzavý průměr liché délky  $2m+1$  odpovídá „obyčejnému“ klouzavému průměru řádu 0 nebo 1 téže délky. Také konstrukce předpovědí budoucích hodnot časové řady  $Y_{t+\tau}$ ,  $\tau > 0$ , pomocí jednoduchých klouzavých průměrů liché délky je velmi snadná, platí totiž obecně

Jednoduché  
klouzavé průměry

$$\hat{Y}_{n+\tau} = \frac{1}{2m+1} (1, 1, \dots, 1) Y_{n-m},$$

přičemž v okrouhlé závorce je právě  $2m+1$  jedniček.

Vyrovňování časové řady pomocí jednoduchých klouzavých průměrů sudé délky není vhodné, protože vyrovnaná hodnota pak neodpovídá žádnému okamžiku pozorování. Ale taková situace běžně nastává u ekonomických časových řad, kdy je přirozené volit délku klouzavých průměrů rovnou 12 (měsíční pozorování), resp. 4 (kvartální pozorování). V takových případech se doporučuje použít tzv. **centrované klouzavé průměry**.

Centrované  
klouzavé průměry

Uvažujme např. ekonomickou časovou řadu měsíčních pozorování. Aplikace jednoduchých klouzavých průměrů délky 12 by sice umožnila eliminovat sezónní fluktuační řady, ale aritmetický průměr lednové až prosincové hodnoty za určitý rok nelze přiřadit žádnému skutečnému okamžiku pozorování, protože „padne“ právě doprostřed mezi červnové a červencové pozorování. Jestliže však zprůměrnujeme dva takové sousední jednoduché klouzavé průměry, které odpovídají středům intervalů červen-červenec a červenec-srpen, pak výslednou vyrovnanou hodnotu můžeme přiřadit červencovému pozorování. Takto vytvoříme centrovaný klouzavý průměr délky 13 ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{12} (Y_{t-6} + Y_{t-5} + \dots + Y_{t+5}) + \frac{1}{12} (Y_{t-5} + Y_{t-4} + \dots + Y_{t+6}) \right\} = \\ &= \frac{1}{24} (Y_{t-6} + 2Y_{t-5} + 2Y_{t-4} + \dots + 2Y_{t+4} + 2Y_{t+5} + Y_{t+6}). \end{aligned}$$

Právě uvedený vztah umožňuje spočítat vyrovnanou červencovou hodnotu tak, že použijeme únorové až prosincové pozorování příslušného roku s vahami  $\frac{1}{12}$  a lednová pozorování uvažovaného a následujícího roku s vahami  $\frac{1}{24}$ .

Analogicky se postupuje i v případě kvartálních pozorování, kdy používáme centrované klouzavé průměry délky 5 ve tvaru

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{8} (Y_{t-2} + 2Y_{t-1} + 2Y_t + 2Y_{t+1} + Y_{t+2}).$$

### 3.1.7 Vliv metody na složky časové řady

Z teoretických úvah vyplývají následující závěry.

- Metoda klouzavých průměrů by neměla mít žádný významný vliv na průběh trendové složky.

- Sezónní složka (periodické fluktuační vyšších frekvencí) by měla být po aplikaci metody klouzavých průměrů v podstatě eliminována, zatímco značný podíl cyklické složky (fluktuační nízkých frekvencí) zůstává ve vyrovnané řadě.
- Bílý šum přestává mít po aplikaci metody klouzavých průměrů vlastnost nekorelovanosti.

## 3.2 Metoda klouzavých mediánů

Metoda klouzavých mediánů patří rovněž k metodám adaptivním, protože umožňuje analyzovat řady s trendovou složkou, která podléhá časovým změnám. Princip této metody, jakož i praktické zkušenosti s její aplikací, popisuje J. W. Tukey v monografii [23].

### 3.2.1 Princip metody klouzavých mediánů

Metoda je založena na vyrovnávání krátkých úseků časové řady pomocí mediánu. Na rozdíl od metody klouzavých průměrů má pouze jediný parametr, a to délku klouzavých mediánů.

**Délka klouzavých mediánů** určuje skutečnou délku vyrovnávaných úseků časové řady. Stejně jako v případě metody klouzavých průměrů se doporučuje, aby délka klouzavých mediánů byla rovna vhodnému lichému číslu ( $2m+1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ).

Délka klouzavých  
mediánů

Postup při konstrukci klouzavých mediánů je následující. Nejprve vyrovnáme pomocí mediánu prvních  $2m+1$  členů časové řady, tj. členy  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2m+1}$ , a hodnotu tohoto mediánu považujeme za vyrovnanou hodnotu  $\hat{y}_{m+1}$  dané řady v prostředním bodě (v čase  $t = m+1$ ). Pro získání vyrovnané hodnoty  $\hat{Y}_{m+2}$  (v čase  $t = m+2$ ) provedeme tutéž operaci, tj. určení mediánu, s hodnotami  $Y_2, Y_3, \dots, Y_{2m+2}$ , atd. Můžeme si to názorně představit tak, že se podél zkoumané časové řady postupně (vždy o jednu hodnotu) posouvá „okno“ o délce  $2m+1$  a z hodnot, které „leží“ uvnitř tohoto okna, se spočte medián. Nyní si ukážeme postup na konkrétním příkladě (viz [25]).

**Příklad 3.1.** Vyrovnáme hypotetickou časovou řadu (viz tab. 3.1, sloupec 2) metodou klouzavých mediánů délky  $2m+1=3$ . Na první pohled je zřejmé, že hodnoty „rozumně“ vyhlazené řady by měly pomalu růst od cca 5 do cca 20. Přitom nemusíme brát v úvahu odlehlou hodnotu 1304, i když tato hodnota může být reálná, a tedy indikovat nějakou významnou událost.



Ve 3. sloupci tab. 3.1 jsou uvedeny hodnoty vyrovnané metodou klouzavých mediánů délky 3. V této souvislosti je vhodné zdůraznit, že metodu klouzavých mediánů je možno aplikovat na danou časovou řadu opakovaně. Výsledek takové opakované (tedy dvojnásobné) aplikace metody je zaznamenán v posledním sloupci tab. 3.1. Povšimněte si skutečnosti, že další aplikace metody klouzavých mediánů na údaje v posledním sloupci tabulky už nevede k žádným změnám.

Tab. 3.1. Vyrovnání časové řady metodou klouzavých mediánů délky 3

Čas ( $t$ )	Výchozí řada ( $Y_t$ )	Vyrovnaná řada ( $\hat{Y}_t$ )	Dvojnásobně vyr. řada ( $\hat{\hat{Y}}_t$ )
1	4	?	?
2	7	7	?
3	9	7	7
4	3	4	4
5	4	4	4
6	11	11	11
7	12	12	12
8	1304	12	12
9	10	15	12
10	15	12	13
11	12	13	13
12	13	13	13
13	17	17	17
14	20	20	?
15	24	?	?

Metoda klouzavých mediánů je ve srovnání s metodou klouzavých průměrů podstatně jednodušší, vyrovnání dané časové řady je možno provádět „z paměti“, tj. bez využití nástrojů výpočetní techniky. Navíc uvažovaná metoda není citlivá na odlehlé (nepřiměřeně vysoké nebo nízké) hodnoty pozorování.

### 3.2.2 Vyrovnávání počátečních a koncových úseků řady

Postup popsany v předcházejícím odstavci nám neumožňuje určit vyrovnané hodnoty na počátku a konci zkoumané časové řady, což je



v tab. 3.1 vyznačeno symbolem „?“ . Pro stanovení těchto vyrovnaných hodnot doporučuje Tukey [23] dva postupy.

První z nich je velmi jednoduchý a spočívá v prostém kopírování hodnot počátečních a koncových pozorování do příslušných hodnot vyrovnané řady. To znamená, že se ve třetím sloupci tab. 3.1 nahradí symboly „?“ postupně hodnotami 4 (první vyrovnaná hodnota) a 24 (poslední vyrovnaná hodnota). Analogicky se postupuje i při doplňování chybějících vyrovnaných hodnot v posledním sloupci uvažované tabulky.

Druhý doporučený postup je poněkud složitější. První, resp. poslední, vyrovnaná hodnota se určí jako medián ze tří údajů:

- hodnoty prvního, resp. posledního, pozorování,
- nejbližší vyrovnané hodnoty a
- výsledku lineární extrapolace dvou nejbližších vyrovnaných hodnot na okamžik „ležící“ právě o jednu časovou jednotku před prvním pozorováním, resp. za posledním pozorováním, zkoumané řady.

### 3.3 Metoda adaptivních vah

Metoda adaptivních vah je v podstatě zobecněním metody klouzavých průměrů.

#### 3.3.1 Princip metody adaptivních vah

Podobně jako u předcházejících metod se vychází z předpokladu, že pro zkoumanou časovou řadu platí

$$Y_t = Tr_t + \varepsilon_t.$$

Předpovědi se konstruují jako vážený průměr všech minulých hodnot časové řady, přitom váhy jednotlivých pozorování se postupně adaptují (modifikují) vždy v okamžiku, kdy se přidává výsledek nového pozorování. Pro stanovení předpovědí se používá vztah

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1}(t) &= \sum_{i=1}^M w_i(t) Y_{t+1-i} = \\ &= w_1(t) Y_t + w_2(t) Y_{t-1} + \dots + w_M Y_{t+1-M}, \end{aligned}$$

v němž  $M$  označuje délku klouzavých průměrů a  $w_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , váhy jednotlivých pozorování v čase  $t$ . V okamžiku, kdy máme k dispozici nově pozorování  $y_{t+1}$ , se váhy adaptují podle vzorce

$$w_i(t+1) = w_i(t) + 2ke_{t+1} Y_{t+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

Modifikační  
konstanta

kde  $k$  je tzv. **modifikační konstanta** a  $e_{t+1} = Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1}(t)$  příslušná chyba předpovědi. Počáteční hodnoty vah se nastavují tak, aby platilo  $w_i(0) = 1/M$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ .

Podle autorů monografie [25] poskytuje tato metoda lepší výsledky než metoda klouzavých průměrů.



### Kontrolní otázky

1. Jaký je princip metody klouzavých průměrů?
2. Jaké význačné vlastnosti mají váhy klouzavých průměrů?
3. Jak se určují počáteční, koncové a předpovědní klouzavé průměry?
4. Kdy se používají centrované klouzavé průměry?
5. Jak ovlivňuje metoda klouzavých průměru jednotlivé složky časové řady?
6. Vysvětlete princip metody klouzavých mediánů.
7. Vysvětlete princip metody adaptivních vah.



**Korespondenční úkol 3.** Vyberte libovolnou časovou řadu obsahující minimálně 30 pozorování a vyrovnejte ji metodou jednoduchých klouzavých průměrů délky 3 a metodou klouzavých mediánů délky 5.

Doporučená struktura:

1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. vyrovnané hodnoty časové řady pomocí metody jednoduchých klouzavých průměrů délky 3,
3. vyrovnané hodnoty časové řady pomocí metody klouzavých mediánů délky 5,
4. porovnání účinnosti obou metod.



### Pojmy k zapamatování:

- metoda klouzavých průměrů,
  - délka klouzavých průměrů,
  - řád klouzavých průměrů,
  - váhy klouzavých průměrů,
  - počáteční klouzavé průměry,
  - koncové klouzavé průměry,
  - předpovědní klouzavé průměry,
  - jednoduché klouzavé průměry,
  - centrované klouzavé průměry,
- metoda klouzavých mediánů,
  - délka klouzavých mediánů,

- metoda adaptivních vah,
  - modifikační konstanta.

### **Shrnutí**

Tato kapitola je věnována třem adaptivním přístupům k analýze trendové složky, a to metodám klouzavých průměrů, klouzavých mediánů a adaptivních vah. Obsahuje podrobné vysvětlení základních principů, z nichž uvedené metody vycházejí, a také návod, jak tyto metody aplikovat v praxi.





## 4 EXPONENCIÁLNÍ VYROVNÁVÁNÍ

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte princip metody exponenciálního vyrovnávání,
- naučíte se, jak optimálně volit hodnotu vyrovnávací konstanty,
- pochopíte souvislost mezi optimální hodnotou vyrovnávací konstanty a mechanismy, které generují danou časovou řadu.

**Klíčová slova:** jednoduché exponenciální vyrovnávání, dvojité exponenciální vyrovnávání (Brownův algoritmus), Holtův algoritmus, trojitě exponenciální vyrovnávání, vyrovnávací konstanty, vyrovnávací statistiky.

Tato kapitola se zabývá metodou exponenciálního vyrovnávání, která představuje jeden z nejužívanějších přístupů k analýze trendové složky časové řady. Věnujte výkladu náležitou pozornost, abyste pochopili princip této metody a naučili se jí správně využívat při analýze vlastních experimentálních dat.



### 4.1 Princip metody

Metoda exponenciálního vyrovnávání [7,8,9] je založena na aplikaci metody vážených nejmenších čtverců na všechna dostupná pozorování dané časové řady s tím, že váhy jednotlivých pozorování se směrem do minulosti exponenciálně zmenšují. Vyrovnané hodnoty  $\hat{Y}_t$  časové řady se určují tak, aby minimalizovaly hodnotu výrazu

$$\sum_{j=0}^{\infty} (Y_{t-j} - \hat{Y}_{t-j})^2 \delta^j, \quad (4.1)$$

v němž  $\delta$  označuje tzv. **diskontní konstantu** splňující podmínku  $0 < \delta < 1$ . Uvedený výraz má tvar nekonečného součtu, přestože v praxi známe jen konečný počet pozorování  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Hypotetické prodloužení časové řady do minulosti má však „rozumné“ oprávnění, umožňuje totiž podstatně zjednodušit vzorce pro výpočet vyrovnaných hodnot a předpovědí.

Princip exponenciálního vyrovnávání je po výpočetní stránce velmi jednoduchý, má malé nároky na potřebný objem uchovávaných dat a dovoluje snadnou konstrukci předpovědí.

Ve všech variantách exponenciálního vyrovnávání se předpokládá, že vyrovnávaná časová řada má tvar

$$Y_t = Tr_t + \varepsilon_t.$$

Vyrovnávací  
konstanta

## 4.2 Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Jednoduché exponenciální vyrovnávání se používá v případě, že trendová složka dané časové řady je v krátkých úsecích konstantní, tj. platí

$$Tr_t = \beta_0.$$

Úkolem je přitom nalézt odhad  $b_0$  parametru  $\beta_0$ . Protože jde o adaptivní přístup k trendové složce, bude tento odhad závislý na časovém okamžiku, ve kterém se provádí. Označme symbolem  $b_0(t)$  odhad parametru  $\beta_0$  zkonstruovaný v čase  $t$  na základě všech pozorování  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , jež jsou v čase  $t$  k dispozici. Tento odhad získáme minimalizací výrazu

$$\sum_{j=0}^{\infty} (Y_{t-j} - \beta_0(t))^2 \delta^j$$

vzhledem k  $\beta_0$ . Aplikace metody nejmenších čtverců vede k normální rovnici

$$b_0(t) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j Y_{t-j}.$$

Vzhledem k tomu, že  $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j = \frac{1}{1-\delta}$ , můžeme tuto rovnici upravit na tvar

$$b_0(t) = (1-\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j Y_{t-j}.$$

Získaný odhad  $b_0(t)$  bude představovat nejen odhadnutou úroveň trendu v čase  $t$ , ale současně i vyrovnanou hodnotu  $\hat{Y}_t$  uvažované časové řady, proto můžeme psát

$$\hat{Y}_t = (1-\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j Y_{t-j} = (1-\delta) [Y_t + \delta Y_{t-1} + \delta^2 Y_{t-2} + \dots]. \quad (4.2)$$

Ze vztahu (4.2) je zřejmé, že vyrovnaná hodnota řady v čase  $t$  je váženým součtem všech pozorování řady až do času  $t$  včetně s exponenciálně klesajícími vahami  $1-\delta, (1-\delta)\delta, (1-\delta)\delta^2, \dots$ .

Výraz (4.2) můžeme upravit na tvar

$$\hat{Y}_t = (1-\delta)Y_t + \delta\hat{Y}_{t-1},$$

který vlastně reprezentuje rekurentní předpis pro výpočet vyrovnaných hodnot analyzované časové řady. Uvedený vztah se pro praktické účely přepisuje na tvar

$$\hat{Y}_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_{t-1}, \quad (4.3)$$

v němž  $\alpha = 1 - \delta$  se nazývá **vyrovnávací konstanta**.

Vztah (4.3) dokumentuje již uvedené výhody exponenciálního vyrovnávání (jednoduchost výpočtu vyrovnaných hodnot, nízké nároky na

objem skladovaných dat). V čase  $t-1$  stačí uložit do paměti pouze vyrovnanou hodnotu  $\hat{Y}_{t-1}$  a předcházející vyrovnané hodnoty  $\hat{Y}_{t-2}, \hat{Y}_{t-3}, \dots$  lze zapomenout.

Pro stanovení předpovědí se používá vztahu

$$\hat{Y}_{n+\tau}(n) = \hat{Y}_n,$$

což znamená, že předpovědi jsou pro všechny hodnoty  $\tau$  konstantní, rovné poslednímu pozorování.

Abychom mohli použít rekurentního vzorce (4.3), musíme určit vyrovnanou hodnotu  $\hat{Y}_0$ . Pro stanovení této hodnoty máme dvě možnosti:

1. určíme  $\hat{Y}_0$  jako aritmetický průměr vhodného počtu počátečních pozorování,
2. aplikujeme tzv. **metodu backcasting** založenou na extrapolaci řady směrem do minulosti.

#### 4.2.1 Volba vyrovnávací konstanty

Na základě praktických zkušeností doporučuje Cipra [9] vybírat hodnotu vyrovnávací konstanty  $\alpha$  z intervalu  $(0; 0,3]$ . Přitom nízká hodnota  $\alpha$  odpovídá stavu, kdy se mechanismus generující danou časovou řadu podstatně nemění, takže se poslednímu pozorování připisuje jen malá váha. Hodnoty  $\alpha$  se upřeshňují dvěma postupy:

- a) pomocí empirického vzorce  $\alpha = \frac{1}{m+1}$ , kde  $2m+1$  označuje nejvhodnější délku jednoduchých klouzavých průměrů pro vyhlazení dané řady,
- b) pomocí simulace, jež spočívá v tom, že se postupně volí  $\alpha = 0,01; 0,02; \dots; 0,30$  a nakonec se vybere taková hodnota  $\alpha$ , která poskytuje nejlepší předpovědi, tj. minimální hodnotu kritéria SSE.

Z uvedeného je zřejmé, že se jednoduché exponenciální vyrovnávání v případě simulačního přístupu realizuje ve dvou fázích. V první fázi se určí „optimální“ hodnota vyrovnávací konstanty, ve druhé se provede vyrovnání časové řady s optimální hodnotou  $\alpha$  a spočtou se předpovědi.

Ve statistickém software NCSS se jednoduché exponenciální vyrovnávání realizuje pomocí metody Exponential Smoothing–Horizontal.

### 4.3 Dvojité exponenciální vyrovnávání (Brownův algoritmus)

Při aplikaci metody dvojitého exponenciálního vyrovnávání se předpokládá, že trend zkoumané řady je v krátkých časových úsecích lineární, tj.

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t.$$

Odhady  $b_0(t)$ , resp.  $b_1(t)$ , parametrů  $\beta_0$ , resp.  $\beta_1$ , určíme minimalizací výrazu

$$\sum_{j=0}^{\infty} (Y_{t-j} - \beta_0 + \beta_1 j)^2 \delta^j, \quad 0 < \delta < 1.$$

Metodou nejmenších čtverců dostaneme soustavu normálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} b_0(t) - \frac{\delta}{1-\delta} b_1(t) &= (1-\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j Y_{t-j}, \\ \delta b_0(t) - \frac{\delta(\delta+1)}{1-\delta} b_1(t) &= (1-\delta)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j \delta^j Y_{t-j}. \end{aligned} \quad (4.4)$$



#### Úkol k textu

Dokažte, že platí:  $\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j = \frac{1}{1-\delta}$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} j \delta^j = \frac{\delta}{(1-\delta)^2}$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \delta^j = \frac{\delta(1+\delta)}{(1-\delta)^3}$ .

Návod: platnost druhého a třetího vztahu dokážete postupným derivováním prvního vztahu podle  $\delta$ .

Pro zjednodušení zápisu soustavy (4.4) se zavádějí dvě speciální veličiny:

a) **jednoduchá vyrovnávací statistika**  $S_t$  definovaná předpisem

$$S_t = (1-\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j Y_{t-j},$$

b) **dvojitá vyrovnávací statistika**  $S_t^{[2]}$  definovaná předpisem

$$S_t^{[2]} = (1-\delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j S_{t-j}.$$

Po zavedení vyrovnávací konstanty vztahem  $\alpha = 1 - \delta$  lze obě vyrovnávací statistiky přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha Y_t + (1-\alpha) S_{t-1} \\ S_t^{[2]} &= \alpha S_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{[2]}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pomocí těchto vyrovnávacích statistik lze řešení soustavy (4.4) přepsat ve tvaru

Vyrovnávací statistiky



$$b_0(t) = 2S_t - S_t^{[2]},$$

$$b_1(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_t - S_t^{[2]}).$$

Pro předpovědi  $\hat{Y}_{t+\tau}$  zkonstruované v čase  $t$  zřejmě platí

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+\tau} &= b_0(t) + b_1(t)\tau = (2S_t - S_t^{[2]}) + \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_t - S_t^{[2]}) = \\ &= \left(2 + \frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) S_t - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) S_t^{[2]}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Položíme-li ve vztahu (4.6)  $\tau = 0$ , dostaneme pro vyrovnanou hodnotu řady v čase  $t$

$$\hat{Y}_t = b_0(t) = 2S_t - S_t^{[2]}.$$

Pro výpočet statistik se používají rekurentní vzorce (4.5). Počáteční hodnoty  $S_0$  a  $S_0^{[2]}$  se obvykle určují ze vzorců (4.5), v nichž dosadíme za  $b_0(0)$  a  $b_1(0)$  regresní odhady parametrů přímky proložené počátečním úsekem zkoumané časové řady.

Při volbě hodnoty vyrovnávací konstanty  $\alpha$  se omezujeme na interval  $(0; 0,3]$ . Nejvhodnější hodnota vyrovnávací konstanty se určuje podobně jako v případě jednoduchého exponenciálního vyrovnávání: buď pomocí empirického vzorce  $\alpha = \sqrt{\frac{1}{m+1}}$  nebo simulací.

Ve statistickém software MCSS se dvojité exponenciální vyrovnávání realizuje pomocí metody Exponential Smoothing – Trend (Holtova algoritmu). Označíme-li skutečnou hodnotu časové řady v čase  $t$  jako  $Y_t$ , její odhadovaná úroveň trendu  $a_t$  a směrnici lineárního trendu  $b_t$ , pak se při výpočtech používají rekurentní vztahy:

$$a_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}),$$

$$b_t = \gamma(a_t - a_{t-1}) + (1-\gamma)b_{t-1}.$$

Počáteční hodnoty  $a_0$  a  $b_0$  se určují pomocí lineární regrese z prvních 5 pozorování časové řady. Holtův algoritmus [14] pracuje se dvěma vyrovnávacími konstantami:  $\alpha$  (damping factor) a  $\gamma$  (growth damping factor).

#### 4.4 Trojité exponenciální vyrovnávání

Vychází se z předpokladu, že trendová složka je v krátkých časových úsecích řady popsána kvadratickým polynomem, tj.

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2.$$

Odhady parametrů, vyrovnané hodnoty i předpovědi se počítají analogicky jako u dvojitého exponenciálního vyrovnávání. Odvozené vztahy jsou podstatně složitější, vystupuje v nich navíc **trojitá vyrovnávací statistika** definovaná rekurentně jako

$$S_t^{[3]} = \alpha S_t^{[2]} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{[3]}.$$

Podrobnosti jsou uvedeny v monografii R. G. Browna [7].



### Kontrolní otázky

1. Vysvětlíte princip exponenciálního vyrovnávání.
2. Jaké jsou přednosti metod exponenciálního vyrovnávání?
3. Jak se určují optimální hodnoty vyrovnávacích konstant?
4. Jakým způsobem se interpretují hodnoty vyrovnávacích konstant?
5. K čemu slouží vyrovnávací statistiky?



**Korespondenční úkol 4.** Vyberte libovolnou časovou řadu obsahující minimálně 30 pozorování a aplikujte na ni metody:

- a) jednoduchého exponenciálního vyrovnávání (v NCSS metoda Exponential Smoothing – Horizontal),
- b) dvojitého exponenciálního vyrovnání (v NCSS metoda Exponential Smoothing – Trend).

Doporučená struktura:

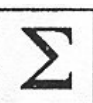
1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. vyrovnané hodnoty časové řady pomocí metody jednoduchého exponenciálního vyrovnávání,
3. vyrovnané hodnoty časové řady pomocí metody dvojitého exponenciálního vyrovnávání,
4. porovnání účinnosti obou metod,
5. interpretace výsledků.



**Pojmy k zapamatování:**

- jednoduché exponenciální vyrovnávání,
- dvojité exponenciální vyrovnávání,
- trojité exponenciální vyrovnávání,
- vyrovnávací konstanty,
- vyrovnávací statistiky.

**Shrnutí**



Tato kapitola obsahuje podrobný výklad principů metod exponenciálního vyrovnávání se zaměřením na jednoduché a dvojité exponenciální vyrovnávání. Zvláštní pozornost je přitom věnována problematice volby „optimální“ hodnoty vyrovnávací konstanty.



## 5 METODY ANALÝZY SEZÓNŇNÍ SLOŽKY

### Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte principy klasických i adaptivních přístupů k analýze sezónní složky časové řady,
- naučíte se v praxi analyzovat časové řady s významnou sezónní složkou.

**Klíčová slova:** sezónní faktory, normalizace sezónních faktorů, elementární přístup k analýze sezónní složky, regresní přístupy, metoda kvalitativních proměnných, Wintersova metoda.

V této kapitole poznáte principy některých klasických (např. regresních) a adaptivních metod pro analýzu sezónních vlivů na průběh časové řady. Doporučujeme Vám, abyste věnovali maximální úsilí pochopení především Wintersovy metody, jež poskytuje v praxi nejlepší výsledky.



Cílem analýzy časové řady s výraznou sezónní složkou může být:

- a) separace sezónní složky v zájmu pochopení sezónních fluktuací zkoumané řady,
- b) očištění řady od sezónních vlivů za účelem efektivního studia dlouhodobého trendu.

### 5.1 Sezónní faktory

Před vlastní analýzou časové řady je třeba rozhodnout, jaký typ dekompozice použijeme. Proto budeme důsledně rozlišovat řady s multiplikativní a aditivní sezónní složkou.

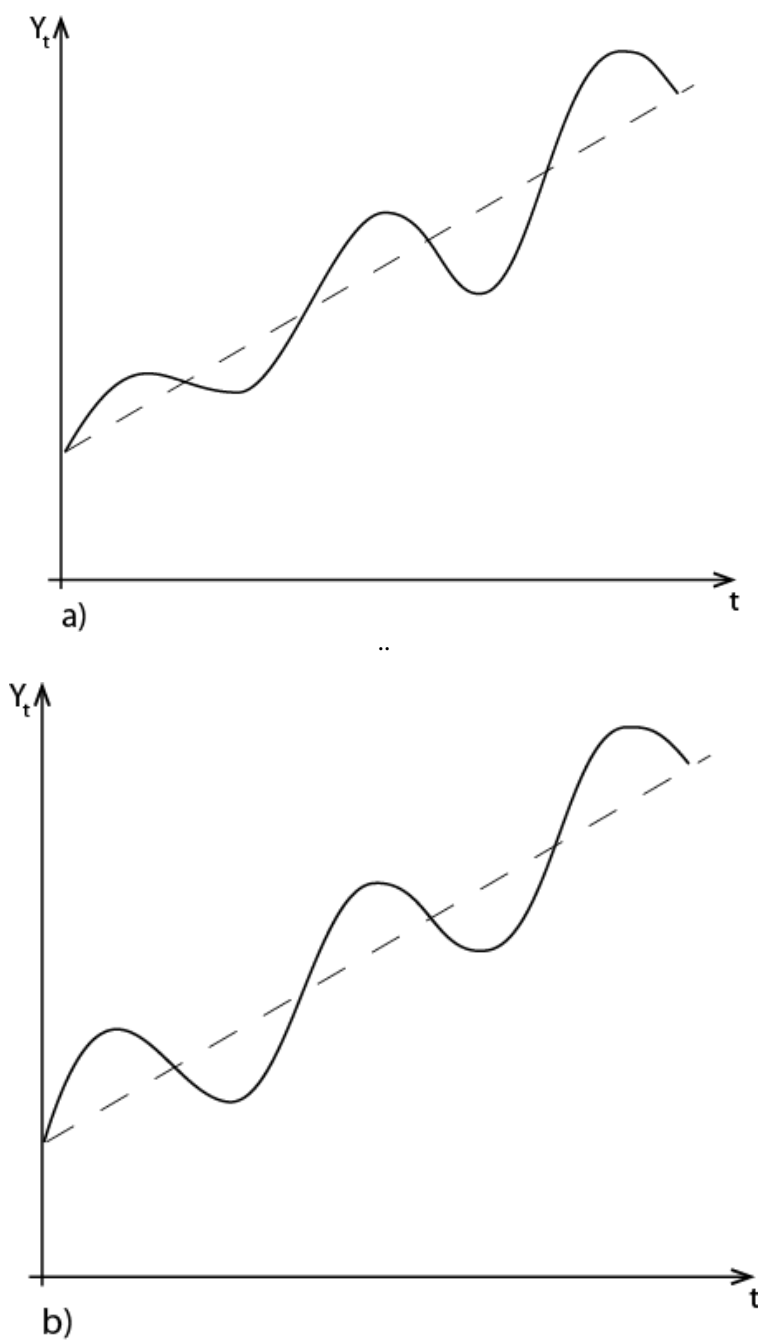
Časová řada vykazuje multiplikativní sezónní složku, jestliže je amplituda sezónních fluktuací přímo úměrná úrovni trendu. Je-li však amplituda sezónních výkyvů prakticky nezávislá na úrovni trendu, je vhodné pracovat s aditivní sezónní složkou. Charakteristické průběhy

multiplikační a aditivní sezónní složky pro časovou řadu kvartálních měření jsou znázorněny na obr. 5.1.

### Sezónní faktory

Hodnoty sezónní složky  $S_{z_t}$  se nazývají **sezónní faktory**. Jejich počet je dán počtem období (sezón)  $L$  v roce ( $L = 4$  pro kvartální pozorování,  $L = 12$  pro měsíční pozorování), označují se

$$S_{z_1}, S_{z_2}, \dots, S_{z_L}.$$



Obr. 5.1: Charakteristický průběh sezónní složky: a) multiplikační, b) aditivní [8]

Hodnoty těchto faktorů se pro jednotlivé roky nemění. Pro jednoznačnost dekompozičního rozkladu se zpravidla požaduje, aby se vliv sezónních faktorů v rámci každého roku celkově vykompenzoval, proto se tyto faktory normalizují (**normování sezónních faktorů**).

Multiplikativní sezónní faktory jsou bezrozměrná čísla. Pro jejich normalizaci se používají podmínky:

$$\sum_{i=1}^L S_{z_i} = L \text{ nebo } \prod_{i=1}^L S_{z_i} = 1.$$

Aditivní sezónní faktory se udávají ve stejných jednotkách jako hodnoty časové řady. Normalizační podmínka má tvar  $\sum_{i=1}^L S_{z_i} = 0$ .

## 5.2 Elementární přístup k sezónní složce

Uvažujme řadu  $\{Y_t\}$  36 měsíčních pozorování (pokrývající tři kalendářní roky počínaje měsícem leden) s výraznou multiplikativní sezónní složkou. Její analýzu provedeme v pěti krocích.

1. krok. Vypočteme centrované klouzavé průměry o délce 13 pomocí vztahu

$$\hat{Y}_t = \frac{1}{24}(Y_{t-6} + 2Y_{t-5} + \dots + 2Y_{t+5} + Y_{t+6}).$$

Tato operace umožní očistit původní časovou řadu od sezónní složky. Vypočtené centrované klouzavé průměry pak odpovídají přibližně součinu  $Tr_t C_t$ , tady  $\hat{Y}_t \approx Tr_t C_t$ .

2. krok. Určíme podíly  $Y_t/\hat{Y}_t$ , pro něž zřejmě platí  $Y_t/\hat{Y}_t \approx S_{z_t} \varepsilon_t$ .

3. krok. Zprůměrnujeme údaje pro jednotlivé kalendářní měsíce. Např. pro leden vypočteme aritmetický průměr pozorování s pořadovými čísly (v časech) 1, 13 a 25. Takto získané hodnoty  $\bar{S}_{z_t}$  budou (při dostatečném počtu pozorování) jen málo ovlivněny reziduální složkou.

4. krok. Použijeme normalizační podmínku ve tvaru  $S_{z_t} = 12 / \sum_{t=1}^{12} \bar{S}_{z_t}$ .

5. krok. Sezónní faktory  $S_{z_t}$  spočtené v předcházejícím kroku můžeme použít např. ke konstrukci sezónně očištěné řady ( $Y/S_{z_t} \approx Tr_t$ ).

*Poznámka.* Uvedeného postupu je využitelný i v případě aditivní sezónní složky s tím rozdílem, že operace násobení a dělení nahradíme operacemi sčítání a odčítání.

### 5.3 Regresní přístupy k sezónní složce

V tomto odstavci budeme uvažovat model

$$Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

Podrobná analýza modelů tohoto typu s různou aproximací trendové složky je popsána ve skriptech [20]. Sezónní složka  $Sz_t$  se obvykle aproximuje pomocí goniometrických funkcí *sinus* a *kosinus* s délkou periody rovnou počtu období  $L$  v roce, popř. zlomku tohoto počtu.

Za předpokladu, že trend uvažované časové řady je lineární, můžeme např. uvažovat model

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \beta_3 \sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \varepsilon_t.$$

Na první pohled je zřejmé, že jde o zobecněný lineární regresní model, takže odhady všech jeho parametrů se vypočtou s použitím metody nejmenších čtverců.

V případě, že výsledný koeficient determinace  $R^2$  je příliš malý, můžeme do modelu postupně přidávat další členy ve tvaru uvažovaných goniometrických s poloviční, čtvrtinovou nebo ještě menší periodou, např.

$$\beta_4 \cos\left(\frac{4\pi t}{L}\right), \beta_5 \sin\left(\frac{4\pi t}{L}\right), \dots$$

Z takto získaných modelů nakonec vybereme ten, který vykazuje maximální hodnotu koeficientu determinace.

Metoda kvalitativních proměnných

Zajímavá je tzv. **metoda kvalitativních proměnných**. Vychází se z modelu

$$Y_t = Tr_t + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t} + \dots + \alpha_L x_{Lt},$$

kde  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_L$  jsou parametry a  $x_{2t}, x_{3t}, \dots, x_{Lt}$  jsou kvalitativní proměnné definované předpisem

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{pro } t = i, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Parametry  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_L$ , stejně jako parametry trendové složky, se určují metodou nejmenších čtverců.



**Příklad 5.1.** Aplikujeme tuto metodu na časovou řadu kvartálních pozorování s lineárně rostoucím trendem a aditivní sezónní složkou. Budeme přitom uvažovat model

$$Y_t = Tr_t + Sz_t + \varepsilon_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t} + \alpha_4 x_{4t} + \varepsilon_t.$$



Metodou nejmenších čtverců (lineární regrese) určíme odhady parametrů  $b_0, b_1, a_2, a_3, a_4$ . Aby byla splněna normalizační podmínka, spočteme  $\bar{a} = (a_2 + a_3 + a_4)/4$ . Výsledek regrese bude následující:

$$Tr_t = (b_0 + \bar{a}) + b_1 t; S_{z_1} = -\bar{a}; S_{z_2} = a_2 - \bar{a}; S_{z_3} = a_3 - \bar{a}; S_{z_4} = a_4 - \bar{a}.$$

Normalizační podmínka je zřejmě splněna:  $\sum_{k=1}^4 S_{z_k} = a_2 + a_3 + a_4 - 4\bar{a} = 0$ .

## 5.4 Wintersova metoda

Wintersova metoda [26] je v podstatě zobecněním metody exponenciálního vyrovnávání s tím, že se navíc adaptivně odhaduje i sezónní složka. Je založena na předpokladu, že trendová složka uvažované řady je v dostatečně krátkých časových intervalech lineární funkcí času, tj.

$$Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t.$$

Jestliže odhady parametrů  $\beta_0, \beta_1$  a  $S_{z_t}$  zkonstruované v čase  $t$  označíme  $b_0(t), b_1(t)$  a  $S_{z_t}(t)$ , pak  $a_0(t) = b_0(t) + b_1(t)t$  představuje úroveň trendu pro čas  $t$ .

### 5.4.1 Multiplikativní Wintersova metoda

V tomto případě se vychází z multiplikativní dekompozice analyzované časové řady. Necht'  $a_0(t), b_1(t), S_{z_t}(t)$  reprezentují postupně úroveň trendu, jeho směrnici a sezónní faktor v čase  $t$ . Pak algoritmus multiplikativní Wintersovy metody (Holtův – Wintersův algoritmus) pracuje s následujícími rekurentními formulami:

$$a_0(t) = \alpha \frac{y_t}{S_{z_{t-L}}(t-L)} + (1-\alpha)[a_0(t-1) + b_1(t-1)],$$

$$b_1(t) = \beta[a_0(t) - a_0(t-1)] + (1-\beta)b_1(t-1),$$

$$S_{z_t}(t) = \gamma \frac{y_t}{a_0(t)} + (1-\gamma)S_{z_{t-L}}(t-L),$$

v nichž  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vyrovnávací konstanty (reálná čísla z intervalu  $(0,1)$ ) a  $L$  počet sezón připadajících na jeden rok.

Použití uvedených rekurentních vztahů ovšem předpokládá, že jsou k dispozici „rozumné“ odhady pro  $a_0(0), b_1(0)$ , a  $S_{z_t}(t)$  pro  $t = 1-L, 2-L, \dots, 0$ . Tyto počáteční odhady se určují v podstatě dvěma postupy:

- pomocí empirických vzorců (viz např. [8,9]),
- pomocí tzv. **metody zpětné extrapolace (backcasting method)**, která jednoduše obrací směr vývoje časové řady a předpovídá tedy směrem do minulosti.

Vyrovňovací konstanty  $\alpha, \beta, \gamma$  se vztahují postupně k úrovni trendu, jeho směrnici a sezónní složce časové řady. Jejich hodnoty udávají, jak rychle se statistické váhy jednotlivých členů časové řady směrem do minulosti zmenšují. Pro stanovení optimálních hodnot vyrovňovacích konstant se používají kritéria MSE nebo MAD.

Jakmile určíme hodnoty  $a_0(t), b_1(t), Sz_t(t)$ , můžeme konstruovat (v čase  $t$ ) předpovědi pro čas  $t + \tau$ ,  $\tau > 0$ , pomocí vztahu

$$\hat{Y}_{t+\tau}(t) = [a_0(t) + b_1(t)\tau] Sz_{t+\tau-L}(t + \tau - L).$$

Namísto odhadu  $Sz_{t+\tau}(t + \tau)$  používáme odhad  $Sz_{t+\tau-L}(t + \tau - L)$ , protože první z odhadů nemáme ještě k dispozici. To znamená, že používáme nejaktuálnější dostupný odhad sezónní složky.

#### 5.4.2 Aditivní Wintersova metoda

Aditivní Wintersova metoda je založena na předpokladu aditivní dekompozice časové řady. Algoritmus této metody využívá následující rekurentní formule:

$$a_0(t) = \alpha(y_t - Sz_{t-L}(t-L)) + (1-\alpha)[a_0(t-1) + b_1(t-1)],$$

$$b_1(t) = \beta[a_0(t) - a_0(t-1)] + (1-\beta)b_1(t-1),$$

$$Sz_t(t) = \gamma(y_t - a_0(t)) + (1-\gamma)Sz_{t-L}(t-L),$$

ve kterých mají všechny použité symboly stejný význam jako u metody multiplikativní.

Předpovědi pro čas  $t + \tau$ ,  $\tau > 0$ , mají tvar

$$\hat{Y}_{t+\tau} = [a_0(t) + b_1(t)\tau] + Sz_{t+\tau-L}(t + \tau - L).$$

Je zřejmé, že popsané varianty Wintersovy metody se navzájem liší jen typem dekompozice časové řady.



#### Kontrolní otázky

1. Jak rozlišíte multiplikativní a aditivní sezónní složku?
2. Jak určíte počet sezónních faktorů?
3. Proč se obvykle provádí normalizace sezónních faktorů?
4. Vysvětlíte princip metody kvalitativních proměnných.
5. Jaký je princip Wintersovy metody?
6. Čím se liší multiplikativní Wintersova metoda od její aditivní varianty?

**Korespondenční úkol 5.** Vyberte libovolnou časovou řadu obsahující minimálně 30 pozorování a aplikujte na ni: metody:

- c) multiplikativní Wintersovu metodu,
- d) aditivní Wintersovu metodu.

V obou případech jde o metodu Expo Smoothing – Seasonal.

Doporučená struktura:

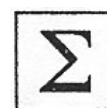
1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. vyrovnané hodnoty časové řady pomocí multiplikativní Wintersovy metody,
3. vyrovnané hodnoty časové řady pomocí aditivní Wintersovy metody,
4. porovnání obou variant Wintersovy metody,
5. interpretace výsledků.

**Pojmy k zapamatování:**

- sezónní faktory,
- normalizace sezónních faktorů,
- elementární přístup k sezónní složce,
- regresní přístup k sezónní složce,
- metoda kvalitativních proměnných,
- Wintersova metoda,
- metoda backcasting (zpětné extrapolace).

**Shrnutí**

Tato kapitola se zabývá problémem, jak zpracovávat v časových řadách sezónní složku. Zavádí se v ní pojem sezónních faktorů a prezentují se způsoby jejich normalizace. Podstatná část kapitoly je věnována popisu základních přístupů k sezónní složce (elementárního přístupu, regresních přístupů a Wintersovy metody), a to jak v případě multiplikativní, tak i aditivní dekompozice.





## 6 POJMY A MATEMATICKÝ APARÁT BOXOVY – JENKINSOVY METODOLOGIE

### Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie (stacionarita, autokorelační funkce, parciální autokorelační funkce),
- naučíte se počítat odhady autokorelační i parciální autokorelační funkce,
- naučíte se zjišťovat identifikační bod teoretické autokorelační i parciální autokorelační funkce.

**Klíčová slova:** striktní stacionarita, slabá stacionarita, autokorelační funkce, Bartlettova aproximace, parciální autokorelační funkce, Quenouilleova aproximace, identifikační body.

Věnujte maximální pozornost pochopení všech základních pojmů, budeme se na ně v následujících kapitolách odvolávat. Problematika určování identifikačního bodu teoretické autokorelační i parciální autokorelační funkce hraje rozhodující úlohu při identifikaci modelu (kapitola 10).



### 6.1 Stacionarita časové řady

V Boxově – Jenkinsově metodologii lze modelovat pouze stacionární časové řady, resp. takové řady, které mohou být převedeny na stacionární. V teorii se rozlišuje dvojí stacionarita striktní a slabá. **Striktní stacionarita** předpokládá, že chování příslušného náhodného procesu, tj. jeho rozdělení, je invariantní vůči časovým posunům. Naproti tomu **slabá stacionarita** je méně omezující; požaduje se, aby příslušný náhodný proces měl konstantní střední hodnotu, konstantní rozptyl a pro kovariance platilo

$$\text{cov}(Y_t, Y_s) = \text{cov}(Y_{t+h}, Y_{s+h}),$$

a to pro libovolné  $h$ . Uvedený vztah představuje požadavek, aby závislost mezi dvěma libovolnými pozorováními závisela jen na jejich časové

Striktní stacionarita

Slabá stacionarita

vzdálenosti a nikoli na jejich časovém umístění v řadě. V dalším výkladu budeme pod pojmem „stacionarita“ chápat slabou stacionaritu.

## 6.2 Autokorelační funkce (ACF)

Teoretická autokorelační funkce řádu  $k$  ( $\rho_k$ ), stejně jako její odhad  $r_k$ , byly již definovány v odstavci 1.5. Její hodnoty se označují stručně jako autokorelace řádu  $k$ . Připomínáme, že autokorelační funkce je funkce sudá, tj.  $\rho_{-k} = \rho_k$ , a proto se při práci s ní omezujeme pouze na hodnoty řádu  $k \geq 0$ . Přitom vždy platí

$$\rho_0 = 1 \text{ a } |\rho_k| \leq 1 \text{ pro } k > 0.$$

Průběh autokorelační funkce je důležitým faktorem při výběru vhodného modelu pro danou časovou řadu (viz dále odstavec 10.3 věnovaný identifikaci modelu). Přitom je nutno určit takovou hodnotu  $k = k_0$ , za kterou začíná být teoretická autokorelační funkce nulová, nebo zjistit, zda taková hodnota  $k_0$  vůbec neexistuje. Pro danou časovou řadu však teoretické autokorelace  $\rho_k$  neznáme, a proto je musíme odhadnout pomocí vypočtených hodnot  $r_k$ . Při rozhodování o nulové hypotéze  $\rho_k = 0$  porovnáváme vypočtenou hodnotu  $|r_k|$  s dvojnásobkem směrodatné odchylky  $r_k$ , tedy s hodnotou  $2\sigma(r_k)$ . Tato konkrétní volba hodnoty 2 pro multiplikativní konstantu odpovídá zhruba hladině významnosti testu rovné 0,05. Pro stanovení zmíněné směrodatné odchylky se používá následující aproximace.

Bartlettova  
aproximace

**Bartlettova aproximace** [9]. Je-li  $\rho_k = 0$  pro  $k > k_0$ , pak platí

$$\sigma(r_k) \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} r_j^2 \right)}, \quad k > k_0,$$

přičemž  $n$  je délka analyzované časové řady.



**Příklad 6.1.** V tabulce 6.1 jsou uvedeny odhady  $r_k$  prvních 10 autokorelací  $\rho_k$  hypotetické časové řady o délce 119 (viz [9]). Určíme identifikační bod autokorelační funkce.

Tab. 6.1. Odhady autokorelační funkce

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_k$	0,31	-0,06	-0,07	0,10	0,08	0,02	-0,13	-0,12	-0,05	0,02

*Řešení.* Nejprve budeme testovat nulovou hypotézu  $k_0 = 0$ , tj.  $\rho_k = 0$  pro  $k > 0$ . Pak podle Bartlettovy aproximace dostaneme

$$\sigma(r_k) \approx \sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{1}{119}} \doteq 0,09 \text{ pro } k > 0.$$

Z tab. 6.1 je zřejmé, že  $r_1$  je mnohem větší než  $2\sigma(r_k)$ , takže hypotézu  $k_0 = 0$  na hladině významnosti 0,05 zamítáme. Zkusme nyní testovat hypotézu  $k_0 = 1$ . V tomto případě dostaneme

$$\sigma(r_k) \approx \sqrt{\frac{1}{n}} (1 + 2r_1^2) \doteq 0,10 \text{ pro } k > 1.$$

Všechny odhady  $r_k$  pro  $k > 1$  už vyhovují vyslovené hypotéze, což znamená, že  $k_0 = 1$  představuje hledaný identifikační bod autokorelační funkce uvažované časové řady.

Je ovšem nutno zdůraznit, že identifikační bod nemusí vůbec existovat.

### 6.3 Parciální autokorelační funkce (PACF)

Korelace mezi dvěma náhodnými veličinami bývá často způsobena tím, že obě náhodné veličiny jsou korelovány s jinými veličinami. Parciální autokorelace udávají korelaci mezi  $Y_t$  a  $Y_{t+k}$  očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi.

Teoretická **parciální autokorelační funkce řádu  $k$  (parciální autokorelace řádu  $k$ )**  $\rho_{kk}$  je definována jako parciální korelační koeficient  $Y_t$  a  $Y_{t+k}$  při pevných hodnotách  $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k-1}$ . Vlastnosti této funkce jsou podrobně vyloženy v učebnici [1].

Parciální autokorelační funkce

Odvození vztahů pro parciální autokorelace je poměrně jednoduché (viz [3]). Vyjdeme z toho, že parciální autokorelace  $\rho_{kk}$  představují parciální regresní koeficient v autoregresi  $k$ -tého řádu

$$Y_t = \rho_{k1}Y_{t-1} + \rho_{k2}Y_{t-2} + \dots + \rho_{kk}Y_{t-k} + e_t,$$

kde  $e_t$  je veličina nekorelovaná s veličinami  $Y_{t-j}$ ,  $1 \leq j < k$ .

Jestliže vynásobíme tuto rovnici veličinou  $Y_{t-j}$  a přejdeme ke středním hodnotám, získáme vztah pro autokovariance ve tvaru

$$\gamma_j = \rho_{k1}\gamma_{j-1} + \rho_{k2}\gamma_{j-2} + \dots + \rho_{kk}\gamma_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Po vydělení této rovnice veličinou  $\gamma_0$  dostaneme vztah pro autokorelace

$$\rho_j = \rho_{k1}\rho_{j-1} + \rho_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \rho_{kk}\rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Pro  $j = 1, 2, \dots, k$  tedy platí





$$r_{11} = r_1,$$

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j} \text{ pro všechna } k > 1,$$

kde  $r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,j}$  pro  $j = 1, 2, \dots, k-1$ .

Také u parciální autokorelační funkce  $\rho_{kk}$  je pro výběr vhodného modelu důležité zjistit, zda má či nemá identifikační bod, a pokud jej má, určit jeho hodnotu  $k_0$ . Přitom se postupuje analogicky jako v případě autokorelační funkce  $\rho_k$ : vypočtené hodnoty  $|r_{kk}|$  se porovnávají s dvojnásobkem směrodatné odchylky odhadu  $r_{kk}$ , tj. s hodnotou  $2\sigma(r_{kk})$ . Ke stanovení zmíněné směrodatné odchylky slouží následující aproximace.

**Quenouilleova aproximace** (viz např. [9]). Je-li  $\rho_{kk} = 0$  pro  $k > k_0$ , potom platí

$$\sigma(r_{kk}) \approx \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad k > k_0.$$

Quenouilleova  
aproximace

### Kontrolní otázky

1. Vysvětlíte rozdíl mezi striktní a slabou stacionaritou.
2. Jak se postupuje při hledání identifikačního bodu autokorelační funkce?
3. Objasněte definici parciální autokorelační funkce řádu  $k$ .
4. Jak se postupuje při hledání identifikačního bodu parciální autokorelační funkce?



**Korespondenční úkol 6.** Vyjděte z údajů uvedených v tab. 6.1 a spočtete odhady parciální autokorelací  $r_{kk}$  pro  $k = 1, 2, \dots, 5$ .



### Pojmy k zapamatování:

- striktní stacionarita,
- slabá stacionarita,
- autokorelační funkce řádu  $k$  (autokorelace řádu  $k$ ),
- identifikační bod autokorelační funkce,
- Bartlettova aproximace,
- parciální autokorelační funkce řádu  $k$  (parciální autokorelace řádu  $k$ ),
- identifikační bod parciální autokorelační funkce,
- Quenouilleova aproximace.





## **Shrnutí**

V této kapitole jsou zavedeny některé základní pojmy teorie časových řad (striktní a slabá stacionarita, autokorelační a parciální autokorelační funkce). Zvláštní pozornost je přitom věnována odhadům autokorelační a parciální autokorelační funkce, jakož i postupu pro určování identifikačního bodu obou těchto funkcí (Bartlettova a Quenouilleova aproximace).

## 7 LINEÁRNÍ MODELY STACIONÁRNÍCH ČASOVÝCH ŘAD

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte podstatu lineárního procesu,
- porozumíte podmínkám pro jeho existenci, stacionaritu a invertibilitu,
- poznáte vlastnosti základních typů lineárního procesu (proces klouzavých součtů, autoregresní proces a smíšené proces).

**Klíčová slova:** lineární proces, bílý šum, operátor zpětného posunutí (operátor zpětného posunutí), proces klouzavých součtů, autoregresní proces, smíšený proces.

Výklad v této kapitole vychází z pojmu lineárního procesu a vymezení podmínek pro jeho existenci, stacionaritu a invertibilitu. Následuje podrobná analýza vlastností tří základních typů lineárního procesu. Bez důkladného porozumění této problematice nemá smysl přistupovat ke studiu následujících kapitol.



### 7.1 Pojem lineárního procesu

**Lineární proces** je definován jako nekonečná řada

$$Y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots, \quad (7.1)$$

kde  $\psi_i$  jsou nějaké parametry a vzájemně nekorelované složky  $\varepsilon_t$  reprezentují tzv. **bílý šum** s nulovou střední hodnotou, konstantním rozptylem  $\sigma^2$  a autokovarianční funkcí invariantní vůči posunutí v čase  $t$ .

*Poznámka.* Pro obecný stacionární lineární proces je třeba vztah (7.1) přepsat ve tvaru

$$Y_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

kde  $\mu$  značí jeho střední hodnotu. V dalším výkladu budeme používat jednodušší reprezentaci lineárního procesu ve tvaru (7.1).

Stacionární lineární proces je tedy vyjádřen jako lineární kombinace řady nekorelovaných stejně rozdělených náhodných veličin. Taková reprezentace se někdy označuje jako **Woldova reprezentace**.

Při zápisu lineárního procesu se obvykle používá tzv. **operátor zpětného posunutí (operátor zpoždění) B**, pro nějž obecně platí

$$B^j Y_t = Y_{t-j} \text{ a samozřejmě také } B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}.$$

S použitím tohoto operátoru lze vztah (7.1) zapsat ve tvaru

Lineární proces

Bílý šum

Operátor zpětného posunutí

$$y_t = \Psi(B)\varepsilon_t,$$

přičemž

$$\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j.$$

Lineární proces může existovat pouze tehdy, když nekonečná řada náhodných veličin na pravé straně vztahu (7.1) konverguje (předněji konverguje podle kvadratického středu). **Postačující podmínka pro existenci lineárního procesu** má tedy tvar: Lineární proces existuje tehdy, jestliže  $\Psi(B)$  konverguje pro  $|B| \leq 1$ , přitom  $B$  se považuje za obyčejnou číselnou proměnnou. Tato podmínka současně zaručuje i **stacionaritu lineárního procesu** a nulovost jeho střední hodnoty, tj.  $E(Y_t) = 0$ .

Z praktického hlediska je důležité, aby se současná hodnota  $Y_t$  lineárního procesu dala vyjádřit pomocí hodnot předcházejících  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$  a současné hodnoty bílého šumu, tj. ve tvaru

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \dots + \varepsilon_t. \quad (7.2)$$

Použijeme-li operátor zpětného posunutí, můžeme vztah (7.2) přepsat ve tvaru

$$\pi(B)Y_t = \varepsilon_t,$$

kde

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j.$$

Lineární procesy, které lze takto vyjádřit, se nazývají **invertibilní**. **Postačující podmínku pro invertibilitu lineárního procesu** můžeme formulovat takto: lineární proces je invertibilní, jestliže  $\pi(B)$  konverguje pro  $|B| \leq 1$ .



**Příklad 7.1.** Určíme vztah mezi parametry  $\psi_j$  a  $\pi_j$ . Vyjdeme z podmínky

$$\Psi(B)\pi(B) = 1,$$

přičemž s výrazy  $\Psi(B)$  a  $\pi(B)$  budeme pracovat jako s obyčejnými mocninnými řadami v proměnné  $B$ . Po dosazení za  $\Psi(B)$  a  $\pi(B)$  dostaneme

$$1 + (\psi_1 - \pi_1)B + (\psi_2 - \pi_1\psi_1 - \pi_2)B^2 + \dots = 1,$$

takže  $\psi_1 = \pi_1$ ,  $\psi_2 - \pi_1\psi_1 - \pi_2 = 0$ , atd.

Praktický význam v Boxově – Jenkinsově metodologii mají speciální lineární procesy s konečným (co nejmenším počtem) počtem nenulových parametrů. Přitom se parametry volí tak, aby výsledné modely vyhovovaly podmínkám pro stacionaritu a invertibilitu.

V původní Boxově – Jenkinsově metodologii se pracuje třemi základními typy lineárních procesů:

- procesy klouzavých součtů –  $MA(q)$ ,
  - autoregresní procesy –  $AR(p)$ ,
  - smíšené procesy –  $ARMA(p, q)$ ,
- proměnné  $p$  a  $q$  přitom udávají počet parametrů.

## 7.2 Proces klouzavých součtů

Model  $MA(q)$

**Proces klouzavých součtů řádu  $q$**  (označení  **$MA(q)$** ) je popsán modelem

$$Y_t = \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \vartheta_q \varepsilon_{t-q} = \vartheta(B) \varepsilon_t,$$

kde

$$\vartheta(B) = 1 + \sum_{j=1}^q \vartheta_j B^j$$

představuje **operátor klouzavých součtů**,  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$  parametry procesu (reálná čísla) a  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  složky bílého šumu, pro něž platí:

Operátor klouzavých součtů

- $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$  pro všechna  $t$ ,
- $\text{var}(\varepsilon_t) = \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ ,
- $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$  pro  $t \neq s$ .

Procesy klouzavých součtů mají následující vlastnosti:

1. Proces  $MA(q)$  je stacionární pro libovolné hodnoty parametrů.

*Důkaz.*  $\vartheta(B)$  zřejmě konverguje pro libovolnou volbu parametrů. Z toho vyplývá, že postačující podmínka pro stacionaritu procesu je splněna.  $\square$

2. Střední hodnota procesu  $MA(q)$  je nulová, tj.  $\mathbf{E}Y_t = 0$ .

*Důkaz.* Z vlastností bílého šumu bezprostředně vyplývá

$$\mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}\left[\left(\varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \varepsilon_{t-j}\right)\right] = \mathbf{E}(\varepsilon_t) + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \mathbf{E}(\varepsilon_{t-j}) = 0. \quad \square$$

3. Pro varianci (rozptyl) procesu  $MA(q)$  platí

$$\text{var}(Y_t) = \sigma^2 \left( 1 + \sum_{j=1}^q \vartheta_j^2 \right).$$

*Důkaz.* S použitím vlastností bílého šumu dostaneme

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_t) &= \text{var} \left( \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \varepsilon_{t-j} \right) = \mathbf{E} \left[ \left( \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \varepsilon_{t-j} \right)^2 \right] = \\ &= \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) + \vartheta_1^2 \mathbf{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \dots + \vartheta_q^2 \mathbf{E}(\varepsilon_{t-q}^2) = \quad \square \\ &= \sigma^2 + \vartheta_1^2 \sigma^2 + \dots + \vartheta_q^2 \sigma^2 = \sigma^2 \left( 1 + \sum_{j=1}^q \vartheta_j^2 \right). \end{aligned}$$

4. Autokorelační funkce  $\rho_k$  procesu MA( $q$ ) má tvar

$$\rho_k = \frac{\vartheta_k + \vartheta_1 \vartheta_{k+1} + \dots + \vartheta_{q-k} \vartheta_q}{1 + \sum_{j=1}^q \vartheta_j^2}.$$

Tato funkce má identifikační bod  $k_0 = q$ .

*Důkaz.* Nejprve vyjádříme autokorelační funkci  $\rho_k$  pomocí autokovariancí ve tvaru  $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ , přitom ovšem platí (viz vlastnost 3)

$$\gamma_0 = \text{cov}(Y_t, Y_t) = \text{var}(Y_t) = \sigma^2 \left( 1 + \sum_{j=1}^q \vartheta_j^2 \right). \text{ Zavedeme označení}$$

$$\delta_p = \begin{cases} 1 & \text{pro } p = 0, \\ 0 & \text{pro } p \neq 0. \end{cases}$$

Pak pro autokovarianci řádu  $k$  dostaneme ( $\vartheta_0 = 1$ )

$$\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \mathbf{E} \left[ \sum_{i=0}^q \vartheta_i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=0}^q \vartheta_j \varepsilon_{t+k-j} \right] = \sigma^2 \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^q \vartheta_i \vartheta_j \delta_{k-j+i}.$$

Je zřejmé, že  $\text{cov}(y_t, y_{t+k}) = 0$  pro  $k > q$ , tj. autokorelační funkce má identifikační bod  $k_0 = q$ . Nenulové členy ve vztahu pro  $\gamma_k$  získáme jenom v případě  $k - j + i = 0$ , tj. pro  $j = k - i$ . Proto

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-k} \vartheta_{k-i} \vartheta_i = \sigma^2 (\vartheta_k + \vartheta_1 \vartheta_{k+1} + \dots + \vartheta_{q-k} \vartheta_q).$$

Po dosazení za  $\gamma_k$  a  $\gamma_0$  do vztahu pro autokorelační funkci  $\rho_k$  dostaneme hledaný vzorec. □

5. Parciální autokorelační funkce  $\rho_{kk}$  procesu MA( $q$ ) nemá identifikační bod, je omezena geometricky klesající posloupností nebo sinusoidou s geometricky klesající amplitudou (viz např. [8]).
6. Proces MA( $q$ ) je invertibilní, jestliže všechny nulové body polynomu  $\vartheta(B)$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.

*Důkaz.* Podle definice je proces MA( $q$ ) invertibilní, jestliže řada  $\pi(B) = \vartheta^{-1}(B)$  konverguje pro všechna  $|B| \leq 1$ . Necht'  $h_1, h_2, \dots, h_q$  jsou kořeny rovnice  $\pi(B) = 0$ , pak lze polynom  $\vartheta(B)$  rozložit na součin kořenových činitelů

$$\vartheta(B) = c \prod_{j=1}^q (B - h_j),$$

kde  $c$  je konstanta. Je zřejmé, že konvergence řady  $\pi(B) = \vartheta^{-1}(B)$  pro všechna  $|B| \leq 1$  je zaručena tehdy, když  $|h_j| > 1, j = 1, 2, \dots, q$ .  $\square$

Při praktických aplikacích se nejčastěji využívají procesy MA(1) a MA(2).

### 7.3 Autoregresní proces

**Autoregresní proces řádu  $p$**  (označení **AR( $p$ )**) je popsán modelem

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (7.3)$$

neboli (s použitím operátoru zpětného posunutí)

$$\varphi(B)Y_t = \varepsilon_t,$$

kde

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$$

je tzv. **autoregresní operátor**.

Některé vlastnosti autoregresního procesu uvedeme bez důkazu, a to v těch případech, kdy je postup dokazování analogický tomu, který jsme použili v předcházejícím odstavci.

1. Autoregresní proces AR( $p$ ) je stacionární, jestliže všechny nulové body polynomu  $\varphi(B)$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.
2. Střední hodnota autoregresního procesu AR( $p$ ) je nulová, tj.  $E(Y_t) = 0$ .
3. Pro rozptyl (varianci) autoregresního procesu AR( $p$ ) platí

$$\text{var}(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \varphi_2 \rho_2 - \dots - \varphi_p \rho_p}.$$

Model AR( $p$ )

Autoregresní operátor

4. Autokorelační funkce  $\rho_k$  autoregresního procesu  $AR(p)$  nemá identifikační bod a splňuje soustavu diferenčních rovnic

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \text{ pro } k > 0. \quad (7.4)$$

*Důkaz.* Vyjdeme z definičního vztahu (7.3). Tento vztah násobíme postupně veličinami  $y_{t-k}$  pro  $k > 0$  a přejdeme ke středním hodnotám. Dokazovaný vztah dostaneme vydělením takto získaných rovností kovariancí  $\gamma_0$ . Lze ukázat, že autokorelační funkce procesu  $AR(p)$  je lineární kombinací geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami.

5. Parciální autokorelační funkce  $\rho_{kk}$  procesu  $AR(p)$  má identifikační bod  $k_0 = p$ , což znamená, že platí  $\rho_{kk} = 0$  pro  $k > p$ .

6. Proces  $AR(p)$  je invertibilní pro libovolné hodnoty parametrů.

V praxi se nejčastěji uplatňují procesy  $AR(1)$  a  $AR(2)$ .

## 7.4 Smíšený proces

Model  $ARIMA(p,q)$

**Smíšený proces řádu  $p$  a  $q$**  s označením **ARMA( $p,q$ )** se definuje modelem

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \vartheta_q \varepsilon_{t-q}$$

nebo ekvivalentně s použitím operátoru zpětného posunutí

$$\varphi(B)Y_t = \vartheta(B)\varepsilon_t,$$

kde  $\varphi(B)$  je autoregresní operátor a  $\vartheta(B)$  operátor klouzavých součtů.

Vlastnosti smíšeného procesu lze odvodit z vlastností procesů  $AR(p)$  a  $MA(q)$ .

1. Smíšený proces  $ARMA(p,q)$  je stacionární, když je stacionární proces  $AR(p)$ .
2. Střední hodnota stacionárního smíšeného procesu  $ARMA(p,q)$  je nulová.
3. Autokorelační funkce  $\rho_k$  smíšeného procesu  $ARMA(p,q)$  vyhovuje soustavě diferenčních rovnic (7.4) pro  $k > q$ . Nemá identifikační bod a představuje (po prvních  $q-p$  hodnotách) lineární kombinaci klesajících geometrických posloupností a sinusoid různých frekvencí s geometricky klesajícími amplitudami (viz např. [9]).
4. Parciální autokorelační funkce  $\rho_{kk}$  smíšeného procesu  $ARMA(p,q)$  nemá rovněž identifikační bod a je omezena (po prvních  $p-q$



hodnotách) geometricky klesající posloupností nebo sinusoidou s geometricky klesající amplitudou (viz např. [8]).

5. Smíšený proces  $ARMA(p, q)$  je invertibilní, jestliže je invertibilní proces  $MA(q)$ .

V praxi se nejčastěji setkáváme s procesem  $ARMA(1,1)$ .

### Kontrolní otázky

1. Jaká je podmínka existence stacionárního lineárního procesu?
2. Kdy je lineární proces invertibilní?
3. Proč je důležité, aby byl lineární proces invertibilní?
4. Formulujte základní vlastnosti procesů  $MA(q)$ ,  $AR(p)$  a  $ARMA(p, q)$ .

### Korespondenční úkol 7.

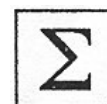
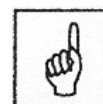
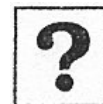
Použijte získaných znalostí k určení základních vlastností procesů  $MA(1)$ ,  $AR(1)$  a  $ARMA(1,1)$ .

### Pojmy k zapamatování:

- lineární proces,
- bílý šum,
- operátor zpětného posunutí (operátor zpoždění),
- existence lineárního procesu,
- stabilita lineárního procesu,
- invertibilita lineárního procesu,
- proces klouzavých součtů  $MA(q)$ ,
- operátor klouzavých součtů,
- autoregresní proces  $AR(p)$ ,
- autoregresní operátor,
- smíšený proces  $ARMA(p, q)$ .

### Shrnutí

V této kapitole je definován lineární proces a formulovány postačující podmínky pro jeho existenci, slabou stacionaritu a invertibilitu. Dále jsou vysvětleny (v případě) procesu klouzavých součtů) dokázány vlastnosti všech tří základních typů lineárního procesu vztahující se k jejich stacionaritě, invertibilitě, střední hodnotě a chování autokorelační i parciální autokorelační funkce.





## 8 LINEÁRNÍ MODELY NESTACIONÁRNÍCH ČASOVÝCH ŘAD

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte, jak převádět nestacionární časové řady na stacionární,
- poznáte model náhodné procházky RW a smíšené integrované modely ARIMA,
- naučíte se provádět diferenciaci a transformace časových řad
- seznámíte se s modely volatility ARCH a GARCH.

**Klíčová slova:** model náhodné procházky, smíšený integrovaný model, diferenční operátor, řád diferencování, Boxova-Coxova transformace, Boxova-Jenkinsova transformace, volatilita, model ARCH, model GARCH.

V této kapitole se budeme zabývat nestacionárními lineárními modely časových řad, a to modelem náhodné procházky RW a smíšenými integrovanými modely ARIMA. Věnujte pozornost postupům, které umožňují výchozí nestacionární časovou řadu převést na stacionární a také ji linearizovat. V závěrečné části pojednáme o tzv. modelech volatility, zejména modelech ARCH a GARCH.



V předcházející kapitole jsme se zabývaly výhradně stacionárními procesy. V ekonomické praxi se však často setkáváme s časovými řadami tvořenými nestacionárními procesy, které jsou charakterizovány přítomností výrazného trendu.

### 8.1 Proces náhodné procházky

**Proces náhodné procházky** (proces RW) se popisuje modelem

Model RW

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (8.1)$$

Jde zřejmě o speciální případ modelu AR(1). Pomocí operátoru zpětného posunutí jej můžeme zapsat jako

$$(1 - B)Y_t = \varepsilon_t.$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$Y_t = (Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = (Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots,$$

lze model (8.1) přepsat do tvaru

$$Y_t = Y_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

kde  $Y_0$  představuje hodnotu odpovídajícího procesu v čase  $t=0$ . Z toho ovšem vyplývá, že proces náhodné procházky je tvořen nekonečným součtem náhodných veličin, jež jsou složkami bílého šumu. První diference tohoto procesu ( $Y_t - Y_{t-1}$ ) zřejmě představuje proces bílého šumu. Proces s takovou vlastností se nazývá integrovaný proces 1. řádu a označuje symbolicky  $I(1)$ .

Má-li proces RW v čase  $t=0$  hodnotu  $Y_0$ , pak jeho střední hodnota  $\mathbf{E}(Y_t) = Y_0 = \mu$  je konstantní, nezávislá na čase. V případě  $Y_0 = 0$  je jeho střední hodnota nulová.

Pro rozptyl procesu RW platí

$$\text{var}(Y_t) = \gamma_0 = \mathbf{E}[(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_1)(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_1)] = t\sigma^2, \quad (8.2)$$

což znamená, že je lineární funkcí času a pro  $t \rightarrow \infty$  roste neomezeně.

Autokovarianční funkce řádu  $k$  je dána vztahem (viz např. [10])

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \mathbf{E}[(Y_t - Y_0)(Y_{t+k} - Y_0)] = \mathbf{E}[(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_1)(\varepsilon_{t+k} + \varepsilon_{t+k-1} + \dots + \varepsilon_1)] \\ &= (t-k)\sigma^2, \end{aligned}$$

takže závisí nejen na posunutí  $k$ , ale i na čase  $t$  a s rostoucím časem neomezeně roste.

Ze vztahu (8.2) vyplývá, že rozptyl v čase  $(t-k)$  je roven  $\text{var}(Y_{t-k}) = (t-k)\sigma^2$ , pak autokorelační funkce

$$\rho_k = (t-k) / \sqrt{t(t-k)} = \sqrt{(t-k)/t} = \sqrt{1-k/t}$$

také závisí na čase a pro  $t \rightarrow \infty$  při dané hodnotě zpoždění ( $k$ ) konverguje k jedné.

Z uvedených vlastností procesu RW vyplývá, že náhodná procházka je nestacionární proces, přičemž zdrojem nestacionarity je stochastický trend.

## 8.2 Smíšené integrované procesy

Smíšené integrované procesy (procesy ARIMA) jsou určeny pro popis časových řad s náhodnými změnami trendu (úrovně a sklonu). Výchozí časová řada nemusí být stacionární, je však nutné, aby byla převoditelná

na stacionární. Tento převod se uskutečňuje diferencováním výchozí časové řady.

**Smíšený integrovaný proces ARIMA( $p, d, q$ )** se popisuje modelem

$$\varphi(B)W_t = \vartheta(B)\varepsilon_t,$$

v němž

$$W_t = \Delta^d Y_t$$

$W_t$  reprezentuje časovou řadu zkonstruovanou diferenciací výchozí řady  $Y_t$ ,  $d$  je **řád diferencování** a  $\Delta$  **diferenční operátor** definovaný jako

$$\Delta^d Y_t = (1-B)^d Y_t.$$

Model ARIMA( $p, d, q$ ) je možno také zapsat ve tvaru

$$\varphi(B)(1-B)^d Y_t = \vartheta(B)\varepsilon_t. \quad (8.3)$$

Konstrukce smíšeného integrovaného modelu se realizuje ve dvou krocích.

1. Nejprve se výchozí nestacionární časová řada  $W_t$  převede diferencováním, resp. vhodnou transformací, na stacionární řadu  $Y_t$ . Přitom je třeba si uvědomit, že diferencováním se výchozí časová řada zkracuje.
2. Na stacionární časovou řadu se aplikuje smíšený model ARMA( $p, q$ ).

Modely ARIMA zřejmě představují „rozumný“ kompromis při zeslabování předpokladu o stacionaritě ARMA modelů.

Pokusíme se vysvětlit, proč se modely ARIMA nazývají integrované. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že  $d=1$ , a tedy  $W_t = \Delta Y_t$ . Opakovaným použitím vztahu  $W_t = \Delta Y_t$  dostaneme

$$Y_t = W_t + Y_{t-1} = W_t + W_{t-1} + Y_{t-2} = W_t + W_{t-1} + \dots + W_{t-k} + Y_{t-k-1}.$$

Můžeme si představit, že vliv členu  $Y_{t-k-1}$  s rostoucí hodnotou  $k$  postupně slábne, takže původní proces  $Y_t$  dostaneme z procesu  $W_t$  postupným sčítáním (integrovaním). Proto se proces ARIMA( $p,1,q$ ) nazývá integrovaným procesem (přesněji integrovaným procesem 1. řádu), tj. ARIMA( $p,1,q$ )  $\sim$  I(1). Obecně platí ARIMA( $p,d,q$ )  $\sim$  I( $d$ ).

Jak stanovit hodnotu parametru  $d$ ? V podstatě existují tři přístupy.

1. Vizuální posouzení stacionarity výchozí řady  $Y_t$  a diferencovaných řad  $\Delta^d Y_t$ ,  $t=1,2, \dots$ .

Smíšený integrovaný  
model ARIMA

Diferenční operátor  
Řád diferencování

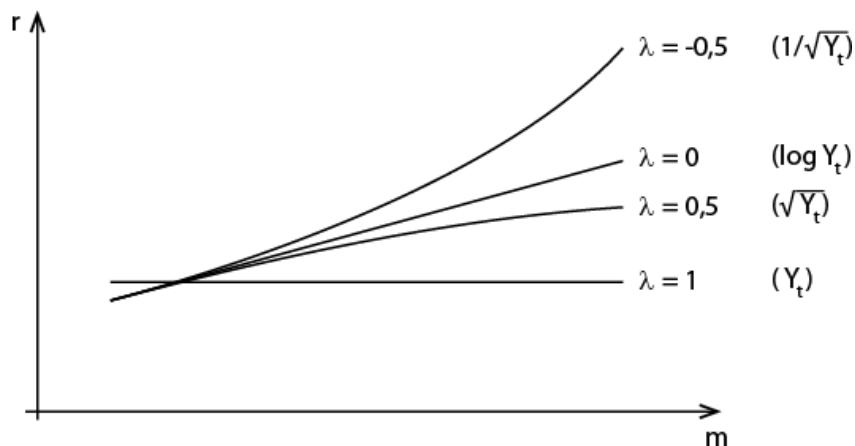
2. Studium odhadů autokorelační funkce  $r_k$  pro řady  $Y_t$  a  $\Delta^d Y_t$ ,  $t=1,2, \dots$ . Jestliže hodnoty  $r_k$  klesají pomalu (přibližně lineárně), pak je nutno provést další diferenciaci.
3. Studium odhadů rozptylu pro řady  $Y_t$  a  $\Delta^d Y_t$ ,  $t=1,2, \dots$ . Za optimální se volí taková hodnota parametru  $d$ , která poskytuje nejmenší odhad rozptylu.

Boxova-Jenkinsova transformace

Na závěr se zmíníme ještě o transformacích časové řady. Nejčastěji se používá **Boxova-Jenkinsova transformace** ve tvaru

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} Y_t^\lambda & \text{pro } \lambda \neq 0, \\ \log Y_t & \text{pro } \lambda = 0. \end{cases}$$

Optimální hodnota parametru  $\lambda$  se určuje graficky (viz např.[8]). Daná časová řada se rozdělí na krátké úseky (4 až 12 pozorování) a v každém z těchto úseků se určí aritmetický průměr hodnot pozorování  $m$  a rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou  $r$ . Sestrojí se graf závislosti  $r$  na  $m$  (viz obr. 8.1).



Obr. 8.1: Grafické stanovení transformační konstanty  $\lambda$

Pro stanovení hodnoty  $\lambda$  platí následující pravidla.

- Je-li hodnota  $r$  prakticky konstantní, volí se  $\lambda = 1$ .
- Pokud hodnota  $r$  roste přibližně lineárně s hodnotou  $m$ , volí se  $\lambda = 0$ .
- Roste-li hodnota  $r$  rychleji než lineárně, volí se  $\lambda < 0$ .
- Naopak, roste-li hodnota  $r$  pomaleji než lineárně, volí se  $0 < \lambda < 1$ .

Boxova-Coxova transformace

Vedle právě uvedené transformace se používá také **Boxova-Coxova transformace** definovaná předpisem

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \text{pro } \lambda \neq 0, \\ \log Y_t & \text{pro } \lambda = 0. \end{cases}$$

Uvedených transformací se v praxi používá k linearizaci časových řad.

**Příklad 8.1.** Vyjádřete podrobně smíšený integrovaný model ARIMA(2, 1, 1).



*Řešení.* Pro parametry modelu platí:  $p = 2$ ,  $d = 1$ ,  $q = 1$ . To znamená

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2, \quad \vartheta(B) = 1 + \vartheta_1 B, \quad \Delta = 1 - B.$$

Po dosazení do vztahu (8.1) máme

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)(1 - B)Y_t = (1 + \vartheta_1 B)\varepsilon_t.$$

S využitím vlastností operátoru zpětného posunutí nakonec dostaneme

$$Y_t - (1 + \varphi_1)Y_{t-1} + (\varphi_1 - \varphi_2)Y_{t-2} + \varphi_2 Y_{t-3} = \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

**Kontrolní úkol 8.1.** Vyjádřete podrobně smíšený integrovaný model ARIMA(1, 1, 2).



### 8.3 Modely volatility

Standardně používané modely AR nebo ARMA poskytují špatné výsledky při analýze finančních časových řad. Takové řady vykazují různé nelinearity, zejména silnou závislost okamžitého rozptylu řady na její historii. Ukázalo se, že vhodným nástrojem pro odstranění těchto problémů jsou modely volatility. Při jejich popisu se preferují takové charakteristiky, jakými jsou podmíněná střední hodnota a podmíněný rozptyl.



V případě jednoduchého autoregresního modelu AR(1), popsaného vztahem  $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , platí pro podmíněné charakteristiky následující vztahy:

$$\mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}) = \varphi_1 Y_{t-1} \text{ a } \text{var}(Y_t | Y_{t-1}) = \sigma^2.$$

Z uvedeného vyplývá, že podmíněná střední hodnoty náhodné veličiny  $Y_t$  se v čase mění, ale její podmíněný rozptyl zůstává konstantní.

Označme veškerou informaci známou do času  $t-1$  symbolem  $\Omega_{t-1}$ . Tato „minulá“ informace je generována všemi minulými hodnotami časové řady  $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots\}$ , všemi minulými hodnotami  $\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$  a vhodnými funkcemi těchto hodnot. V modelech volatility se pracuje

s podmíněnými charakteristikami ve tvaru vhodných nelineárních funkcí informace  $\Omega_{t-1}$ :

$$\begin{aligned}\mu_t &= \mathbf{E}(Y_t | \Omega_{t-1}) = g(\Omega_{t-1}), \\ h_t &= \text{var}(Y_t | \Omega_{t-1}) = h(\Omega_{t-1}), \quad h(\cdot) > 0.\end{aligned}\tag{8.4}$$

Volatilita

Podmíněný rozptyl se označuje jako **volatilita časové řady** a funkce  $h(\cdot)$  jako **skedastická funkce**. V případě modelu AR(1) je  $h(\cdot)$  funkce **homoskedastická**, při proměnlivém podmíněném rozptylu funkce **heteroskedastická**.

Modely volatility se nejčastěji zapisují ve tvaru

$$Y_t = \mu_t + e_t = \mu_t + \varepsilon_t \sqrt{h_t} = g(\Omega_{t-1}) + \varepsilon_t \sqrt{h(\Omega_{t-1})},$$

kde  $e_t$  jsou nekorelované identicky rozdělené náhodné veličiny s podmíněnými charakteristikami  $\mathbf{E}(e_t | \Omega_{t-1}) = 0$  a  $\text{var}(e_t | \Omega_{t-1}) = h_t$  a  $\varepsilon_t$  nezávislé identicky rozdělené veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Uvažované modely jsou určeny dvěma rovnicemi (8.4), z nichž první se obvykle nazývá rovnice střední hodnoty a druhá rovnice volatility.

### 8.3.1 Modely ARCH

Prvním vhodným nástrojem pro modelování volatility byl model ARCH (Autoregressive Conditionally Heteroscedastic Model), který vytvořil a aplikoval Engle [11] v roce 1982. Modely ARCH [3,10,13] vycházejí ze dvou předpokladů:

- modely finančních řad jsou heteroskedastické, tj. s proměnnou volatilitou,
- jejich volatilita ( $h_t$ ) je jednoduchou kvadratickou funkcí minulých hodnot procesu  $\{e_t\}$ , tj. hodnot  $\{e_{t-1}, e_{t-2}, \dots\}$ .

Obecný model ARCH( $m$ ) můžeme zapsat ve tvaru

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m e_{t-m}^2.$$

Koeficienty  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  mohou nabývat jen takových hodnot, aby platilo  $h_t > 0$ . Postačující podmínka, zaručující kladnost volatility, má tvar  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ .

Model ARCH(1)

Vlastnosti ARCH modelů ukážeme na příkladě modelu ARCH(1), tj. modelu



$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0.$$

1. Nepodmíněná střední hodnota veličin  $e_t$  je nulová, tj.  $\mathbf{E}(e_t) = 0$ . Model ARCH(1) je tedy slabě stacionární.

2. Pro nepodmíněný rozptyl veličin  $e_t$  platí

$$\text{var}(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \text{ za podmínky } 0 < \alpha_1 < 1. \text{ To znamená, že je konstantní}$$

v čase a proces  $\{e_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický.

3. Pro nepodmíněný koeficient špičatosti veličin  $e_t$  platí  $\frac{3(1 - \alpha_1^2)}{1 - 3\alpha_1^2} \geq 3$  za

podmínky  $0 \leq \alpha_1 < \sqrt{1/3}$ , což znamená, že může být větší než u normálního rozdělení.

### 8.3.2 Modely GARCH

Nevýhodou modelů GARCH je skutečnost, že často vyžadují ke správnému popsání volatility vysoký řád  $m$  a s tím souvisí nutnost odhadovat velký počet parametrů. Tuto nevýhodu odstraňují modely GARCH (Generalized ARCH). V těchto modelech může volatilita (tj. podmíněný rozptyl) záviset navíc na minulých hodnotách podmíněného rozptylu.

Obecný model GARCH( $m, s$ ) má tvar

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j},$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé identicky rozdělené veličiny s nulovou střední hodnotou, jednotkovým rozptylem (často normálním rozdělením) a  $\alpha_i, \beta_j$  ( $i = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, s$ ) jsou parametry modelu, které splňují

podmínky:  $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ .

Nejjednodušším zástupcem modelů GARCH je model GARCH(1,1), který je možno zapsat ve tvaru

Model GARCH(1,1)

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 \geq 0.$$

Základní vlastnosti **modelu GARCH(1,1)** jsou podobné vlastnostem modelu ARCH(1):

1. Model GARCH(1,1) je slabě stacionární, jestliže  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ .

2. Pro nepodmíněný rozptyl veličin  $e_t$  platí

$$\text{var}(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \text{ za podmínky } \alpha_1 + \beta_1 < 1.$$

Rozptyl je tedy konstantní v čase a proces  $\{e_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický.

3. Pro nepodmíněný koeficient špičatosti veličin  $e_t$  platí

$$\frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \geq 3 \text{ za podmínky } 1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0.$$

Modifikace modelu GARCH jsou podrobněji popsány v monografiích [3,10].



### Kontrolní otázky

1. Jaké jsou základní vlastnosti procesu náhodné procházky?
2. Čím se liší proces náhodné procházky od autoregresního procesu AR(1)?
3. Vysvětlete základní rozdíl mezi procesy ARMA( $p, q$ ) a ARIMA( $p, d, q$ ).
4. Jak se určuje řád diferencování?
5. Jak se odhaduje parametr  $\lambda$  při použití Boxovy-Jenkinsovy transformace?
6. Vysvětlete pojem volatilita.



**Korespondenční úkol 8.** Vyberte libovolnou časovou řadu obsahující minimálně 50 pozorování a aplikujte na ni dva vhodné modely v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie (AR, MA, ARMA nebo ARIMA). V software NCSS vyberte metodu Box-Jenkins Method (ARIMA).

Doporučená struktura:

1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. vyrovnané hodnoty časové řady získané použitím obou vybraných modelů,
3. porovnání obou modelů,
4. interpretace výsledků.



### Pojmy k zapamatování:

- model (proces) náhodné procházky,
- smíšený integrovaný model,
- diferenční operátor,
- řád diferencování,
- Boxova-Jenkinsova transformace,

- Boxova-Coxova transformace,
- sezónní smíšený integrovaný model,
- sezónní autoregresní operátor,
- sezónní operátor klouzavých součtů,
- sezónní diferenční operátor,
- volatilita,
- modely ARCH,
- modely GARCH.

### **Shrnutí**

V této kapitole jsou popsány model náhodné procházky (RW) a smíšený integrovaný model ARIMA. Zvláštní pozornost je přitom věnována diferenciaci a transformacím výchozí časové řady. Závěrečná část přináší základní informace o modelech volatility používaných při analýze finančních časových řad.





## 9 LINEÁRNÍ MODELY SEZÓNŇNÍCH ČASOVÝCH ŘAD

Po prostudování této kapitoly:

- poznáte, jak analyzovat časové řady, jejichž sezónní složka má stochastický charakter,
- pochopíte souvislost mezi lineárními modely (AR, MA, ARMA, ARIMA) a odpovídajícími sezónními modely.

**Klíčová slova:** sezónní smíšené integrované modely, sezónní autoregresní operátor, sezónní operátor klouzavých součtů, sezónní diferenční operátor, sezónní autoregresní modely, sezónní modely klouzavých součtů, sezónní smíšené modely.

U ekonomických a finančních časových řad je rozumné předpokládat, že jejich sezónní složka má výrazný stochastický charakter. V této kapitole především ukážeme, jak se pro danou časovou řadu, jejíž trendová i sezónní složka mají stochastický charakter, vytvářejí sezónní smíšené integrované modely SARIMA. Pak stručně popíšeme strukturu jednodušších sezónních modelů SMA, SAR a SARMA (viz [3]), které jsou v podstatě speciálními případy modelů SARIMA.



### 9.1 Sezónní smíšené integrované procesy SARIMA

Sezónní smíšené integrované procesy SARIMA slouží k popisu časových řad, jejichž trend i sezónní složka mají stochastický charakter. Nyní si ukážeme, jak se postupuje při konstrukci příslušného modelu. Přitom budeme předpokládat, že máme k dispozici řadu  $Y_t$  měsíčních pozorování, která vykazuje výrazné sezónní vlivy s počtem sezón  $L=12$  v průběhu roku.

1. Nejprve se zkonstruuje model ARIMA pro lednová měření ve tvaru

$$\Phi(B^{12})\Delta^D Y_t = \Theta(B^{12})\eta_t, \quad (9.1)$$

kde

$$\Phi(B^{12}) = 1 - \Phi_1 B^{12} - \Phi_2 B^{24} - \dots - \Phi_P B^{12P}$$

je sezónní autoregresní operátor řádu  $P$

$$\Theta(B^{12}) = 1 + \Theta_1 B^{12} + \Theta_2 B^{24} + \dots + \Theta_Q B^{12Q}$$

sezónní operátor klouzavých součtů řádu  $Q$  a

$$\Delta_{12} = 1 - B^{12}$$

**sezónní diferenční operátor**, pro nějž platí  $\Delta_{12}^D Y_t = (1 - B^{12})^D Y_t$ .

Model (8.2) se považuje za ARMA model pro lednová měření.

2. Provede se konstrukce ARMA modelů pro měření realizovaná v měsících únor až prosinec. Předpokládá se, tyto modely jsou přibližně stejné jako model (9.1).
3. Náhodné složky  $\eta_t$  by měly být vzájemně korelované, protože zřejmě existuje nějaká souvislost mezi lednovými a únorovými měřeními, mezi únorovými a březnovými měřeními atd. Předpokládá se tedy, že časovou řadu  $\eta_t$  lze popsat ARIMA modelem ve tvaru

$$\varphi(B)\Delta^d \eta_t = \vartheta(B)\varepsilon_t, \quad (9.2)$$

kde  $\varphi(B)$ ,  $\vartheta(B)$  jsou operátory zavedené v odstavci 8.1 a  $\varepsilon_t$  označuje bílý šum.

4. Spojením modelů (9.1) a (9.2) dostaneme výsledný SARIMA model ve tvaru

$$\varphi(B)\Phi(B^{12})\Delta^d \Delta_{12}^D Y_t = \vartheta(B)\Theta(B^{12})\varepsilon_t. \quad (9.3)$$

Takto zkonstruovaný **multiplikativní sezónní smíšený integrovaný model SARIMA** se zapisuje ve tvaru

$$\text{SARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_{12}.$$

V obecném případě má takový model tvar

$$\text{SARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_L,$$

kde  $L$  označuje počet sezón v daném období (počet měsíců nebo kvartálů v roce, ale také počet dnů v týdnu apod.).

Aditivní varianta sezónního smíšeného integrovaného modelu se používá jen zřídka.



**Příklad 9.1.** Vyjádřete podrobně sezónní smíšený integrovaný model.  $\text{SARIMA}(1, 1, 1) \times (1, 1, 0)_{12}$ .

*Řešení.* Pro parametry platí:  $p = 1, d = 1, q = 1, P = 1, D = 1, Q = 0$ . To znamená  $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B$ ,  $\vartheta(B) = 1 + \vartheta_1 B$ ,  $\Delta = 1 - B$ ,  $\Delta_{12} = 1 - B^{12}$ .

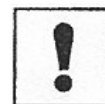
Po dosazení do vztahu (9.3) máme

$$(1 - \varphi_1 B)(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - B)(1 - B^{12})Y_t = (1 + \vartheta_1 B)\varepsilon_t.$$

S využitím vlastností operátoru zpětného posunutí nakonec dostaneme

$$Y_t - (1 + \varphi_1)Y_{t-1} + \varphi_1 Y_{t-2} - (1 + \Phi_1)Y_{t-12} + (1 + \varphi_1 + \Phi_1 + \varphi_1 \Phi_1)Y_{t-13} - \\ - (\varphi_1 + \varphi_1 \Phi_1)Y_{t-14} + \varphi_1 Y_{t-24} - (\Phi_1 + \varphi_1 \Phi_1)Y_{t-25} + \varphi_1 \Phi_1 Y_{t-26} = \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

**Kontrolní úkol 9.1.** Vyjádřete podrobně smíšený integrovaný model  $SARIMA(1,1,1) \times (0,1,1)_L$ .



## 9.2 Sezónní procesy klouzavých součtů SMA

**Sezónní proces klouzavých součtů** řádu  $Q$ , tj.  $SMA(Q)$ , můžeme obecně popsat modelem

Model SMA

$$Y_t = \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-L} + \Theta_2 \varepsilon_{t-2L} + \dots + \Theta_Q \varepsilon_{t-QL}$$

nebo pomocí operátoru  $B$  jako

$$Y_t = (1 + \Theta_1 B^L + \Theta_2 B^{2L} + \dots + \Theta_Q B^{QL}) \varepsilon_t = \Theta_Q (B^L) \varepsilon_t,$$

kde  $L$  značí počet sezón v daném období. Je zřejmé, že model  $SMA(Q)$  je speciálním případem modelu  $SARIMA$ , a to  $SARIMA(0,0,0) \times (0,0,Q)_L$ . Uvažovaný model je stacionární pro libovolné hodnoty parametrů a invertibilní v případě, že všechny kořeny rovnice  $\Theta_Q(B)^L = 0$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.

## 9.3 Sezónní autoregresní modely SAR

**Sezónní autoregresní model** řádu  $P$ , tj.  $SAR(P)$ , má v obecném případě tvar

Model SAR

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-L} + \Phi_2 Y_{t-2L} + \dots + \Phi_P Y_{t-PL} + \varepsilon_t.$$

Pomocí operátoru  $B$  jej můžeme zapsat jako

$$\Phi_P (B^L) = (1 - \Phi_1 B^L - \Phi_2 B^{2L} - \dots - \Phi_P B^{PL}) = \varepsilon_t.$$

Uvedený model je také speciálním případem modelu  $SARIMA$ , a to  $SARIMA(0,0,0) \times (P,0,0)_L$ . Je invertibilní při libovolných hodnotách parametrů a stacionární, pokud všechny kořeny rovnice  $\Phi_P(B^L) = 0$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.

## 9.4 Sezónní smíšené modely SARMA

Uvažujeme **smíšený sezónní model SARMA**  $(P,Q)$ , který můžeme považovat za speciální případ modelu s označením  $SARIMA(0,0,0) \times (P,0,Q)_L$ . Tento model lze zapsat ve tvaru

Model SARMA

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-L} + \Phi_2 Y_{t-2L} + \dots + \Phi_p Y_{t-pL} + \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-L} + \Theta_2 \varepsilon_{t-2L} + \dots + \Theta_q \varepsilon_{t-qL}.$$

S použitím operátoru B jej můžeme vyjádřit jako

$$(1 - \Phi_1 B^L - \Phi_2 B^{2L} - \dots - \Phi_p B^{pL}) Y_t = (1 + \Theta_1 B^L + \Theta_2 B^{2L} + \dots + \Theta_q B^{qL}) \varepsilon_t$$

neboli  $\Phi_p(B^L) Y_t = \Theta_q(B^L) \varepsilon_t$ . Z vlastností modelů SMA a SAR vyplývá, že uvažované smíšené modely SARMA jsou stacionární, jestliže všechny kořeny rovnice  $\Phi_p(B^L) = 0$  leží vně jednotkového kruhu, a invertibilní, pokud všechny kořeny rovnice  $\Theta_q(B)^L = 0$  leží také vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.



### Kontrolní otázky

1. Pro jaké časové řady jsou vhodné sezónní modely?
2. Vysvětlete postup při konstrukci sezónního smíšeného integrovaného modelu SARIMA.
3. Jaký je význam parametru  $L$  v sezónních modelech?
4. Jaký je principiální rozdíl mezi modely SMA, SAR a SARMA na jedné straně a modely MA, AR a ARMA na straně druhé?
5. Čím se liší modely SARMA od modelů SARIMA?



**Korespondenční úkol 9.** Vyberte libovolnou časovou řadu, obsahující minimálně 50 pozorování, s výraznou stochastickou sezónní složkou a aplikujte na ni dva vhodné sezónní modely (SARIMA). V software NCSS použijte metodu Box-Jenkins Method (ARIMA).

Doporučená struktura:

1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. vyrovnané hodnoty časové řady získané použitím obou vybraných modelů,
3. porovnání obou modelů,
4. interpretace výsledků.



### Pojmy k zapamatování:

- sezónní smíšený integrovaný model,
- sezónní autoregresní operátor,
- sezónní operátor klouzavých součtů,
- sezónní diferenční operátor,
- sezónní model klouzavých součtů,
- sezónní autoregresní model,
- sezónní smíšený model.



## **Shrnutí**

V této kapitole jsou popsány sezónní smíšené integrované modely SARIMA a jejich speciální případy SMA, SAR a SARMA. Zvláštní pozornost je přitom věnována postupu konstrukce modelů SARIMA.





## 10 KONSTRUKCE MODELU V BOXOVĚ-JENKINSOVĚ METODOLOGII

### Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte, jak se pro danou časovou řadu (ne nutně stacionární) systematicky vytváří příslušný model,
- seznámíte se podrobně s postupy používanými při identifikaci modelu, odhadování parametrů modelu a verifikaci navrženého modelu,
- pochopíte výhody a nevýhody Boxovy-Jenkinsovy metodologie.

**Klíčová slova:** identifikace modelu, centrování časové řady, odhad parametrů modelu, metoda nejmenších nelineárních čtverců, podmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců, nepodmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců, verifikace modelu, metoda přeparametrizování modelu, metoda odhadnutých reziduí, portmanteau test.

V této kapitole Vám především ukážeme, jak pro danou časovou řadu systematicky ve třech etapách (identifikace, odhad parametrů a verifikace) vytvořit příslušný model. Uvedený postup je vhodný pro všechny dosud probrané modely. V závěru kapitoly vyhodnotíme klady a zápory Boxovy-Jenkinsovy metodologie.



### 10.1 Identifikace modelu

Základním úkolem identifikace je výběr typu modelu a určení řádu modelu. Při identifikaci modelu se doporučuje volit následující postup.

Nejprve se pořídí grafický záznam časové řady a alespoň vizuálně se ověří, zda je řada stacionární.

V případě, že sledovaná řada není stacionární, je nutno ji **stacionarizovat** s využitím diferenciací, popř. Boxovy-Jenkinsovy nebo Boxovy-Coxovy transformace. Podrobnosti jsou uvedeny v odstavci 8.1.

Pokud je střední hodnota stacionárního procesu (časové řady) nenulová, je třeba řadu vycentrovat. Princip **centrování** je jednoduchý – stačí nahradit řadu  $Y_t$  řadou  $Y_t - \bar{Y}$ , kde  $\bar{Y}$  představuje aritmetický průměr všech pozorování. Jestliže existují pochybnosti o nenulovosti střední hodnoty, doporučuje se použít běžných statistických testů (např. srovnání

Centrování časové řady

aritmetického průměru  $\bar{Y}$  s dvojnásobkem směrodatné odchylky tohoto průměru spočtené podle vzorců v tab. 12.1 monografie [8]).

Vlastní identifikace je založena na analýze **odhadů autokorelační funkce  $r_k$  a parciální autokorelační funkce  $r_{kk}$** . Ve většině případů stačí spočítat prvních 20 hodnot obou funkcí. Cílem vlastní identifikace je určit identifikační bod  $k_0$  těchto funkcí, pokud existuje, s využitím Bartlettovy, resp. Quenouilleovy, aproximace (viz kapitola 6). Odhady  $r_k$  i  $r_{kk}$  mohou být navzájem silně korelované, takže se doporučuje netrvat na jednoznačném určení řádu modelu, ale vyzkoušet více modelů.

Na závěr identifikační etapy je vhodné spočítat **počáteční odhady parametrů** pomocí vzorců uvedených např. v tab. 12.2 monografie [8]. Tyto odhady jsou zpravidla velmi hrubé, využívají se jako výchozí hodnoty při odhadování parametrů modelu v následující etapě.

Vývojový diagram pro identifikaci je uveden na obr. 10.1.

## 10.2 Odhad parametrů modelu

Odhady parametrů navrženého (již identifikovaného) modelu se postupně upřesňují pomocí speciálních iteračních postupů.

U jednoduchých modelů je možno použít „obyčejné“ metody nejmenších čtverců. Uvažujme např. model AR(1) popsáný vztahem

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde  $\varepsilon_t$  je složka bílého šumu. Minimalizací výrazu

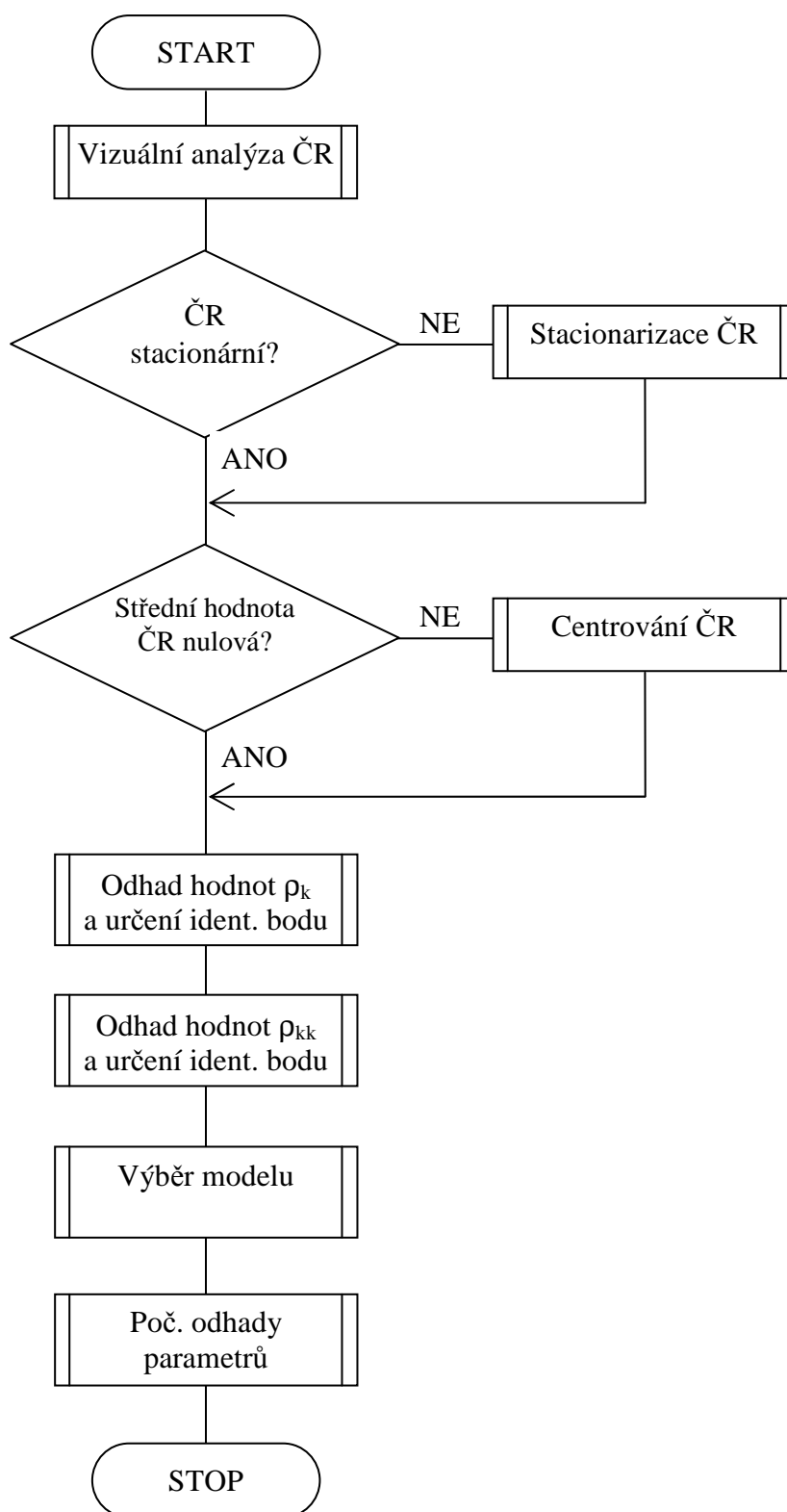
$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \varphi_1 Y_{t-1})^2$$

dostaneme pro odhad parametru

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}.$$

Složka  $\varepsilon_t$  není zřejmě korelovaná s regresorem  $Y_{t-1}$ , proto je odhad  $\hat{\varphi}_1$  nestranným odhadem parametru  $\varphi_1$ . Lze dokázat, že  $\hat{\varphi}_1$  je také konzistentním odhadem parametru  $\varphi_1$ . Uvedená tvrzení platí obecně pro modely typu AR( $p$ ).

U složitějších modelů nelze jednoduchou metodu nejmenších čtverců použít, získané odhady parametrů jsou obecně vychýlené a nekonzistentní. V takovém případě se pro odhadování parametrů používá tzv. **metoda nejmenších nelineárních čtverců**. Ukážeme si její princip na jednoduchém příkladu.



Obr. 10.1: Vývojový diagram pro identifikaci modelu

Předpokládejme, že pro danou časovou řadu byl v identifikační etapě navržen model ARMA(1,1), tj. dvouparametrický model ve tvaru

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Hledáme takové odhady parametrů  $\varphi_1$  a  $\vartheta_1$ , pro něž nabývá funkce

$$S(\varphi_1, \vartheta_1) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\varphi_1, \vartheta_1), \quad (10.1)$$

svého minima. Minimalizace součtu (8.1) se přitom provádí přes takový obor parametrů  $\varphi_1$  a  $\vartheta_1$ , pro který je uvažovaný model stacionární a invertibilní. Jde zřejmě o variantu klasické metody nejmenších čtverců, v níž bílý šum je nelineární funkcí parametrů. Pro uvažovaný model ARMA(1,1) totiž platí

$$\varepsilon_t = \frac{1 - \varphi_1 B}{1 + \vartheta_1 B} Y_t.$$

K výpočtu  $\varepsilon_t(\varphi_1, \vartheta_1)$  se používá rekurentního vztahu

$$\varepsilon_t(\varphi_1, \vartheta_1) = Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \vartheta_1 \varepsilon_{t-1}(\varphi_1, \vartheta_1).$$

Abychom mohli rekurentní výpočet zahájit, musíme znát počáteční hodnoty  $Y_0$  a  $\varepsilon_0(\varphi_1, \vartheta_1)$ , jež jsou ovšem nedostupné. V praxi se uplatňují dva postupy:

- 1) podmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců,
- 2) nepodmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců.

Podmíněná metoda  
nejmenších  
nelineárních čtverců

**Podmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců** je založena na tom, že volíme  $Y_0 = 0$  a  $\varepsilon_0(\varphi_1, \vartheta_1) = 0$ . Uvedená metoda se nazývá „podmíněná“ proto, že se odhadnuté hodnoty bílého šumu počítají v závislosti na pevně zvolených počátečních hodnotách  $Y_0$  a  $\varepsilon_0(\varphi_1, \vartheta_1)$ .

Nepodmíněná metoda  
nejmenších  
nelineárních čtverců

**Nepodmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců** se snaží co nejvíce eliminovat závislost na počátečních hodnotách, proto lze očekávat, že bude poskytovat spolehlivější výsledky. Box a Jenkins [4] navrhli minimalizovat součet čtverců ve tvaru

$$S(\varphi_1, \vartheta_1) = \sum_{t=-\infty}^n \left[ \mathbf{E}(\varepsilon_t(\varphi_1, \vartheta_1) | Y_1, \dots, Y_m) \right]^2, \quad (10.2)$$

kde  $\mathbf{E}(\varepsilon_t(\varphi_1, \vartheta_1) | Y_1, \dots, Y_m)$  označuje podmíněnou střední hodnotu veličiny  $\varepsilon_t$  počítanou při pevných hodnotách časové řady  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ . Snažíme se tedy zkonstruovat odhady parametrů tak, abychom minimalizovali odhadnuté hodnoty bílého šumu a přitom využili maximálně informaci, kterou máme o časové řadě k dispozici. Podrobnosti

o aplikaci nepodmíněné metody nejmenších nelineárních čtverců lze nalézt v monografii [8].

Vlastní hledání minima funkce  $S(\varphi_1, \vartheta_1)$  v oblasti přípustných hodnot parametrů je záležitostí numerické matematiky. V praxi se používají gradientová metoda, Gaussova-Newtonova metoda a (nejčastěji) Marquardtův algoritmus, který je v podstatě kombinací obou zmíněných metod. V případě, že funkce  $S(\varphi_1, \vartheta_1)$  je multimodální (má více minim), jsou pro stanovení hodnot parametrů mnohem vhodnější tzv. evoluční algoritmy (genetické algoritmy, diferenciální evoluce a jiné), jež jsou založeny na Darwinově teorii přirozeného výběru.

Závěrečným krokem v této etapě je **určení přesnosti získaných odhadů** parametrů. Aproximativní směrodatné odchyly odhadnutých parametrů pro vybrané modely AR, MA a ARMA jsou uvedeny v tab. 12.7 monografie [8].

Vývojový diagram pro odhadování parametrů modelu je uveden na obr. 10.2.

### 9.3 Verifikace modelu

Cílem této etapy je potvrzení adekvátnosti (správnosti a pravdivosti) navrženého modelu. Uvedeme přehled nejčastěji používaných metod pro verifikaci modelu (viz [8]).

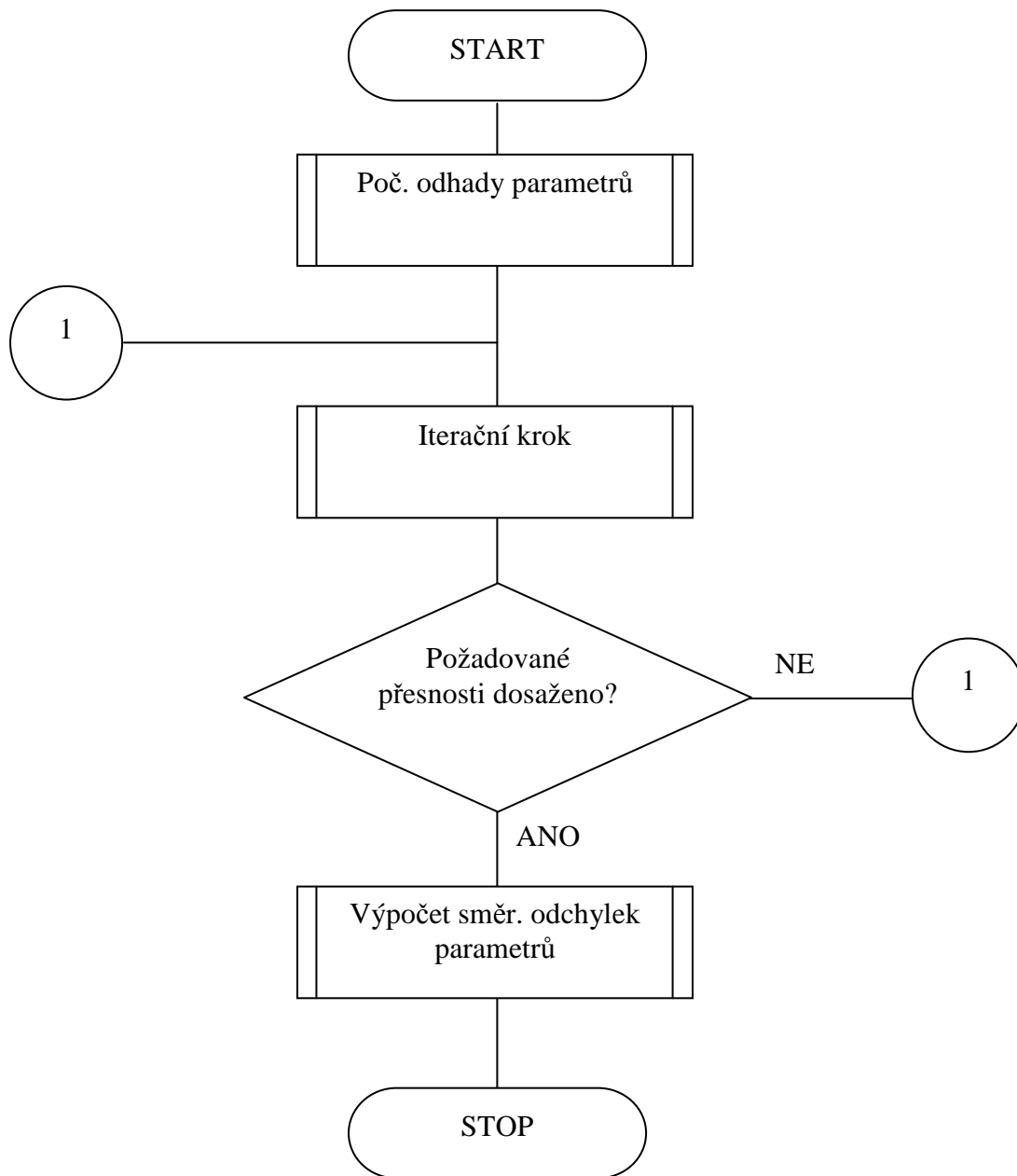
- 1) **Metoda přeparametrizování modelu.** Jsou-li směrodatné odchyly odhadnutých parametrů, popř. rozptylu bílého šumu, neúměrně vysoké, doporučuje se použít nový model s větším počtem parametrů. Naopak, v případě, že se vypočtené odhady parametrů významně neliší od nuly, je třeba provést redukci počtu parametrů.
- 2) **Metoda odhadnutých reziduí.** Princip této metody ukážeme na jednoduchém modelu ARMA(1,1). Jestliže  $\hat{\varphi}_1$  a  $\hat{\vartheta}_1$  jsou odhady parametrů tohoto modelu, pak pod pojmem odhadnutá rezidua rozumíme veličiny

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\varphi}_1 Y_{t-1} - \hat{\vartheta}_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}.$$

Pro časovou řadu těchto odhadnutých reziduí spočteme odhady autokorelační funkce  $r_k(\hat{\varepsilon})$ . Princip metody pak spočívá v porovnávání hodnot  $r_k(\hat{\varepsilon})$  s dvojnásobky jejich směrodatných odchylek, tj. s hodnotami  $2\sigma(r_k(\hat{\varepsilon}))$ . Platí-li pro některé  $k$  vztah

$$r_k(\hat{\varepsilon}) > 2\sigma(r_k(\hat{\varepsilon})),$$

pak je ověřovaný model neadekvátní.



Obr. 10.2: Vývojový diagram pro odhadování parametrů modelu



- 3) **Metoda založená na portmanteau testu.** Jde o testování statistické hypotézy o adekvátnosti navrženého modelu. Používá se statistického kritéria (tzv. **portmanteau statistiky**) ve tvaru

$$Q = n \sum_{k=1}^K r_k^2(\hat{\epsilon}),$$

kde  $n$  je délka časové řady a  $K$  přirozené číslo srovnatelné s hodnotou  $\sqrt{n}$ . Pro model  $ARMA(p, q)$  má portmanteau statistika  $Q$  asymptoticky rozdělení  $\chi_{K-p-q}^2$ . Jestliže pro danou hladinu významnosti  $\alpha$  a experimentálně určené  $Q_{\text{exp}}$  platí

$$Q_{\text{exp}} > \chi_{K-p-q}^2(\alpha),$$

zamítá se ověřovaný model jako neadekvátní na hladině významnosti  $\alpha$ . V současné době se k ověřování adekvátnosti modelu užívají i jiné (účinnější) statistiky, např.

$$Q^* = n(n-2) \sum_{k=1}^K \frac{r_k^2(\hat{\epsilon})}{(n-k)}.$$

## 9.4 Výhody a nevýhody Boxova-Jenkinsova přístupu

Boxova-Jenkinsova metodologie má ve srovnání s metodami založenými na dekompozici následující výhody.

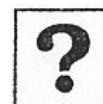
- 1) Modely se rychle adaptují na změny v průběhu časové řady, proto je Boxova-Jenkinsova metodologie úspěšná i v těch případech, kde dekompozice selhává.
- 2) Boxův-Jenkinsův přístup vykazuje nejlepší výsledky při analýze ekonomických časových řad.
- 3) Boxův-Jenkinsův přístup je systematický, proto může být plně automatizován.

Nevýhody Boxova-Jenkinsova přístupu spatřujeme v tom, že:

- 1) je vhodný jen pro časové řady o délce nejméně 50 pozorování,
- 2) jeho praktické aplikace jsou mnohem náročnější než aplikace dekompozičních metod,
- 3) výsledné modely, zejména modely s větším počtem parametrů, se obtížně interpretují.

### Kontrolní otázky:

1. Co je podstatou identifikační fáze?
2. Jaký je postup při identifikaci modelu?
3. Jaké metody se používají při odhadování parametrů modelu?
4. Čím se liší základní varianty metody nejmenších nelineárních čtverců?
5. Jak se postupuje při odhadování parametrů modelu?



6. Vysvětlete podstatu portmanteau testu.

7. Jaké jsou výhody a nevýhody Boxovy-Jenkinsovy metodologie ve srovnání s metodami založenými na dekompozici časové řady?



**Korespondenční úkol 10.** Analyzujte s využitím metody ARIMA libovolnou časovou řadu obsahující minimálně 50 pozorování a vyberte nejvhodnější model. Při rozhodování vezměte v úvahu také směrodatné odchylky parametrů, korelační matici parametrů, autokorelace reziduí a výsledky portmanteau testu.

Doporučená struktura:

- stručný popis vybraných dat (včetně původu),
- výsledky analýzy vybrané časové řady (vybrané modely),
- porovnání vybraných modelů,
- zdůvodnění výběru nejvhodnějšího modelu.



**Pojmy k zapamatování:**

- identifikace modelu,
- centrování časové řady,
- odhad parametrů modelu,
- metoda nejmenších nelineárních čtverců,
- podmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců,
- nepodmíněná metoda nejmenších nelineárních čtverců,
- verifikace modelu,
- metoda přeparametrizování modelu,
- metoda odhadnutých reziduí,
- portmanteau test.



**Shrnutí**

Tato kapitola je věnována postupu při konstrukci modelu v rámci Boxovy-Jenkinsovy metodologie. Jsou v ní popsány tři základní etapy konstrukce modelu, tj. identifikace, odhad parametrů a verifikace modelu. Závěrečná část obsahuje stručný výčet předností a nedostatků Boxova-Jenkinsova přístupu k analýze časových řad.

# 11 VÍCEROZMĚRNÉ ČASOVÉ ŘADY A JEJICH CHARAKTERISTIKY

## Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte, že vícerozměrné časové řady jsou zobecněním jednorozměrných časových řad.
- poznáte teoretické charakteristiky vícerozměrných časových řad,
- naučíte se počítat hodnoty empirických charakteristik vícerozměrných časových řad.

**Klíčová slova:** vícerozměrný náhodný proces, vícerozměrná časová řada, slabá stacionarita, vektor středních hodnot, kovarianční matice, autokovarianční maticová funkce, autokorelační maticová funkce, parciální autokorelační maticová funkce.

Většina charakteristik jednorozměrných časových řad je možno zobecnit pro vícerozměrné řady, místo skalárních veličin se však uvažují veličiny vektorové. Obsah této kapitoly je proto náročnější na pochopení. Předpokládá se znalost základů maticové algebry. Zopakujte si základní maticové operace, jakož i metody konstrukce transponované a inverzní matice.



## 11.1 Pojem vícerozměrné časové řady

Vícerozměrné časové řady chápeme jak zobecnění jednorozměrných časových řad. Pod pojmem ***m*-rozměrné časové řady** rozumíme posloupnost chronologicky uspořádaných výsledků pozorování *m* různých náhodných veličin, tedy *m*-rozměrného náhodného vektoru  $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{mt})$ . Vyjdeme-li z teorie náhodných procesů, můžeme říci, že *m*-rozměrná časová řada představuje konkrétní realizaci nějakého *m*-rozměrného náhodného procesu.

***m*-rozměrnou časovou řadu** je možno definovat jako posloupnost náhodných vektorů ve tvaru  $\{Y(s, t) = s \in S, t \in T, S \times T \rightarrow \mathbb{R}\}$ , kde *T* je časová množina nabývající hodnot  $\{0, 1, 2, \dots\}$  a množina *S* reprezentuje *m*-prvkový výběrový prostor odpovídající *m* různým složkám časové řady. Veličina *m* se nazývá rozměr časové řady. V dalším výkladu budeme vícerozměrné časové řady značit zkráceně  $\{\mathbf{Y}_t\} = \{Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{mt}\}$ .

*m*-rozměrná časová řada

*Poznámka.*

Právě uvedená definice  $m$ -rozměrné časové řady vychází z definice  $m$ -rozměrného náhodného procesu uvedené v monografii [3].

Slabá stacionarita

**Slabá stacionarita** vícerozměrného časové řady je definována analogicky jako stacionarita jednorozměrné časové řady. Říkáme, že  $m$ -rozměrná časová řada je slabě stacionární, jestliže jsou splněny následující podmínky:

- a)  $\mathbf{E}(\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu} < \infty$  pro všechny hodnoty  $t$ , kde  $\boldsymbol{\mu}$  je  $m$ -rozměrný sloupcový vektor středních hodnot jednotlivých časových řad.
- b)  $\mathbf{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})^T] = \boldsymbol{\Sigma}$  pro všechny hodnoty  $t$ , kde  $\boldsymbol{\Sigma}$  je kovarianční matice typu  $m \times m$ , na jejíž diagonále jsou rozptyly jednotlivých časových řad a mimo diagonálu jejich kovariance.
- c)  $\mathbf{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_{t+k} - \boldsymbol{\mu})^T] = \boldsymbol{\Gamma}_k$  pro všechny hodnoty  $t$ , kde  $\boldsymbol{\Gamma}_k$  je autokovarianční maticová funkce řádu  $k$  (typu  $m \times m$ ), na jejíž diagonále jsou autokovariance řádu  $k$  jednotlivých časových řad v čase  $t$  pro danou hodnotu  $k$  a mimo diagonálu kovariance těchto řad, přičemž jedna je uvažována v čase  $t$  a druhá v čase  $t+k$ .

První podmínka znamená, že střední hodnota všech časových řad je konstantní, tj. v čase neměnná. Podobně druhá podmínka vyjadřuje skutečnost, že rozptyly všech časových řad a také kovariance mezi všemi dvojicemi časových řad jsou konstantní. Konečně třetí podmínka ukazuje, že autokovariance jednotlivých časových řad a také kovariance mezi všemi dvojicemi náhodných veličin různých jednorozměrných časových řad závisí pouze na hodnotě  $k$  a nikoliv na čase  $t$ . Zřejmě platí  $\boldsymbol{\Gamma}_0 = \boldsymbol{\Sigma}$ . Navíc mezi autokovariančními maticovými funkcemi platí vztah  $\boldsymbol{\Gamma}_k = \boldsymbol{\Gamma}_{-k}^T$ .

## 11.2 Teoretické charakteristiky

Vektor středních  
hodnot

Uvedeme vztahy pro teoretické charakteristiky  $m$ -rozměrné časové řady za předpokladu, že řada je slabě stacionární. Taková řada má konstantní **vektor středních hodnot**

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

a také konstantní (v čase neměnnou) **kovarianční matici**  $\Sigma$  definovanou vztahem

Kovarianční  
matice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(Y_{1t}, Y_{2t}) & \cdots & \text{cov}(Y_{1t}, Y_{mt}) \\ \text{cov}(Y_{2t}, Y_{1t}) & \sigma_2^2 & \cdots & \text{cov}(Y_{2t}, Y_{mt}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(Y_{mt}, Y_{1t}) & \text{cov}(Y_{mt}, Y_{2t}) & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix},$$

v němž veličiny  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$  reprezentují teoretické rozptyly jednotlivých časových řad.

**Autokovarianční maticová funkce řádu  $k$**  uvažované časové řady se definuje vztahem

Autokovarianční  
maticová funkce

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_{11,k} & \gamma_{12,k} & \cdots & \gamma_{1m,k} \\ \gamma_{21,k} & \gamma_{22,k} & \cdots & \gamma_{2m,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1,k} & \gamma_{m2,k} & \cdots & \gamma_{mm,k} \end{pmatrix},$$

kde  $\gamma_{ij,k} = \mathbf{E}[(Y_{it} - \mu_i)(Y_{jt+k} - \mu_j)]$  pro  $i, j = 1, 2, \dots, m; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Na hlavní diagonále jsou postupně autokovariance jednotlivých časových řad  $\{Y_{1t}\}, \{Y_{2t}\}, \dots, \{Y_{mt}\}$  a mimo diagonálu kovariance časových řad, přičemž jedna je brána v čase  $t$  a druhá v čase  $t+k$ . Tato maticová funkce sice nezávisí na čase  $t$ , ale je samozřejmě funkcí  $k$ .

Autokorelační  
maticová funkce

**Autokorelační maticová funkce řádu  $k$**  je definována jako

$$\rho_k = \mathbf{D}^{-1/2} \Gamma_k \mathbf{D}^{-1/2} = (\rho_{ij,k})$$

pro  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , kde  $\mathbf{D}$  je diagonální matice, v níž  $i$ -tý diagonální prvek představuje rozptyl  $i$ -té časové řady, tj.

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\gamma_{11,0}, \gamma_{22,0}, \dots, \gamma_{mm,0}).$$

Z toho vyplývá, že  $i$ -tý diagonální prvek maticové funkce  $\rho_k$ , tj. prvek  $\rho_{ii,k}$ , je autokorelace časové řady  $\{Y_{it}\}$  a  $(i,j)$ -tý nediagonální prvek, tj. prvek

$$\rho_{ij,k} = \frac{\gamma_{ij,k}}{(\gamma_{ii,0} \gamma_{jj,0})^{1/2}} = \frac{\gamma_{ij,k}}{(\sigma_i^2 \sigma_j^2)}$$

je vzájemná autokorelace mezi časovými řadami  $\{Y_{it}\}$  a  $\{Y_{jt}\}$ . Také pro autokorelační maticovou funkci platí  $\rho_k = \rho_{-k}^T$ .

Parciální  
autokorelační  
maticová funkce

**Parciální autokorelační maticová funkce řádu  $k$  ( $\rho_{kk}$ )** je zobecněním parciální autokorelační funkce definované v části 6.3 na vícerozměrné časové řady. Je definována jako matice parametrů  $\rho_{kk}$  vícerozměrné autoregrese  $k$ -tého řádu

$$\mathbf{Y}_t = \rho_{k1} \mathbf{Y}_{t-1} + \rho_{k2} \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \rho_{kk} \mathbf{Y}_{t-k} + \mathbf{e}_t,$$

kde vektor  $\mathbf{e}_t$  je nekorelovaný s veličinami  $\mathbf{Y}_{t-j}$  pro  $j \geq 1$ . Z této rovnice lze postupem, který je analogický postupu vysvětlenému v části 6.3, odvodit explicitní vztahy pro parciální autokorelační maticovou funkci ve tvaru

$$\rho_{kk} = \{\Gamma_k - \mathbf{c}_k^T \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k\} \{\Gamma_0 - \mathbf{b}_k^T \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k\}^{-1}, \text{ kde} \quad (11.1)$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1^T & \dots & \Gamma_{k-2}^T \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{k-3}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{k-2} & \Gamma_{k-3} & \dots & \Gamma_0 \end{pmatrix}; \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1}^T \\ \Gamma_{k-2}^T \\ \vdots \\ \Gamma_1^T \end{pmatrix}; \mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Speciálně pro  $\rho_{11}$  dostaneme ze vztahu (11.1)  $\rho_{11} = \Gamma_1 \Gamma_0^{-1}$ .

### 11.3 Empirické charakteristiky

V této části ukážeme, jak se počítají odhady teoretických charakteristik, tedy empirické (výběrové) charakteristiky, pro vícerozměrné časové řady. Přitom předpokládáme, že délka časové řady  $\{\mathbf{Y}_t\}$  je rovna  $n$  a její rozměr je  $m$ . Vypočtené charakteristiky jsou samozřejmě náhodné veličiny.

Vektor aritmetických  
průměrů

Odhadem vektoru středních hodnot je **vektor aritmetických průměrů** jednotlivých časových řad, tj.

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m \end{pmatrix}, \text{ kde } \bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{it}.$$

Empirická kovarianční  
matice

Odhadem kovarianční matice je **empirická kovarianční matice** ve tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1^2 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & s_2^2 & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & s_m^2 \end{pmatrix}.$$

Na její hlavní diagonále jsou **empirické rozptyly**  $s_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) jednotlivých časových řad, mimo diagonálu jsou **empirické kovariance**  $c_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, m$ ) mezi jednotlivými řadami. K jejich výpočtu se používají vztahy

$$s_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{it}^2 - \bar{Y}_i^2,$$

$$c_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_{it} - \bar{Y}_i)(Y_{jt} - \bar{Y}_j).$$

**Empirická autokovarianční maticová funkce řádu  $k$**  má tvar

Empirická autokovarianční maticová funkce

$$\mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} c_{11,k} & c_{12,k} & \cdots & c_{1m,k} \\ c_{21,k} & c_{22,k} & \cdots & c_{2m,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1,k} & c_{m2,k} & \cdots & c_{mm,k} \end{pmatrix},$$

kde na diagonále jsou autokovariance jednotlivých časových řad  $c_{ii,k}$  pro danou hodnotu  $k$  a mimo diagonálu kovariance těchto časových řad, přičemž jedna je brána v čase  $t$  a druhá v čase  $t+k$ . Zřejmě platí:

$$c_{ii,k} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_{it} - \bar{Y}_i)(Y_{it+k} - \bar{Y}_i), \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$c_{ij,k} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_{it} - \bar{Y}_i)(Y_{jt+k} - \bar{Y}_j), \quad i, j=1, 2, \dots, m, \quad i \neq j.$$

Výpočty se provádějí jen pro  $k > 0$ .

Pro **empirickou autokorelační funkci řádu  $k$**  platí

Empirická autokorelační maticová funkce

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{c}_k \mathbf{D}^{-1/2},$$

kde  $\mathbf{D} = \text{diag}(s_1^2, s_2^2, \dots, s_m^2)$  je diagonální matice, jejíž prvky jsou empirické rozptyly jednotlivých časových řad. Z uvedeného plyne, že  $i$ -tý diagonální prvek matice  $\mathbf{r}_k$ , tj.

$$r_{ii,k} = \frac{c_{ii,k}}{s_i^2}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

je vlastně empirická autokorelační funkce časové řady  $\{Y_{it}\}$  a  $(i,j)$ -tý nediagonální prvek

$$r_{ij,k} = \frac{c_{ij,k}}{(s_i^2 s_j^2)^{1/2}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq j$$

je empirická vzájemná korelační funkce mezi časovými řadami  $\{Y_{it}\}$  a  $\{Y_{jt}\}$ .

Empirická parciální autokorelační funkce

Odhad parciální autokorelační funkce (**empirickou parciální autokorelační maticovou funkci**) dostaneme tak, že do vztahu (11.1) dosadíme za autokovarianční maticovou funkci  $\Gamma_k$  její odhad, tj. empirickou autokovarianční funkci  $\mathbf{c}_k$ .

*Poznámka.* Pro analýzu vícerozměrných časových řad je možno využít všechny přístupy popsané v části 1.3. Pro vytváření předpovědí platí to, co bylo uvedeno v části 1.4, pro hodnocení kvality předpovědí je nejvhodnější míra SMAPE.



### Kontrolní otázky

1. Jak je definována  $m$ -rozměrná časová řada?
2. Které jsou základní teoretické charakteristiky  $m$ -rozměrné časové řady?
3. Jak se počítají odhady základních teoretických charakteristik pro  $m$ -rozměrnou časovou řadu?
4. Proč se míra kvality předpovědí SMAPE považuje za nejvhodnější?



**Korespondenční úkol 11.** Vyberte si nějakou dvourozměrnou časovou řadu (obsahující alespoň 50 pozorování) takovou, že sledované náhodné veličiny spolu souvisejí (např. míra nezaměstnanosti a počet uchazečů o jedno volné pracovní místo). Spočtěte pro tuto řadu vektor aritmetických průměrů, empirickou kovarianční matici  $\mathbf{S}$  a empirickou autokovarianční maticovou funkci  $\mathbf{c}_k$  pro  $k = 1, 2, 3, 4$  a  $5$ .

Doporučená struktura:

1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. výpočet empirických charakteristik,
3. interpretace výsledků.



### Pojmy k zapamatování:

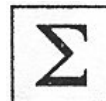
- $m$ -rozměrná časová řada,
- slabá stacionarita,
- vektor středních hodnot,
- kovarianční matice,
- autokovarianční maticová funkce,



- autokorelační maticová funkce,
- parciální autokorelační maticová funkce,
- vektor aritmetických průměrů,
- empirická kovarianční matice,
- empirická autokorelační maticová funkce,
- empirická autokorelační maticová funkce,
- empirická parciální autokorelační maticová funkce.

### **Shrnutí**

V této kapitole se zavádí pojem vícerozměrné časové řady jako zobecnění dříve zavedeného pojmu jednorozměrné časové řady. Výklad se zaměřuje na definice základních teoretických charakteristik takových řad a výpočet příslušných empirických charakteristik z experimentálních dat.





## 12 LINEÁRNÍ MODELY VÍCEROZMĚRNÝCH ČASOVÝCH ŘAD

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte podstatu vícerozměrného (vektorového) lineárního procesu,
- porozumíte podmínkám pro jeho slabou stacionaritu,
- poznáte vlastnosti základních typů vícerozměrného lineárního procesu (vícerozměrný proces klouzavých součtů, vícerozměrný autoregresní proces, vícerozměrný smíšený proces).
- pochopíte základní nástroje ke zkoumání kauzálních vztahů mezi časovými řadami (Grangerova kauzalita, analýza impuls – reakce),
- pochopíte princip kointegrace časových řad.

**Klíčová slova:** vícerozměrný lineární proces, vícerozměrné autoregresní modely, vícerozměrné modely klouzavých součtů, vícerozměrné smíšené modely, kauzalita, odezva na impuls, kointegrace časových řad.

Přechod od jedné dimenze k více dimenzím znamená v podstatě pouze větší formální a výpočetní složitost při konstrukci a analýze lineárních modelů stacionárních časových řad. Paralelní popis více časových řad však přináší některé prvky, které mají výhradně vícerozměrný charakter (např. kauzální vztahy nebo kointegrace mezi jednotlivými časovými řadami).



### 12.1 Vícerozměrný lineární proces

Stacionární vícerozměrný lineární proces  $\{\mathbf{Y}_t\}$  může být vyjádřen jako lineární kombinace řady nekorelovaných identicky rozdělených náhodných vektorů. Takový ***m*-rozměrný lineární proces** je definován jako nekonečná řada

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} \dots, \quad (12.1)$$

v níž  $\mathbf{I}_1$  je jednotková matice typu  $m \times m$ ,  $\boldsymbol{\psi}_k$ ,  $k=1,2, \dots$ , matice parametrů typu  $m \times m$  a  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$  představuje ***m*-rozměrný proces bílého šumu** s nulovým vektorem středních hodnot a autokovarianční maticovou funkcí (viz [3]).

*m*-rozměrný lineární proces

*m*-rozměrný proces bílého šumu

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t-k}) = \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon & \text{pro } k = 0, \\ \mathbf{0} & \text{pro } k \neq 0. \end{cases}$$

*Poznámky.*

1. Pro obecný stacionární vícerozměrný lineární proces je třeba vztah (12.1) přepsat ve tvaru

$$\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} \dots,$$

kde  $\boldsymbol{\mu}$  označuje příslušný  $m$ -rozměrný vektor středních hodnot. Dále budeme používat zjednodušeného zápisu ve formě (12.1).

2. Namísto vícerozměrný lineární proces se často používá název vektorový lineární proces.

Pomocí operátoru zpětného posunutí (operátoru zpoždění)  $B$  lze vztah (12.1) zapsat jako

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\psi}(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

přičemž

$$\boldsymbol{\psi}(B) = \mathbf{I}_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_k B^k.$$

Vícerozměrný lineární proces je slabě **stacionární**, jestliže platí

$$\sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_{ij,k}^2 < \infty,$$

kde  $\boldsymbol{\psi}_{ij,k}$  je  $(i, j)$ -tý prvek matice  $\boldsymbol{\psi}_k$ .

## 12.2 Vícerozměrné procesy klouzavých součtů

Model VMA( $q$ )

Vícerozměrný (vektorový) **proces klouzavých součtů** řádu  $q$  (označovaný jako **VMA( $q$ )**) můžeme popsat modelem

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\vartheta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\vartheta}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} \dots + \boldsymbol{\vartheta}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q}$$

nebo s použitím operátoru  $B$  jako

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\vartheta}_q(B) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde  $\boldsymbol{\vartheta}_q(B) = (\mathbf{I}_1 + \boldsymbol{\vartheta}_1 B + \boldsymbol{\vartheta}_2 B^2 \dots + \boldsymbol{\vartheta}_q B^q)$  je polynomiální matice.

Je nutno si uvědomit, že počet parametrů může být i při malém řádu modelu  $q$  velký, protože  $\boldsymbol{\vartheta}_1, \boldsymbol{\vartheta}_2, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_q$  jsou matice, nikoliv skaláry.

Proces VMA( $q$ ) je stacionární pro libovolné hodnoty parametrů a invertibilní, pokud všechny kořeny rovnice  $|\mathbf{I}_1 + \boldsymbol{\vartheta}_1 B + \boldsymbol{\vartheta}_2 B^2 \dots + \boldsymbol{\vartheta}_q B^q| = 0$

leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Jeho autokovarianční maticovou funkci je možno vyjádřit takto

$$\Gamma_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-k} \vartheta_j \Sigma_\varepsilon \vartheta_{j-k} & \text{pro } k \leq q \\ \mathbf{0} & \text{pro } k > q \end{cases},$$

přitom  $\Sigma_\varepsilon$  je kovarianční matice bílého šumu a  $\mathbf{0}$  je nulová matice typu  $m \times m$ .

Hodnoty parciální autoregresní maticové funkce s rostoucí hodnotou  $k$  exponenciálně klesají (viz[3]).

## 12.2 Vícerozměrné autoregresní procesy

Vícerozměrný (vektorový) autoregresní proces řádu  $p$  (označovaný **VAR( $p$ )**) má model

Model VAR( $p$ )

$$\mathbf{Y}_t = \varphi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \varphi_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \varphi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (12.2)$$

který lze pomocí operátoru  $B$  zapsat jako

$$\varphi_p(B) \mathbf{Y}_t = \varepsilon_t.$$

Operátor  $\varphi_p(B) = (\mathbf{I}_1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p)$  přitom představuje polynomiální matici.

Tento proces je invertibilní pro všechny hodnoty parametrů a stacionární, jestliže všechny kořeny rovnice  $|\mathbf{I}_1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p| = 0$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Autokovarianční maticovou funkci procesu VAR( $p$ ) můžeme vyjádřit jako (podle [3])

$$\Gamma_k = \begin{cases} \varphi_1 \Gamma_{k-1} + \varphi_2 \Gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \Gamma_{k-p} & \text{pro } k > 0 \\ \varphi_1 \Gamma_1^T + \varphi_2 \Gamma_2^T + \dots + \varphi_p \Gamma_p^T + \Sigma_\varepsilon & \text{pro } k = 0 \end{cases}.$$

## 12.3 Vícerozměrné smíšené procesy

**Model** vícerozměrného smíšeného procesu řádu  $p$  a  $q$  (**VARMA( $p,q$ )**) má tvar

Model VARMA( $p,q$ )

$$\mathbf{Y}_t = \varphi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \varphi_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \varphi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \varepsilon_t + \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} + \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \vartheta_q \varepsilon_{t-q}$$

nebo (s použitím operátoru  $B$ )

$$\varphi_p(\mathbf{B})\mathbf{Y}_t = \vartheta_q(\mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

příčemž operátory

$$\begin{aligned}\varphi_p(\mathbf{B}) &= (\mathbf{I}_1 - \varphi_1\mathbf{B} - \varphi_2\mathbf{B}^2 - \dots - \varphi_p\mathbf{B}^p) \\ \text{a } \vartheta_q(\mathbf{B}) &= (\mathbf{I}_1 + \vartheta_1\mathbf{B} + \vartheta_2\mathbf{B}^2 + \dots + \vartheta_q\mathbf{B}^q)\end{aligned}$$

Jsou polynomiální matice. Proces VARMA( $p, q$ ) je stacionární, jestliže všechny kořeny rovnice  $|\mathbf{I}_1 - \varphi_1\mathbf{B} - \varphi_2\mathbf{B}^2 - \dots - \varphi_p\mathbf{B}^p| = 0$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, a invertibilní, pokud se všechny kořeny rovnice  $|\mathbf{I}_1 + \vartheta_1\mathbf{B} + \vartheta_2\mathbf{B}^2 + \dots + \vartheta_q\mathbf{B}^q| = 0$  nacházejí vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.

## 12.5 Kauzální vztahy

Jedním ze základních problémů, jímž se zabývá analýza vícerozměrných časových řad, je studium kauzálních (příčinných) vztahů mezi jednotlivými časovými řadami. Kauzalita je pojem filozofický. Základní filozofické přístupy ke kauzalitě jsou vysvětleny např. v práci [16]. Aristoteles chápe kauzalitu jako vnitřní spojení mezi příčinou a účinkem nějaké síly. Empirik D. Hume se domnívá, že když je jeden jev následován jevem druhým a výskyt druhého jevu po jevu prvním je pravidelný a mnohokrát ověřený, pak jev první je příčinou a jev druhý důsledkem. Filozofické pojetí kauzality není pro statistiku vhodné. V současnosti se při ověřování kauzální souvislosti mezi jednotlivými časovými řadami používají dva základní přístupy:

1. Grangerovo pojetí kauzality,
2. analýza odezvy na impuls (analýza impuls – reakce).

### 12.5.1 Grangerovo pojetí kauzality

Grangerova koncepce kauzality není v souladu s filozofickým pojetím kauzality. O **kauzalitě podle Grangera** se mluví v případě, že existuje korelovanost mezi současnou hodnotou jedné časové řady a minulými (zpožděnými) hodnotami jiných časových řad. Přesnější definici Grangerovy kauzality je uvedena např. v monografii [3].

Pro testování kauzality jsou nejvhodnější modely VAR. Struktura modelů VAR umožňuje převést testování kauzality na vyšetřování nulovosti bloků určitých parametrů modelu VAR.

Kauzalita podle  
Grangera

Nejprve objasníme běžně používanou terminologii (viz [9]) v případě, že analyzujeme nějakou  $m$ -rozměrnou časovou řadu, tj. sledujeme paralelně časové změny náhodných veličin  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ .

- Jestliže zpožděné hodnoty náhodné veličiny  $Y_i$  v modelu VAR významně ovlivňují jinou náhodnou veličinu  $Y_j$ , pak veličina  $Y_i$  kauzálně působí podle Grangera na veličinu  $Y_j$ .
- Jestliže veličina  $Y_i$  kauzálně působí podle Grangera na veličinu  $Y_j$ , ale veličin  $Y_j$  kauzálně nepůsobí podle Grangera na veličinu  $Y_i$ , pak existuje jednosměrná závislost  $Y_j$  na  $Y_i$ .
- Jestliže veličina  $Y_i$  kauzálně působí podle Grangera na veličinu  $Y_j$  a také veličina  $Y_j$  kauzálně působí podle Grangera na veličinu  $Y_i$ , pak mezi veličinami  $Y_i$  a  $Y_j$  existuje zpětná vazba.
- Jestliže veličina  $Y_j$  kauzálně nepůsobí podle Grangera na veličinu  $Y_i$  a také veličina  $Y_i$  kauzálně nepůsobí podle Grangera na veličinu  $Y_j$ , pak veličiny  $Y_i$  a  $Y_j$  jsou podle Grangera nezávislé.

Použití zavedené terminologie ukážeme na příkladu převzatém z monografie [9]. Budeme uvažovat dvourozměrný model VAR(1). Z obecného (maticového) vztahu (12.2) dostaneme pro model VAR(1) dvě rovnice

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \varphi_{11}Y_{1,t-1} + \varphi_{12}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ Y_{2t} &= \varphi_{21}Y_{1,t-1} + \varphi_{22}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

Pak stačí otestovat nulové hypotézy o nulovosti parametrů uvažovaného modelu a na základě výsledků těchto testů rozhodnout, zda existují kauzální vztahy mezi náhodnými veličinami  $Y_1$  a  $Y_2$ . Pak existují následující možnosti.

- Je-li  $\varphi_{12} \neq 0$ , pak veličina  $Y_2$  kauzálně působí podle Grangera na veličinu  $Y_1$ .
- Je-li  $\varphi_{21} \neq 0$ , pak veličina  $Y_1$  kauzálně působí podle Grangera na veličinu  $Y_2$ .
- Jestliže platí  $\varphi_{12} \neq 0$  a  $\varphi_{21} = 0$ , pak existuje jednosměrná závislost veličiny  $Y_1$  na veličině  $Y_2$ .

- Jestliže platí  $\varphi_{12} = 0$  a  $\varphi_{21} \neq 0$ , pak existuje jednosměrná závislost veličiny  $Y_2$  na veličině  $Y_1$ .
- Jestliže platí  $\varphi_{12} = 0$  a  $\varphi_{21} = 0$ , pak jsou veličiny  $Y_1$  a  $Y_2$  podle Grangera nezávislé.

Vyšetřování kauzality podle Grangera se samozřejmě netýká jen kauzální závislosti mezi dvěma jednorozměrnými časovými řadami.

### 12.5.2 Odezva na impuls

#### Odezva na impuls

V této části ukážeme, jak se vysvětluje **odezva** vybrané vysvětlované proměnné jedné časové řady **na impuls** v některé rovnici modelu VAR.

*Poznámka.* Někteří autoři (např. [3]) mluví v této souvislosti o **analýze impuls – reakce**.

V  $m$ -rozměrném modelu VAR můžeme sledovat (v čase měřeném od okamžiku impulsu) celkem  $m^2$  odezev, pro každou z  $m$  vysvětlovaných proměnných vždy  $m$  odezev na impulsy v jednotlivých rovnicích. Za předpokladu, že model VAR je stacionární (s nulovým vektorem středních hodnot  $\mu$ ), vliv impulsů ve všech  $m^2$  případech odezní, i když s různou rychlostí. Tuto skutečnost budeme ilustrovat na následujícím příkladu převzatém z monografie [9].



**Příklad 12.1.** Uvažujme dvourozměrný modelů VAR(1) s nulovou střední hodnotou

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

a jeho odezvu na jednotkový impuls v čase  $t=0$  v první rovnici, tj. pro  $\varepsilon_{1,0} = 0$ . V tomto případě (při nulových ostatních hodnotách bílého šumu) budou odezvy nabývat postupně následujících hodnot:

$$\begin{pmatrix} Y_{1,0} \\ Y_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,0} \\ \varepsilon_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_{1,1} \\ Y_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Y_{1,2} \\ Y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Podobně, odezvy na jednotkový impuls v čase  $t=0$  ve druhé rovnici, tj. pro  $\varepsilon_{2,0} = 0$ , budou následující:



$$\begin{pmatrix} Y_{1,0} \\ Y_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,0} \\ \varepsilon_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_{1,1} \\ Y_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Y_{1,2} \\ Y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 \\ 0,09 \end{pmatrix}, \dots$$

*Poznámka.* Při výpočtech jsme předpokládali, že  $\mathbf{Y}_t$  je nulový vektor.

Je zřejmé, že v obou případech odezvy v průběhu času odeznívají. Odezva vysvětlované proměnné  $Y_2$  na jednotkový impuls v první rovnici je nulová, což lze vysvětlit tím, že parametr  $\varphi_{2,1}$  je roven nule.

## 12.6 Kointegrace časových řad

Tato část se týká výhradně vícerozměrných časových řad, které jsou nestacionární. Ve většině případů, když se lineárně kombinují nestacionární časové řady, je výsledkem opět nestacionární jednorozměrná časová řada.

Nejprve připomeneme, že model nestacionární časové řady  $\{Y_t\}$  představuje integrovaný proces řádu  $I(d)$  ( $Y_t \sim I(d)$ ), jestliže je možné tuto řadu stacionarizovat pomocí diferencování řádu  $d$ . Speciálně proces náhodné procházky je integrovaný proces 1. řádu a smíšené procesy  $ARIMA(p, d, q)$  jsou integrované procesy řádu právě  $d$ .

Jestliže nestacionární  $m$ -rozměrná časová řada  $\{\mathbf{Y}_t\}$  splňuje podmínku  $Y_{it} \sim I(d_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , pak pro lineární kombinaci jednotlivých složek

této řady obecně platí  $\sum_{i=1}^m \alpha_i Y_{it} \sim I\left(\max_{j=1,2,\dots,m} d_j\right)$ . To znamená, že libovolná

netriviální (tj. nenulová) lineární kombinace uvažovaných řad může být stacionarizována diferencováním, jehož řád je maximem řádů jednotlivých řad.

U finančních časových řad můžeme relativně často lineárně kombinovat výchozí nestacionární časové řady tak, že výsledná lineární kombinace je už stacionární. Takový případ se označuje jako **kointegrace uvažovaných časových řad** a může být interpretován jako vztah určité dlouhodobé rovnováhy mezi těmito řadami. Jednotlivé časové řady jsou sice nestacionární, ale jejich společný (kointegrační) vývoj v čase dlouhodobě směřuje k nějakému rovnovážnému stavu. Modelování kointegrace je v současnosti jedním z hlavních témat ekonometrie (viz např. [12]).

Kointegrace  
časových řad

V praxi se kointegrace nejlépe analyzuje v modelech VAR. Ukážeme to na jednoduchém příkladu převzatém z monografie [9].



**Příklad 12.2.** Uvažujeme dvě časové řady  $\{Y_{1t}\}$  a  $\{Y_{2t}\}$ , jež můžeme modelovat společně pomocí dvourozměrného modelu VAR(1)

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}. \quad (12.3)$$

Uvedený model není stacionární, protože rovnice  $|\mathbf{I}_1 - \varphi\mathbf{B}| = 0$  má jednotkový kořen. Ani samotné časové řady

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= 0,5Y_{1,t-1} - 0,25Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ Y_{2t} &= -Y_{1,t-1} + 0,5Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

$\{Y_{1t}\}$  a  $\{Y_{2t}\}$  nejsou stacionární, lze totiž dokázat, že se obě dají popsat modelem ARIMA(0,1,1) a ten odpovídá integrovanému procesu I(1).

Nyní transformujeme řady  $\{Y_{1t}\}$  a  $\{Y_{2t}\}$  na jiné řady  $\{Z_{1t}\}$  a  $\{Z_{2t}\}$  a bílý šum  $\varepsilon_{1t}$  a  $\varepsilon_{2t}$  na jiný bílý šum  $u_{1t}$  a  $u_{2t}$  násobením zleva maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

Protože vztah (12.3) můžeme přepsat ve tvaru

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \mathbf{P}\varphi \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{P} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix},$$

dostaneme po dosazení

$$\begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Rozepsání tohoto modelu do složek vypadá takto:

$$\begin{aligned} Z_{1t} &= u_{1t}, \\ Z_{2t} &= Z_{2,t-1} + u_{2t}, \end{aligned}$$

takže řada  $\{Z_{1t}\}$  představuje pouze bílý šum, tj. proces  $I(0)$ , a řada  $\{Z_{2t}\}$  proces náhodné procházky, který je při nulové počáteční hodnotě ( $Z_{20} = 0$ ) také procesem  $I(0)$ .

Před transformací byly obě časové řady nestacionární, po transformaci není v systému (za předpokladu  $Z_{20} = 0$ ) žádná nestacionární řada. Tato skutečnost je způsobena existencí kointegračního vztahu (stacionární lineární kombinace)

$$Y_{1t} + 0,5Y_{2t} = Z_{1t} = u_{1t}.$$

Další podrobnosti o kointegraci jsou v monografiích [3,9].

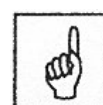
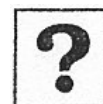
### Kontrolní otázky

1. Jak je definován pojem vícerozměrný lineární proces?
2. Jaká je postačující podmínka pro stacionaritu vícerozměrného lineárního procesu?
3. Klasifikujte vícerozměrné lineární procesy.
4. Jak se definují vícerozměrné procesy klouzavých součtů a jaké jsou podmínky pro jejich stacionaritu a invertibilitu?
5. Jak se definují vícerozměrné autoregresní procesy a jaké jsou podmínky pro jejich stacionaritu a invertibilitu?
6. Jak se definují vícerozměrné smíšené procesy a jaké jsou podmínky pro jejich stacionaritu a invertibilitu?
7. Jaké jsou základní přístupy k analýze kauzálních vztahů mezi časovými řadami a které modely jsou nejvhodnější pro jejich sledování?
8. Vysvětlete pojem kauzality podle Grangera. Čím se liší od filozofického pojetí kauzality?
9. Jak se postupuje při analýze odezvy na impuls?
10. Vysvětlete pojem kointegrace časových řad.

**Korespondenční úkol 12.** Definujte vícerozměrné procesy VMA(1), VAR(1), VARMA (1,1) a určete podmínky pro jejich stacionaritu a invertibilitu.

### Pojmy k zapamatování:

- vícerozměrný lineární proces,
- vícerozměrný proces bílého šumu,



- vícerozměrný proces klouzavých součtů,
- vícerozměrný autoregresní proces,
- vícerozměrný smíšený proces,
- kauzalita podle Grangera,
- odezva na impuls (analýza impuls – reakce),
- kointegrace časových řad.



### **Shrnutí.**

V této kapitole byl definován pojem vícerozměrného lineárního procesu a provedena klasifikace modelů vícerozměrných časových řad se zaměřením na jejich stacionaritu a invertibilitu. Dále byly zkoumány dva základní přístupy k analýze kauzálních vztahů mezi časovými řadami (kauzalita podle Grangera, analýza odezvy na impuls). V případě vícerozměrných nestacionárních časových řad byla věnována zvláštní pozornost problematice kointegrace těchto řad.

## 13 ZÁKLADNÍ POJMY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY ČASOVÝCH ŘAD

### Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte základní pojmy spektrální analýzy (úhlová frekvence, spektrální hustota, periodogram, spektrální filtr),
- naučíte se, jak odhadovat spektrální hustotu,
- pochopíte princip vybraných testů periodicity (Fischerův test, Siegelův test).

**Klíčová slova:** úhlová frekvence, periodogram, spektrální distribuční funkce, spektrální hustota, filtry, váhy filtru, Parzenovy váhy, testy periodicity, Fisherův test, Siegelův test.

Tato kapitola představuje pouze úvod do spektrální analýzy časových řad; obsahuje především výklad základních pojmů z uvedeného oboru. Zvláštní pozornost věnujte postupům pro odhad spektrální hustoty časové řady a pro testování významnosti vybraných frekvencí.



### 13.1 Pojem úhlové frekvence

**Úhlová frekvence**  $\omega$  se v souvislosti se spektrální analýzou časových řad udává v radiánech za uvažovanou časovou jednotku, kterou je časové „vzdálenost“ mezi dvěma po sobě jdoucími pozorováními řady. Např. úhlová frekvence  $2\pi$  znamená, že se za zvolenou časovou jednotku uskuteční právě jeden cyklus. Čím větší je hodnota úhlové frekvence, tím častěji se v průběhu dané časové řady cykly opakují. V teorii se zavádí pojem **Nyquistova frekvence**, jež se definuje jako nejvyšší frekvence, která umožňuje studovat periodické chování časové řady na základě pozorování prováděných v diskrétních časech. Tato frekvence má zřejmě hodnotu  $\pi$ .

Úhlová frekvence

Nyquistova frekvence

### 13.2 Periodogram

**Periodogram**  $I(\omega)$  dané časové řady  $\{Y_t\}$  délky  $n$  se definuje jako funkce úhlové frekvence  $\omega$  ve tvaru

Periodogram

$$I(\omega) = \frac{1}{4\pi} [a^2(\omega) + b^2(\omega)] \quad \text{pro } -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (13.1)$$

kde

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n y_t \cos(\omega t),$$

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n y_t \sin(\omega t).$$

Vztah (13.1) umožňuje tedy počítat periodogram přímo z hodnot jednotlivých pozorování časové řady.

Periodogram lze také konstruovat pomocí odhadů autokovarianční funkce

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( c_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cos(\omega k) \right). \quad (13.2)$$

Do praxe byl zaveden jako nástroj pro hledání významných periodických složek (frekvencí) časové řady. Představuje velmi hrubý odhad spektrální hustoty (viz dále).

### 13.3 Spektrální hustota

Spektrální  
distribuční funkce

Nejprve zavedeme **spektrální distribuční funkci**  $F(\omega)$ . Tato funkce má pro stacionární časovou řadu  $\{Y_t\}$  s (teoretickou) autokovarianční funkcí  $\gamma_k$  následující vlastnosti:

- je neklesající v intervalu  $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$ ,
- je spojitá zleva v každém bodě daného intervalu,
- splňuje limitní vztahy  $F(-\pi) = 0$ ,  $F(\pi) = \text{var}(y_t)$ .

Pro zmíněnou autokovarianční funkci platí

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega k) dF(\omega), \quad k = 0, 1, \dots \quad (13.3)$$

Vyjádření (13.3) se nazývá **spektrální rozklad autokovarianční funkce**. Lze dokázat, že pro stacionární časovou řadu existuje právě jediná funkce  $F(\omega)$  s uvedenými vlastnostmi.

Spektrální hustota

Je-li  $F(\omega)$  absolutně spojitá, pak existuje funkce  $f(\omega)$  s názvem **spektrální hustota** taková, že

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(\omega) d\omega.$$

Výraz  $f(\omega) d\omega$  přitom udává intenzitu, s jakou je periodická složka s frekvencemi  $(\omega, \omega + d\omega)$  zastoupena v dané časové řadě. Intenzitu zastoupení periodické složky s frekvencemi v intervalu  $(\omega_1, \omega_2)$  pak určuje integrál

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega = F(\omega_2) - F(\omega_1).$$

Spektrální rozklad autokovarianční funkce (13.3) je možno při existenci spektrální hustoty zapsat ve tvaru

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega k) f(\omega) d\omega. \quad (13.4)$$

Vztah (13.4) reprezentuje Fourierovu transformaci funkce  $f(\omega)$ . Příslušná inverzní Fourierova transformace pak umožňuje vyjádřit spektrální hustotu  $f(\omega)$  pomocí hodnot autokovarianční funkce  $\gamma_k$  jako

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) = \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right]. \quad (13.5)$$

Z vyjádření (13.5) vyplývají základní vlastnosti spektrální hustoty:

- $f(\omega)$  je periodická funkce s periodou  $2\pi$ ,
- $f(\omega)$  je reálná sudá funkce ( $f(\omega) = f(-\omega)$ ), takže stačí sledovat její průběh pro frekvence  $\omega \in \langle 0, \pi \rangle$ .

**Příklad 13.1.** Určete spektrální hustotu bílého šumu  $\varepsilon_t$ .

*Řešení.* Pro bílý šum platí:

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \gamma_0 = \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \text{ pro všechna } t,$$

$$\gamma_k = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \text{ pro všechna } k.$$

Odtud podle vzorce (13.4) dostaneme

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}.$$

## 13.4 Filtry

Nejprve uvedeme definici filtru. **Filtr s vahami**  $\{\delta_k\}$  transformuje danou časovou řadu  $\{Y_t\}$  na časovou řadu  $\{Z_t\}$ , kde

$$Z_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j Y_{t-j}. \quad (13.6)$$



Filtry

Předpokládáme přitom, že uvedený zápis má smysl, tj. řada  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j Y_{t-j}$  v jistém smyslu konverguje. Vztah (13.6) připomíná výpočet vyrovnaných hodnot časové řady  $\{Y_t\}$  metodou klouzavých průměrů. Proto nepřekvapuje, že filtrování slouží k vyhlazování (vyrovnávání) časových řad.

V praxi mají největší význam **filtry useknutého typu**, pro něž platí  $\delta_j = 0, j > m$ . Takovým filtrům se říká **filtry délky**  $2m+1$ . Dále se rozlišují **filtry symetrické** ( $\delta_k = \delta_{-k}$  pro všechna  $k$ ) a **jednostranné** ( $\delta_k = 0$  pro  $k < 0$ ).



Pro pochopení dalšího výkladu je důležité, abyste si zopakovali vyjádření komplexní exponenciální funkce ve tvaru

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$$

a tzv. Eulerovy vzorce

$$\cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}, \quad \sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}.$$

Má-li sledovaná řada  $\{Y_t\}$  spektrální hustotu  $f(\omega)$ , pak za jistých předpokladů (zejména  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j < +\infty$ ) existuje také spektrální hustota  $g(\omega)$  přefiltrované řady  $\{z_t\}$ , přičemž platí

$$g(\omega) = |D(\omega)|^2 f(\omega), \quad (13.7)$$

Přenosová funkce  
filtru

kde komplexní veličina  $D(\omega)$  je tzv. **přenosová funkce filtru** definovaná vztahem

$$D(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j e^{-i\omega k}.$$

Pro symetrické filtry má přenosová funkce zřejmě tvar

$$D(\omega) = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \cos(\omega k).$$

Význam přenosové funkce spočívá v tom, že nám umožňuje dělat závěry o účinku daného filtru na sledovanou časovou řadu  $\{Y_t\}$ . Ze vztahu (13.7) vyplývá, že daný filtr zdůrazní ve filtrované řadě  $\{Z_t\}$  frekvence blízké maximálním hodnotám  $|D(\omega)|^2$ , zatímco frekvence odpovídající



nízkým hodnotám  $|D(\omega)|^2$  naopak potlačí. Vzorec (13.6) dovoluje odvodit vztah pro spektrální hustotu stacionárních procesů ARMA (viz např. [8]).

### 13.5 Odhad spektrální hustoty

Je-li spektrální hustota  $f(\omega)$  spojitá, pak je příslušný periodogram jejím nestranným odhadem.

Jako odhad  $\hat{f}(\omega_0)$  spektrální hustoty pro konkrétní frekvenci  $\omega_0$  se používá vyrovnaný periodogram ve tvaru

$$\hat{f}(\omega_0) = \int_{-\pi}^{\pi} s(\omega - \omega_0) I(\omega) d\omega, \quad (13.8)$$

kde  $s(\omega)$  je nějaká vhodná funkce. Vhodnou volbou funkce  $s(\omega)$  lze dosáhnout toho, že výraz na pravé straně (13.8) je dostatečně blízký odhadované hodnotě  $f(\omega_0)$ .

Vztah (13.8) můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\hat{f}(\omega_0) = w_0 c_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} w_k c_k \cos(\omega_0 k),$$

v němž  $c_k$  představují odhadnuté autokovariance a  $w_k$  vhodně zvolené váhy. Periodogram převedeme na dobrý odhad spektrální hustoty tím, že v jeho vyjádření (13.2) potlačíme pomocí vhodného systému vah nespolehlivé odhady  $c_k$  s velkými hodnotami indexu  $k$ .

Existuje bohatá nabídka systémů vah (systémů tzv. oken) pro konstrukci odhadů spektrální hustoty. (viz např. [1]. V současnosti se za nejlepší považují **Parzenovy odhady** založené na vahách

Parzenovy váhy

$$w_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[ 1 - \frac{6k^2}{K^2} \left( 1 - \frac{k}{K} \right) \right] & \text{pro } k = 0, 1, \dots, \frac{K}{2}, \\ \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{k}{K} \right)^3 & \text{pro } k = \frac{K}{2} + 1, \dots, K, \\ 0 & \text{pro } k > K, \end{cases}$$

kde  $K$  je nějaké sudé číslo v rozmezí od  $\frac{n}{6}$  do  $\frac{n}{5}$ . Přitom se doporučuje počítat odhady spektrální hustoty pro frekvence

$$\omega_j = \frac{\pi j}{K} \text{ pro } j = 0, 1, \dots, K.$$

### 13.6 Testy periodicity

Testy periodicity představují objektivní metody, které umožňují rozhodnout, zda je nebo není možno pro danou časovou řadu zkonstruovat model

$$Y_t = \mu + \sum_{j=1}^p (\alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t)) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (13.9)$$

v němž  $\mu, \alpha_j, \beta_j$  jsou neznámé parametry,  $\omega_j$  navzájem různé frekvence z intervalu  $(0, \pi)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , a  $\varepsilon_t$  bílý šum s normálním rozdělením  $N(0, \sigma^2)$ , kde  $\sigma^2 > 0$  je další neznámý parametr. Všechny takové metody jsou založeny na vyšetřování periodogramu. Uvedeme dvě nejčastěji používané metody:

- Fischerův test,
- Siegelův test.

Fischerův test

**Fischerův test** je založen na testování nulové hypotézy  $H_0 : y_t = \varepsilon_t$  proti alternativní hypotéze, která má tvar (13.9). Vychází se z hodnot periodogramu dané časové řady vypočtených pro frekvence

$$\omega_j^* = \frac{2\pi j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

kde  $m$  je největší celé číslo splňující nerovnost  $m \leq (n-1)/2$ . Za předpokladu, že je nulová hypotéza pravdivá, neměla by žádná z hodnot periodogramu být významně vyšší než hodnoty ostatní. Hodnoty periodogramu se nejprve normují do tvaru

$$\eta_j = \frac{I(\omega_j^*)}{\sum_{j=1}^m I(\omega_j^*)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Testovací kritérium má tvar

$$W = \max_{j=1,2,\dots,m} \eta_j.$$

Nulová hypotéza se zamítá na hladině významnosti  $\alpha$ , jestliže pro experimentálně zjištěnou hodnotu kritéria platí

$$W_{\text{exp}} > g_F(\alpha),$$

kde  $g_F(\alpha)$  představuje kritickou hodnotu Fisherova testu na zvolené hladině  $\alpha$ . Kritické hodnoty  $g_F(\alpha)$  jsou pro jednotlivá  $m$  tabelovány např. v monografii [9].

Jestliže pomocí Fisherova testu prokážeme významnost nějaké periodické složky, např. frekvence  $\omega_{j_0}^*$ , pak můžeme testovat významnost

další (v pořadí podle velikosti) hodnoty periodogramu. Postupuje se analogicky s tím, že se vynechá hodnota  $I(\omega_{j_0}^*)$  a hodnota  $m$  se sníží o jednotku.

V praxi se ukázalo, že Fischerův test je málo účinný v případě tzv. **složené periodicity**, kdy existuje více statisticky významných periodických složek.

Při složené periodicitě se považuje za vhodnější **Siegelův test**, jenž je modifikací testu Fischerova. Siegel [22] doporučil používat k testování namísto kritéria  $W$  jiné kritérium ve tvaru

$$T_\lambda = \sum_{j=1}^m (\eta_j - \lambda g_F(\alpha))^+,$$

kde  $(z)^+ = \max(z, 0)$ ,  $g_F(\alpha)$  je kritická hodnota Fisherova testu na zvolené hladině významnosti a  $0 < \lambda < 1$  předem zvolená konstanta. V tomto případě se nulová hypotéza zamítá, když pro experimentální hodnotu kritéria platí

$$(T_\lambda)_{\text{exp}} > t_\lambda(\alpha);$$

$t_\lambda(\alpha)$  přitom označuje kritickou hodnotu Siegelova testu na hladině významnosti  $\alpha$ . Kritické hodnoty pro Siegelův test jsou tabelovány v monografii [22].

Jestliže se pomocí některého z testů periodicity podaří nalézt vhodný model typu (13.9), pak se k určení parametrů  $\mu, \alpha_j, \beta_j$  tohoto modelu použije metody nejmenších čtverců.

Pro praktické aplikace spektrální analýzy se doporučuje pracovat s časovými řadami délky alespoň 100. Navíc je vhodné ještě před zahájením spektrální analýzy odstranit z časové řady trendovou a sezónní složku.

### Kontrolní otázky

1. Jak se definuje úhlová frekvence v analýze časových řad?
2. Co je to periodogram časové řady a jaký má význam v praxi?
3. Jak se definuje spektrální hustota a jak se odhaduje její průběh?
4. Jak je definován filtr a k čemu slouží filtrování časové řady?
5. K čemu slouží testy periodicity?
6. Jak se postupuje při testování periodicity v případě Fisherova testu periodicity?
7. Jak se postupuje při testování periodicity v případě Siegelova testu periodicity?



Složená periodicitá

Siegelův test



**Korespondenční úkol 13.** Vyberte si nějakou dvourozměrnou časovou řadu (obsahující alespoň 30 pozorování) s spočítejte pro tuto řadu periodogram.

Doporučená struktura:

1. stručný popis vybraných dat (včetně původu),
2. výpočet periodogramu,
3. aplikace Fisherova testu k určení významných frekvencí,
4. interpretace výsledků.



**Pojmy k zapamatování:**

- úhlová frekvence,
- Nyquistova frekvence,
- periodogram,
- spektrální distribuční funkce,
- spektrální rozklad autokovarianční funkce,
- spektrální hustota,
- filtr
  - filtr useknutého typu,
  - filtr symetrický,
  - filtr jednostranný,
- přenosová funkce filtru,
- Parzenovy váhy (Parzenovo „okno“),
- Fischerův test periodicity,
- Siegelův test periodicity,
- složená periodicitata.



**Shrnutí**

Tato kapitola představuje úvod do spektrální analýzy časových řad. Zvláštní pozornost je přitom věnována vysvětlení základních pojmů spektrální analýzy, takových jako úhlová frekvence, periodogram spektrální hustota a testy periodicity. Výklad je zaměřen na praktické aspekty spektrální analýzy. Vychází především z monografie [9].

## AUTOTEST

Uvádíme typové otázky, resp. příklady, jež se mohou vyskytnout v závěrečném testu. Většina z nich vyžaduje volnou (tvořenou) odpověď. Požaduje se, aby odpovědi byly stručné, ale přitom výstižné. V případě zadání, která vyžadují nějaký výpočet, uvádíme správné řešení v hranatých závorkách.

1. Definice ČŘ, délky ČŘ, chyby předpovědi a míry kvality předpovědi
2. Přehled základních přístupů k analýze trendu. Princip metody klouzavých průměrů
3. Princip Wintersovy metody
4. Lineární procesy: definice a klasifikace. Vlastnosti ARMA modelů
5. Teoretické autokovarianční a autokorelační funkce: definice a vlastnosti
6. Základní etapy výstavby modelu podle Boxe-Jenkinse. Odhady parametrů
7. Vyhlazení zadané ČŘ pomocí jednoduchých klouzavých průměrů délky 3:  
569,416,422,565,484,520,573,518,501,505,468,382,310,334,369,  
372,439,448,349,395  
[-; 469; 467,7; 490,3; 523; 527,3; 537; 530,7; 508; 491,3; 451,7;  
386,7; 342; 337,7; 358,3; 393,3; 419,7; 412; 397,3; -]  
nebo  
Vyhlazení zadané ČŘ pomocí klouzavých mediánů délky 3:  
569,416,422,565,484,520,573,518,501,505,468,382,310,334,369,  
372,439,448,349,395  
[-; 422; 422; 484; 520; 520; 520; 518; 505; 501; 468; 382; 334;  
334; 369; 372; 439; 439; 395; -]
8. Rozepsat lineární model ARIMA(1,1,1)  
$$[(1 - \varphi_1 B)(1 - B)Y_t = (1 + \vartheta_1 B)\varepsilon_t]$$
  
nebo  
Rozepsat lineární model SARIMA(1,1,1)×(1,1,1)<sub>12</sub>  
$$[(1 - \varphi_1 B)(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - B)(1 - B^{12})Y_t = (1 + \vartheta_1 B)(1 + \Theta_1 B^{12})\varepsilon_t]$$



## LITERATURA

- [1] ANDĚL, J. *Statistická analýza časových řad*. Praha: SNTL, 1976.
- [2] ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, E. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica (VŠE Praha), 2004.
- [3] ARLT, J. a M. ARLTOVÁ. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing, 2009. ISBN 978-80-86946-85-6.
- [4] BOX, G. E. P. and G. M. JENKINS. *Times series analysis, forecasting and control*. San Francisco: Holden Day, 1970. Ruský překlad: *Analýz vremennych rjadov, prognoz i upravlenija*. Moskva: Mir, 1974.
- [5] BROCKWELL, P. J. and R. A. DAVIS. *Time Series: Theory and Methods*. Springer Series in statistics. New York: Springer, 1991.
- [6] BROWN, R. G. *Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series*. London: Prentice-Hall, 1963.
- [7] BROWN, R. G. and R. F. MEYER. The fundamental theory of exponential smoothing. *Operations Research*. 1961, vol. 9, p. 673-685.
- [8] CIPRA, T. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. Praha: SNTL/ALFA, 1986.
- [9] CIPRA, T. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
- [10] ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with the estimates of the variance of United Kingdom inflations. *Econometrica*. 1982, vol. 50, p. 987-1007.
- [11] ENGLE, R. F. and C. W. J. GRANGER. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*. 1987, vol. 55, p. 251-276.
- [12] GOURIÉROUX, Ch. *ARCH models and financial applications*. New York: Springer, 1997. ISBN 0-387-94876-7.
- [13] GRANGER, C.W. J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. 1969, vol. 37, p. 424-438.
- [14] HOLT, C.C. *Forecasting seasonal and trends by eponentially weighted moving averages*. Res. Mem. no. 52. Pittsburg: Carnagie Institute of Technology, 1957.
- [15] CHATFIELD, C. *Time-Series Forecasting*. London: Chapman & Hall, 2000. ISBN 1-58488-063-5.
- [16] KORDA, J. Kauzalita jako metodologický problém ekonomie. *E-Logos. Electronic Journal for Philosophy*. 2007, s. 1-11.
- [17] KŘIVÝ, I. *Analýza časových řad*. Ostrava: skripta PřF OU, 2006.

- [18] KOZÁK, J., R.. HINDLS a J. ARLT. *Úvod do analýzy ekonomických časových řad*. Praha: skripta VŠE, 1994.
- [19] NCSS 2000. Number Cruncher Statistical Systems. Kaysville, 2000.
- [20] PRÁŠKOVÁ, Z. a P. LACHOUT. *Základy náhodných procesů*. Díl II. Praha: skripta MFF UK, 200.
- [21] SHUMWAY, R. H. and , D. S. STOFFER. *Time Series Analysis and Its Applications*. New York: Springer, 2000. ISBN 0-387-98950-1.
- [22] SIEGEL, A. F. Testiny for periodicity in a time series. *J. Amer. Statist. Assoc.* 1980, vol. 75, p. 345-348.
- [23] TUKEY, J. W. *Exploratory Data Analysis*. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1977. Ruský překlad: *Analiz rezultatov nabljudenij*. Moskva: Mir, 1981.
- [24] WINTERS, P. R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*. 1960, vol. 6, p. 324-342.
- [25] WHEELWRIGTH, S. C. and S. Makridakis. *Forecasting methods for management*. New York: Wiley, 1973.