T E C H N I C K Á U N I V E R Z I T A V L I B E R C I

FAKULTA STROJNÍ

KATEDRA MECHANIKY, PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

ŘEŠENÉ PROBLÉMY Z DYNAMIKY

Doc. Ing. Miroslav Šír, CSc.

2020

OBSAH:

Kapitola I: Pohybová rovnice hmotného bodu. ..... Strana 1
Příklad: Matematické kyvadlo v odporujícím prostředí. ..... Strana 1
Kapitola II: Newtonův gravitační zákon. ..... Strana 7
Příklad: Kosmický prak. ..... Strana 10
Kapitola III: Dynamika soustavy hmotných bodů pomocí dynamických vět. ..... Strana 17
Příklad: Dvojice hmotných bodů spojených pružinou v gravitačním poli. ..... Strana 19
Kapitola IV: Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro mechanický systém bez kinematických vazeb. ..... Strana 26
Příklad: Dvojice hmotných bodů spojených pružinou v gravitačním poli. ..... Strana 26
Kapitola V: Dynamika hmotného bodu s proměnnou hmotností. ..... Strana 30
Příklad: Sluneční plachetnice. ..... Strana 30
Kapitola VI: Dynamika posuvného pohybu tělesa. ..... Strana 34
Příklad: Hranol na dvou podporách s nestejným koeficientem smykového tření. ..... Strana 34
Kapitola VII: Dynamika obecného rovinného pohybu tělesa. ..... Strana 39
Příklad: Kaskadérský pokus. ..... Strana 41

Literatura. ..... Strana 50

Kapitola I: Pohybová rovnice hmotného bodu

1. Teorie

Nejprve připomeňme základní **definici** hmotného bodu:

Hmotný bod je objekt, který má nulové rozměry a nenulovou hmotnost.

Pohybová rovnice hmotného bodu vychází ze 2. Newtonova zákona (Zákon síly), kterou Newton vyslovil ve znění: *Hmotný bod se pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné velikosti působící síly, nepřímo úměrné hmotnosti hmotného bodu, a má směr působící síly,* neboli

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \ ,$$

Dnes zapisujeme zákon síly častěji ve tvaru

$$m\vec{a} = \vec{F} \ ,$$

přičemž $\vec{F}$ je třeba chápat jako výslednici všech působících sil,

takže *Newtonova pohybová rovnice* hmotného bodu je

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ . \tag{1.1}$$

Mezi síly $\vec{F}_i, i = 1...n$ přitom zahrnujeme všechny akční síly, tj. takové, které nezávisejí na vazbách hmotného bodu, a síly vazbové, které naopak jsou generovány existujícími vazbami.

Dynamické úlohy se často řeší s použitím *d'Alembertova principu*, kterým se zavádějí tzv. dynamické silové účinky. Pro hmotný bod je takovým dynamickým silovým účinkem *dynamická* (též *setrvačná*, *d'Alembertova*, ...) *síla*

$$\vec{D} = -m\vec{a} \ , \tag{1.2}$$

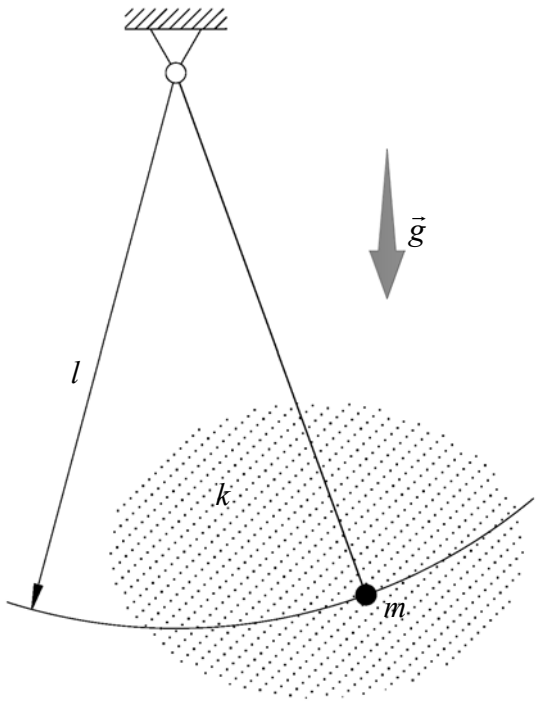
která dosazena do (1.1) dovolí napsat *d'Alembertovu pohybovou rovnici*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{D} = \vec{0} \ . \tag{1.3}$$

Nula na pravé straně připomíná rovnici rovnováhy známou ze statiky. Proto se (1.3) často nazývá jako *rovnice dynamické rovnováhy*.

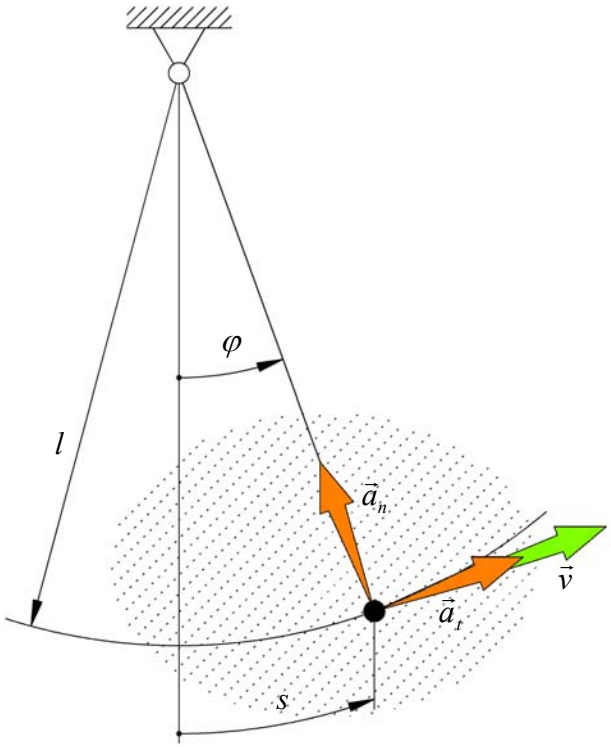
2. Příklad

Budeme studovat pohyb matematického kyvadla v odporujícím prostředí podle Obr. 1. *Matematické kyvadlo* je reprezentováno hmotným bodem o hmotnosti m zavěšeným na nehmotném vlákně délky l v tíhovém poli $\vec{g}$. Odporující prostředí je charakterizováno koeficientem k.



Obr. 1: Matematické kyvadlo v odporujícím prostředí

Obr. 2. znázorňuje *kinematické schéma*. Úhlovou výchylku φ vlákna budeme měřit od svislice, která je kolineární s daným vektorem tíhového zrychlení $\vec{g}$. Úhlové výchylce φ odpovídá dráha s proběhnutá hmotným bodem po kruhové trajektorii s poloměrem rovným délce l vlákna a se středem v místě zakotvení vlákna. Vlákno samo představuje normálu trajektorie a



Obr. 2: Kinematické schéma

tečna trajektorie je k této normále kolmá. Na tečně leží vektor $\vec{v}$ rychlosti a vektor $\vec{a}_t$ tečného zrychlení hmotného bodu. Vektor $\vec{a}_n$ normálového zrychlení hmotného bodu leží na normále.

Na Obr. 3. je *silové schéma* neboli *uvolnění* pro daný případ. Hmotný bod je zde nakreslen jako odpojený od vazby, tj. od závěsného vlákna, přičemž vazebný účinek závěsu je nahrazen vazebnou silou $\vec{N}$ ležící na normále.

Akčními silami jsou síla tíhová

$$\vec{G} = m\vec{g} \tag{2.1}$$

a odpor prostředí $\vec{R}$, který uvažujeme jako přímo úměrný druhé mocnině rychlosti v a směřující vždy proti směru rychlosti $\vec{v}$, tedy

$$\vec{R} = -k|v|\vec{v} \ , \tag{2.2}$$

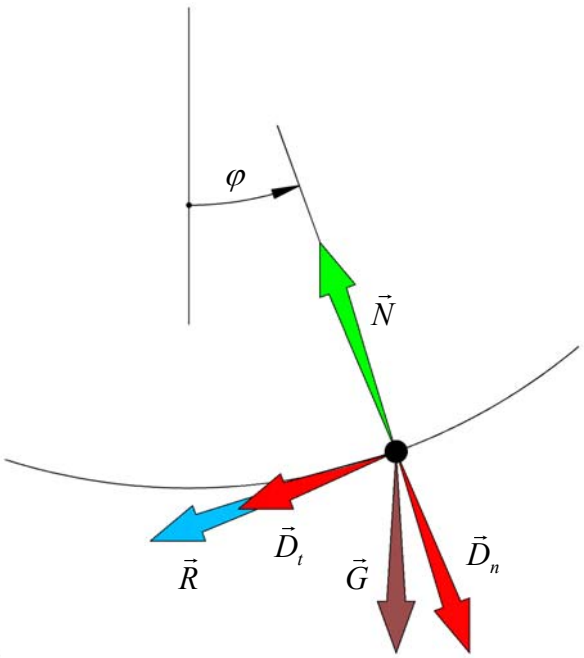
kde k je daná konstanta a absolutní hodnota $|v|$ zajistí, že skutečně $\vec{R}$ vždy směřuje proti $\vec{v}$.

Budeme-li postupovat metodou d'Alembertovou, bude nakonec součástí silového schématu i dynamická síla podle (1.2). Protože jsme ale zavedli zrychlení $\vec{a}$ hmotného bodu ve složkách $\vec{a}_t$, $\vec{a}_n$, zavedeme analogicky ve složkách

$$\begin{aligned} \vec{D}_t &= -m\vec{a}_t \ , \\ \vec{D}_n &= -m\vec{a}_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

i dynamickou sílu $\vec{D}$.

Úlohou je určit pro dané hodnoty g, m, l, k funkce $v(\varphi)$ a $N(\varphi)$ při dané počáteční podmínce $v(\varphi_0) = v_0$.



Obr. 3: Silové schéma

Nejprve napíšeme podle silového schématu *rovnice dynamické rovnováhy* v souřadnicovém systému tečna-normála jako

$$\begin{aligned} t: &\quad -G\sin(\varphi) - R - D_t = 0 \ , \\ n: &\quad N - G\cos(\varphi) - D_n = 0 \ . \end{aligned}$$

V rovnicích nyní *specifikujeme síly* G, R, D_t, D_n podle (2.1) až (2.3)

$$\begin{aligned} &-mg\sin(\varphi) - k|v|v - ma_t = 0 \ , \\ &N - mg\cos(\varphi) - ma_n = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nakonec připojíme *kinematické rovnice* hmotného bodu v souřadnicovém systému tečna-normála

$$a_t = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{l\,\mathrm{d}\varphi},$$
$$a_n = \frac{v^2}{l}. \tag{2.5}$$

Dosazením (2.5) do (2.4) dostaneme po úpravě dvojici rovnic

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{kl}{m}|v|v + gl\sin(\varphi) = 0\,, \tag{2.6}$$

$$N - mg\cos(\varphi) - m\frac{v^2}{l} = 0\,. \tag{2.7}$$

První z nich, (2.6), je přímo *hlavní pohybová rovnice*, protože neobsahuje žádné vazbové síly. Druhá rovnice, (2.7), poslouží k výpočtu vazbové síly N poté, co z rovnice (2.6) vypočteme rychlost v .

Řešení rovnice (2.6) komplikuje přítomnost členu $|v|$, který znemožňuje analytické řešení. Vzhledem k definici absolutní hodnoty

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{pro} \quad x < 0 \end{cases}$$

rozložíme řešení do dvou kroků.

V prvním budeme předpokládat pohyb kyvadla zleva doprava, tj. $v \geq 0$ při rostoucím φ. Rovnice (2.6) pak bude

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(v^2\right)}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{kl}{m}v^2 + gl\sin(\varphi) = 0\,, \tag{2.8}$$

která substitucí $v^2 = z$ přejde na lineární diferenciální rovnici 1. řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranou

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{2kl}{m}z = -2gl\sin(\varphi)\,. \tag{2.9}$$

Obecné řešení takové rovnice se skládá z obecného řešení $z_H(\varphi)$ příslušné homogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{2kl}{m}z_H = 0 \tag{2.10}$$

a z partikulárního integrálu korespondujícího se (v tomto případě) speciální pravou stranou úplné diferenciální rovnice.

Charakteristická rovnice k rovnici (2.10) je

$$\lambda + \frac{2kl}{m} = 0,$$

takže obecné řešení homogenní rovnice je

$$z_H = A\exp\left(-\frac{2kl}{m}\varphi\right),$$

kde A je integrační konstanta.

Partikulární integrál předpokládáme ve tvaru

$$z_P = p\cos(\varphi) + q\sin(\varphi),$$

kde p, q jsou konstanty, které určíme metodou neurčitých konstant, tj. dosazením do úplné rovnice (2.9):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left[p\cos(\varphi) + q\sin(\varphi)\right] + \frac{2kl}{m}\left[p\cos(\varphi) + q\sin(\varphi)\right] = -2gl\sin(\varphi)\,,$$
$$-p\sin(\varphi) + q\cos(\varphi) + p\frac{2kl}{m}\cos(\varphi) + q\frac{2kl}{m}\sin(\varphi) = -2gl\sin(\varphi),$$
$$\left(q + p\frac{2kl}{m}\right)\cos(\varphi) + \left(-p + q\frac{2kl}{m}\right)\sin(\varphi) = -2gl\sin(\varphi).$$

Pro p, q dostáváme dvě rovnice

$$q + p\frac{2kl}{m} = 0,$$

$$q\frac{2kl}{m} - p = -2gl$$

s řešením

$$p = \frac{2glm^2}{m^2 + 4k^2l^2},$$

$$q = -\frac{4kl^2gm}{m^2 + 4k^2l^2}.$$

Obecné řešení úplné diferenciální rovnice (2.9) je tak

$$z(\varphi) = A\exp\left(-\frac{2kl}{m}\varphi\right) + \frac{2glm^2\cos(\varphi) - 4kl^2gm\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}$$

resp. po úpravě a vzhledem k substituci,

$$v^2(\varphi) = A\exp\left(-\frac{2kl}{m}\varphi\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi) - 2kl\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}. \tag{2.11}$$

Integrační konstantu A budeme řešit později.

Ve druhém kroku budeme předpokládat pohyb kyvadla zprava doleva, tj. $v < 0$ při klesajícím φ. Rovnice (2.6) pak bude rovnice

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(v^2\right)}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{kl}{m}v^2 + gl\sin(\varphi) = 0\,, \tag{2.12}$$

která se od (2.8) liší vlastně jen znaménkem u konstanty k. Dostaneme proto řešení pro (2.12) záměnou znaménka u k ve výsledku (2.11):

$$v^2(\varphi) = A\exp\left(\frac{2kl}{m}\varphi\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi) + 2kl\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}. \tag{2.13}$$

Nyní budeme řešit otázku integrační konstanty A. Předpokládejme, že sledovaný děj začíná pohybem zleva doprava, tedy podle (2.11), počáteční rychlostí $v_0 \geq 0$, z polohy vlevo od svislice, tedy z polohy, kde $\varphi = \varphi_0 < 0$. Dosazení této počáteční podmínky do (2.11) umožní výpočet integrační konstanty A, kterou označíme jako A_0, takto

$$A_0 = \frac{v_0^2 - 2glm\dfrac{m\cos(\varphi_0) - 2kl\sin(\varphi_0)}{m^2 + 4k^2l^2}}{\exp\left(-\dfrac{2kl}{m}\varphi_0\right)}. \tag{2.14}$$

V první polovině úplného kyvu tak bude závislost rychlosti na poloze

$$v(\varphi) = \sqrt{A_0\exp\left(-\frac{2kl}{m}\varphi\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi) - 2kl\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}}. \tag{2.15}$$

S přechodem hmotného bodu do prostoru vpravo od svislice ovšem rychlost hmotného bodu klesá, až při určitém $\varphi = \varphi_1 > 0$ se zastaví, $v(\varphi_1) = v_1 = 0$. Dosazením do (2.15) tak dostaneme rovnici

$$A_0\exp\left(-\frac{2kl}{m}\varphi_1\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi_1) - 2kl\sin(\varphi_1)}{m^2 + 4k^2l^2} = 0 \tag{2.16}$$

pro φ_1. Tato rovnice je ovšem řešitelná jen numericky.

Nyní bude sledovaný děj pokračovat pohybem zprava doleva, tedy zápornou rychlostí podle (2.13), s výchozí rychlostí $v_1 = 0$, z polohy vpravo od svislice, tedy z polohy, kde $\varphi = \varphi_1 > 0$. Dosazení této počáteční podmínky do (2.13) umožní výpočet integrační konstanty A, kterou nyní označíme jako A_1, takto

$$A_1 = -2glm\frac{m\cos(\varphi_1) + 2kl\sin(\varphi_1)}{\left(m^2 + 4k^2l^2\right)\exp\left(\dfrac{2kl}{m}\varphi_1\right)}. \tag{2.17}$$

Ve druhé polovině úplného kyvu tak bude závislost rychlosti na poloze

$$v(\varphi) = -\sqrt{A_1 \exp\left(\frac{2kl}{m}\varphi\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi) + 2kl\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}}. \qquad (2.18)$$

Úplný kyv skončí, když rychlost hmotného bodu opět při určitém $\varphi = \varphi_2 < 0$ klesne k nule, $v(\varphi_2) = v_2 = 0$. Dosazením do (2.18) dostaneme rovnici

$$A_1 \exp\left(\frac{2kl}{m}\varphi_2\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi_2) + 2kl\sin(\varphi_2)}{m^2 + 4k^2l^2} = 0$$

pro φ_2.

Stejným způsobem se pokračuje dále po dobu výpočtu zvoleného počtu kyvů.

Nyní zbývá určit funkci $N(\varphi)$ pro zatížení nehmotného vlákna. Z rovnice (2.7) dostáváme

$$N = mg\cos(\varphi) + m\frac{v^2}{l},$$

přičemž za v dosazujeme postupně z (2.15), (2.18), ... Pro první polovinu prvního kyvu, tedy pro $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$, tak dostáváme

$$N(\varphi) = mg\cos(\varphi) + \frac{m}{l}\left[A_0 \exp\left(-\frac{2kl}{m}\varphi\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi) - 2kl\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}\right]$$

Ve druhé polovině prvního kyvu, tedy při $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$, je to,

$$N(\varphi) = mg\cos(\varphi) + \frac{m}{l}\left[A_1 \exp\left(\frac{2kl}{m}\varphi\right) + 2glm\frac{m\cos(\varphi) + 2kl\sin(\varphi)}{m^2 + 4k^2l^2}\right]$$

atd. pro další kyvy.

Matematický model ověříme na následujících numerických datech

$m = 2{,}0$ kg,

$l = 3{,}0$ m,

$g = 10{,}0$ ms^{-2},

$k = 0{,}2$ kgm^{-1}

při počáteční podmínce

$\varphi_0 = -0{,}3$ rad,

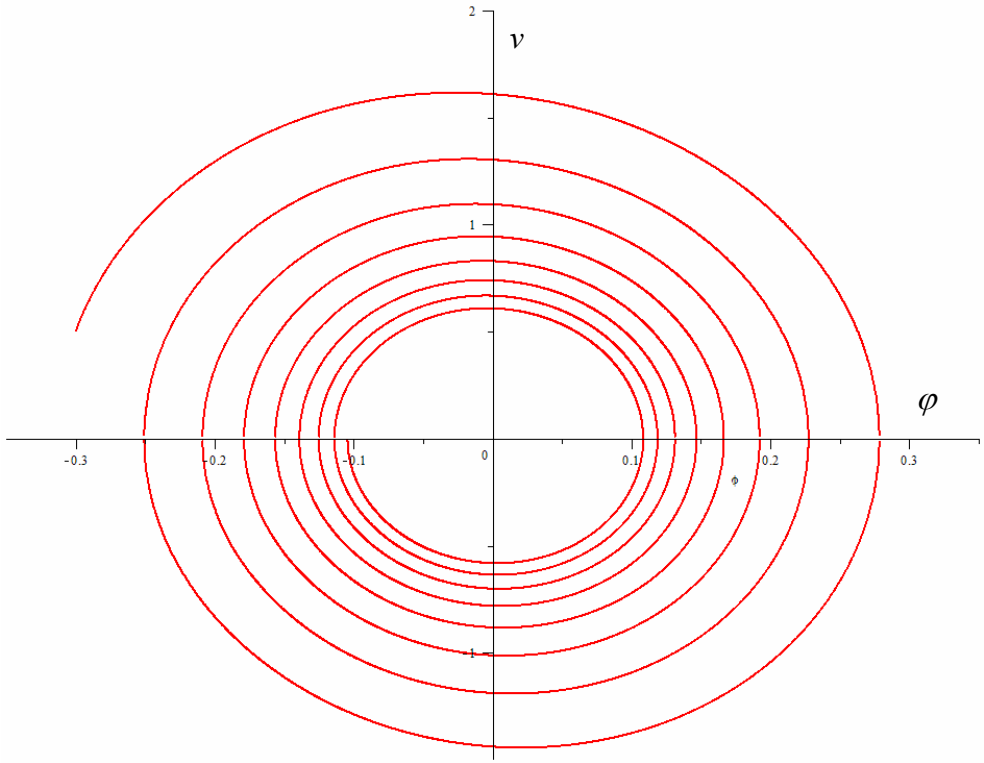
$v_0 = 0{,}5$ ms^{-1}

Pro prvních 8 kyvů jsou hodnoty φ_i, A_i, $i = 0,\ldots,15$ uvedeny v Tab. 1.

Tab. 1: Koeficienty A_i a mezní hodnoty intervalů φ_i.

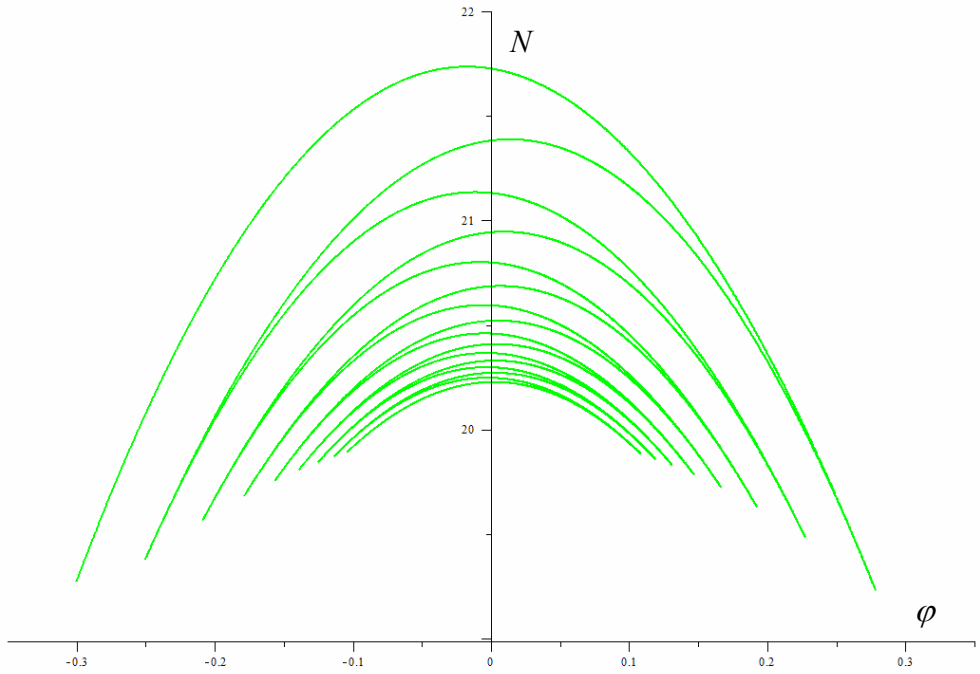
i	A_i [m^{2}s^{-2}]	φ_i [rad]
0	-41.52946098	-0.30000000
1	-42.04595650	+0.27861617
2	-42.42184257	-0.25053275
3	-42.70392016	+0.22761455
4	-42.92101156	-0.20855185
5	-43.09165786	+0.19244448
6	-43.22822729	-0.17865292
7	-43.33922766	+0.16671019
8	-43.43066741	-0.15626715
9	-43.50688790	+0.14705753
10	-43.57108921	-0.13887467
11	-43.62567248	+0.13155571
12	-43.67246753	-0.12497052
13	-43.71288886	+0.11901389
14	-43.74804375	-0.11359985
15	-43.77880908	+0.10865742

Na Obr. 4 je znázorněn graf funkce $v(\varphi)$. Ve shodě s pozorovanou realitou výchylka i rychlost klesá k nule.



Obr. 4: Graf funkce $v(\varphi)$.

Na Obr. 5 je znázorněn graf funkce $N(\varphi)$. Je zde vidět, že s postupným útlumem pohybu limituje zatížení vlákna ke statické hodnotě (kyvadla bez pohybu) $N = mg = 20{,}0\ \mathrm{N}$.



Obr. 5: Graf funkce $N(\varphi)$.

Kapitola II: Newtonův gravitační zákon

1. Teorie

Newtonův gravitační zákon je skvělou ilustrací toho, jak lze správnou interpretací dojít od experimentálního pozorování k teoretické podstatě věci.

Ačkoliv se traduje, že impulsem pro odvození gravitačního zákona byl pád jablka na Newtonovu hlavu, pravda je jiná. Sir Isac Newton totiž vyšel z pozorování Sluneční soustavy, která před ním provedl Johanes Kepler, a která formuloval do tří Keplerových zákonů:

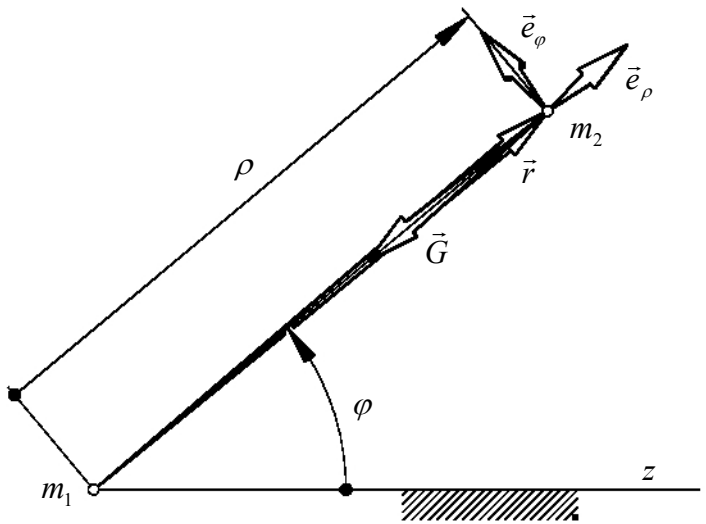
1. Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.
2. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos.

Není známo, jakým způsobem Newton postupoval, je však jisté, že jeho vztah pro přitažlivou sílu G mezi dvěma tělesy (spíše hmotnými body) s hmotnostmi m_1 a m_2

$$G = \kappa \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

kde κ je tzv. gravitační konstanta a d jejich okamžitá vzdálenost, Keplerovy zákony splňuje, jak hned uvidíme.

Použijeme polární souřadnicový systém, viz Obr. 1. Počátek umístíme do bodu s hmotností m_1 a polohu druhého bodu určíme jeho polohovým vektorem $\vec{r}$. Aby bylo možno pracovat se souřadnicemi ρ a φ souřadnicového systému, zavádíme dále nepohyblivou základní přímku



Obr. 1: Polární souřadnicový systém s vektory $\vec{G}$ a $\vec{r}$

z vedenou z bodu m_1. Vektorovou bázi tvoří jednotkové vektory $\vec{e}_\rho$ a $\vec{e}_\varphi$. Polohový vektor $\vec{r}$ je pak vyjádřen jako

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$$

a vektor přitažlivé síly bodu m_1 na bod m_2 jako

$$\vec{G} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\rho^2} \vec{e}_\rho .$$

Nyní použijeme pro hmotný bod m_2 *větu o změně momentu hybnosti*

$$\vec{b} = \vec{r} \times m_2 \vec{v}, \tag{1.1}$$

kde $\vec{v}$ je rychlost hmotného bodu m_2, v diferenciálním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} = \vec{r} \times \vec{G}. \tag{1.2}$$

Na pravé straně (1.2) je moment síly $\vec{G}$ vzhledem k bodu m_1. Protože oba vektory $\vec{r}$ a $\vec{G}$ jsou kolineární, je výsledkem vektorového násobení $\vec{0}$. To ale znamená, že vektor $\vec{b}$, derivovaný na levé straně (1.2), je konstantní. Tento vektor má v případě polárního souřadnicového systému nenulovou jen složku kolmou k polární rovině s velikostí

$$b = m_2 \rho v_\varphi , \tag{1.3}$$

přičemž v polárních souřadnicích platí

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} , \tag{1.4}$$

takže nakonec

$$b = m_2 \rho^2 \dot{\varphi} = m_2 C , \tag{1.5}$$

kde C je konstanta s hodnotou

$$C = \rho(0) v_\varphi(0), \tag{1.6}$$

a kde $\rho(0), v_\varphi(0)$ jsou počáteční hodnoty.

Rovnice (1.5) je diferenciální rovnice 1. řádu pro první ze dvou neznámých funkcí $\varphi(t), \rho(t)$. Druhou rovnici dostaneme například použitím *věty o změně hybnosti hmotného bodu* m_2 v diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned} &\vec{p} = m_2 \vec{v}, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2 \vec{v}) = \vec{G}, \\ &m_2 \vec{a} = \vec{G}, \\ &m_2 a_\rho \vec{e}_\rho = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\rho^2} \vec{e}_\rho , \\ &a_\rho = -\kappa \frac{m_1}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Kinematický vztah pro radiální složku a_ρ zrychlení je

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 ,$$

takže dosazením do (1.7) dostáváme 2. diferenciální rovnici

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 + \kappa \frac{m_1}{\rho^2} = 0 \tag{1.8}$$

do soustavy s (1.5). Vyjádříme-li nyní z (1.5)

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{\rho^2} \tag{1.9}$$

a dosadíme do (1.8), dostáváme

$$\ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3} + \kappa \frac{m_1}{\rho^2} = 0 , \tag{1.10}$$

což je jedna diferenciální rovnice 2. řádu pro jednu neznámou funkci $\rho(t)$.

Protože však máme dokázat platnost 1. Keplerova zákona, potřebujeme získat závislost $\rho(\varphi)$, která dá rovnici trajektorie hmotného bodu m_2 v polárních souřadnicích. Potřebujeme proto nahradit časovou souřadnici t souřadnicí φ. Řešení provedeme transformací diferenciální rovnice (1.10) k novým proměnným u a φ transformačním vztahem

$$\rho(t) = \frac{1}{u(\varphi)} . \tag{1.11}$$

Pak bude

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{-1}{u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{-1}{u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi}$$

a protože platí (1.9),

$$\dot{\rho} = \frac{-1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{C}{\rho^2} = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Analogicky pro druhou derivaci

$$\ddot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}\dot{\varphi} = -\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} = -C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}. \quad (1.12)$$

Nyní dosadíme (1.11) a (1.12) do (1.10)

$$-C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} - C^2u^3 + \kappa m_1 u^2 = 0,$$

což dává po krácení u^2 jednoduchou nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu pro $u(\varphi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\kappa m_1}{C^2}.$$

Jejím řešením je

$$u = \frac{1}{\rho} = B\cos(\varphi - \beta) + \frac{\kappa m_1}{C^2},$$

kde B a β jsou integrační konstanty. Pro ρ pak dostáváme

$$\rho = \frac{1}{\frac{\kappa m_1}{C^2} + B\cos(\varphi - \beta)} = \frac{\frac{C^2}{\kappa m_1}}{1 + B\frac{C^2}{\kappa m_1}\cos(\varphi - \beta)}. \quad (1.13)$$

Zavedeme-li nyní nové konstanty

$$p = \frac{C^2}{\kappa m_1}, \qquad (1.14)$$
$$\varepsilon = Bp,$$

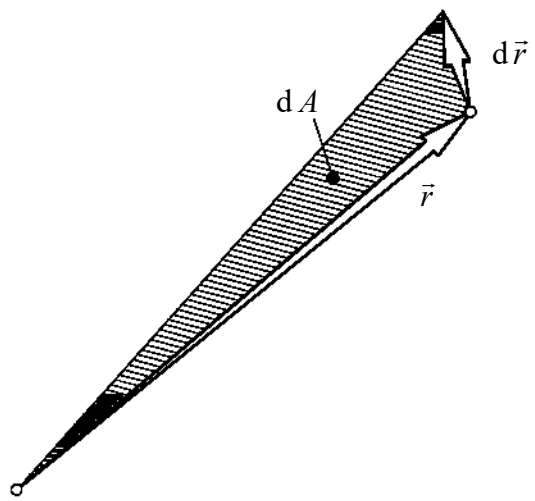
a novou proměnnou

$$\psi = \varphi - \beta,$$

můžeme trajektorii hmotného bodu m_2 zapsat jako

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\psi}. \quad (1.15)$$

To je obecně rovnice kuželosečky. Charakter kuželosečky určuje hodnota ε. Z Keplerových měření vyplývá, že pro (tehdy pozorovatelné) planety sluneční soustavy je $\varepsilon < 1$, což charakterizuje elipsy. Tím je potvrzen 1. Keplerův zákon.



Obr. 2: K výkladu plošné rychlosti

Nyní obrátíme pozornost ke 2. Keplerovu zákonu. Element $\mathrm{d}A$ plochy opsané průvodičem $\vec{r}$ za čas $\mathrm{d}t$ vidíme na Obr. 2. Budeme-li plochu opsanou průvodičem považovat za vektor $\vec{A}$ stojící kolmo k rovině trajektorie, můžeme - vzhledem k definici vektorového součinu - napsat

$$\mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{1.16}$$

Násobíme-li nyní (1.16) členem $m_2/\mathrm{d}t$ dostaneme

$$m_2 \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = m_2 \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m_2 \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{b}\,,$$

kde $\vec{b}$ je podle (1.1) vektor momentu hybnosti bodu m_2. Nyní přejdeme ke skalárnímu vyjádření a dosadíme z (1.3). Dostaneme

$$m_2 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}m_2 C\,, \tag{1.17}$$

takže plošná rychlost $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t$ je konstantní, ve shodě s 2. Keplerovým zákonem.

Zbývá dokázat 3. Keplerův zákon. V (1.17) krátíme m_2, separujeme proměnné a integrujeme v rozsahu jednoho oběhu v trvání T

$$\int_0^A \mathrm{d}A = \frac{1}{2}C\int_0^T \mathrm{d}t\,.$$

Do výsledku dosadíme za A plochu elipsy πab, za C z (1.14) a vypočteme

$$T^2 = \left(\frac{2\pi ab}{C}\right)^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{p\kappa m_1} = \frac{4\pi^2}{\kappa m_1}a^3\,, \tag{1.18}$$

když jsme použili geometrický vztah pro elipsu $b^2 = pa$. Aplikace (1.18) na dvě planety vede v poměru na výraz

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\,,$$

který potvrzuje 3. Keplerův zákon.

2. Příklad

Jako příklad budeme studovat tzv. kosmický prak, což je metoda k urychlení "cestování" mezi planetami, konkrétně mezi planetami našeho slunečního systému.

2.1. Volný let

Uvažujme nejprve kosmickou sondu o hmotnosti m, která má cestovat ze Země k Jupiteru. Oběžné dráhy planet jsou obecně elipsy, jejich (numerická) excentricita je však poměrně malá, takže je můžeme přibližně považovat za (soustředné) kružnice, v daném případě o poloměru R_Z pro Zemi a R_J pro Jupiter.

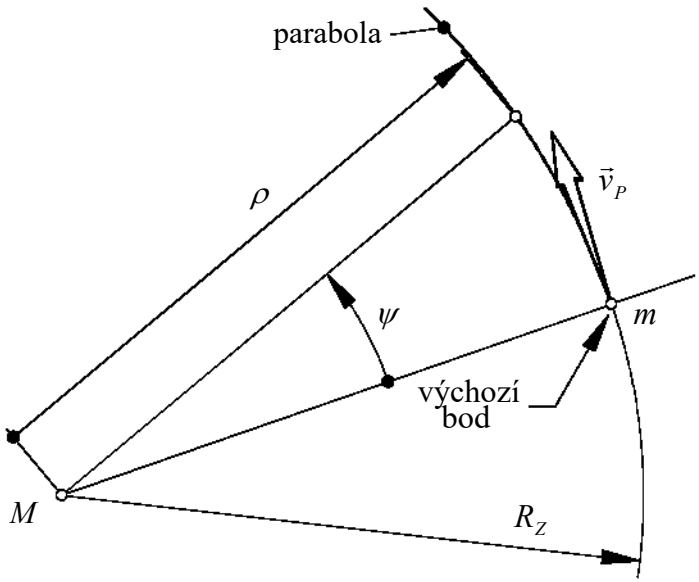
Dále předpokládejme, že ve výchozím bodě se sonda nachází na oběžné dráze Země v gravitačním poli (pouze) Slunce a má tzv. parabolickou rychlost v_P, což jest rychlost, se kterou objekt opustí (kruhovou) oběžnou dráhu po parabole, tedy po křivce, která má numerickou excentricitu $\varepsilon = 1$. Trajektorie sondy tak má podle (1.15) rovnici

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\psi}\,, \tag{2.1}$$

kde ψ je úhel měřený od vrcholu paraboly, viz Obr. 3. Podle (1.14) je parametr

$$p = \frac{C^2}{\kappa M}\,,$$

kde píšeme hmotnost Slunce M místo m_1 a kde podle (1.6) je konstanta



Obr. 3: Odlet z oběžné dráhy Země po parabole

$$C = \rho(0) v_\psi(0) = R_Z v_P . \tag{2.2}$$

Bez důkazu uveďme, že pro oběžnou dráhu Země je

$$v_P^2 = \frac{2\kappa M}{R_Z} , \tag{2.3}$$

takže po dosazení do (2.1) má trajektorie sondy rovnici

$$\rho = \frac{2R_Z}{1+\cos\psi} .$$

Pro rychlost na parabolické dráze platí pro radiální složku

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{2R_Z}{(1+\cos\psi)^2} \sin\psi\dot{\psi} ,$$

a pro složku transverzální

$$v_\psi = \rho\dot{\psi} = \frac{2R_Z}{1+\cos\psi}\dot{\psi} ,$$

přičemž podle (1.9) je

$$\dot{\psi} = \frac{C}{\rho^2} ,$$

takže

$$v_\rho = \frac{C}{2R_Z} \sin\psi , \tag{2.4}$$

$$v_\psi = \frac{C}{2R_Z}(1+\cos\psi),$$

a celková rychlost po úpravě

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\psi^2} = \frac{C}{R_Z}\sqrt{\frac{1+\cos\psi}{2}} .$$

Při přiblížení k Jupiteru je $\rho = R_J$, takže oblouk ψ_{ZJ} dráhy mezi Zemí a Jupiterem se vypočte z rovnice

$$R_J = \frac{2R_Z}{1+\cos\psi_{ZJ}}$$

s výsledkem

$$\psi_{ZJ} = \arccos\left(2\frac{R_Z}{R_J} - 1\right), \tag{2.5}$$

který nám umožní vypočítat dobu letu mezi Zemí a Jupiterem. Podle (1.9) je po dosazení za ρ a separaci proměnných

$$\int_0^{\psi_{ZJ}} \frac{\mathrm{d}\psi}{(1+\cos\psi)^2} = \frac{C}{4R_Z^2}\int_0^{T_{ZJ}} \mathrm{d}t,$$

kde T_{ZJ} je doba letu ze Země k Jupiteru. Integrál na levé straně je tabulkový, takže pro T_{ZJ} dostáváme

$$T_{ZJ} = \frac{R_Z^2}{C}\left(2\,\mathrm{tg}\frac{\psi_{ZJ}}{2} + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3\frac{\psi_{ZJ}}{2}\right). \tag{2.6}$$

Nyní je na místě uvést číselné hodnoty. Protože je

- poloměr oběžné dráhy Země $R_Z = 150.10^9\ \mathrm{m}$,
- gravitační konstanta $\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$,
- hmotnost Slunce $M = 1{,}989.10^{30}\ \mathrm{kg}$ a
- poloměr oběžné dráhy Jupitera $R_J = 778.10^9\ \mathrm{m}$,

je podle (2.3) parabolická rychlost $v_P = 4{,}21.10^4\ \mathrm{ms^{-1}}$, podle (2.2) konstanta $C = 6{,}31.10^{15}\ \mathrm{m^2s^{-1}}$, podle (2.5) $\psi_{ZJ} = 2{,}232\,\mathrm{rad}$ a nakonec podle (2.6)

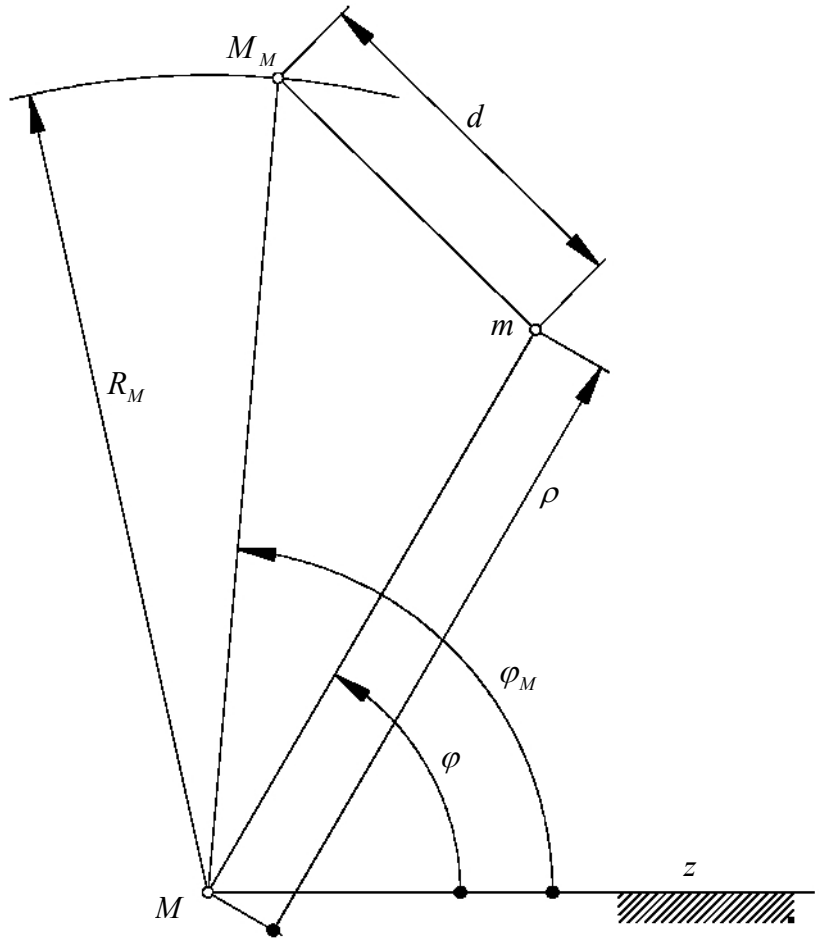
$$T_{ZJ} = 3{,}496.10^7\ \mathrm{s} = 404{,}6\,\mathrm{dní}.$$

2.2 Kosmický prak

V předchozím odstavci jsme předpokládali let sondy mezi Zemí a Jupiterem po dráze, na které není ovlivněna gravitací ostatních těles Sluneční soustavy.

Nyní budeme předpokládat, že startovní "okno" pro odlet z oběžné dráhy Země je voleno tak, aby sonda proletěla těsně okolo Marsu, jehož oběžná dráha leží mezi drahami Země a Jupiteru a jehož gravitační síla ovlivní dráhu sondy.

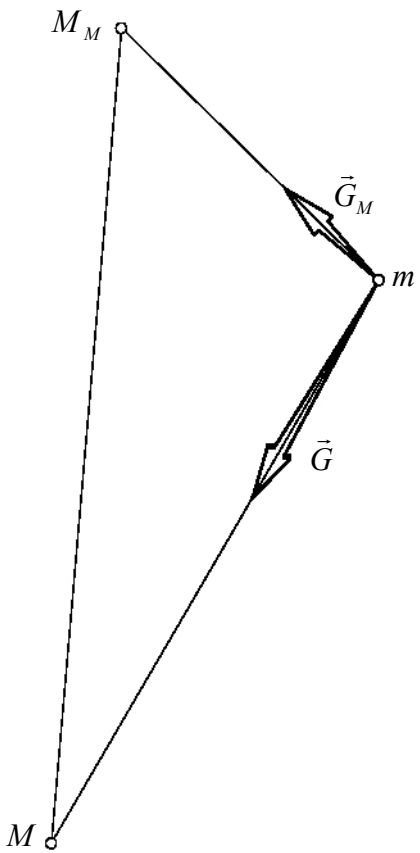
Takovou situaci znázorňuje Obr. 4. Budeme uvažovat tři tělesa (hmotné body): Slunce s hmotností M, sondu s hmotností m a Mars s hmotností M_M. Slunce opět leží v centru polárního souřadnicového



Obr. 4: Kinematika přiblížení k Marsu

systému, Mars obíhá po (přibližně) kruhové dráze o poloměru R_M s okamžitou úhlovou polohou φ_M a sonda se pohybuje v místě o souřadnicích ρ, φ. Okamžitou vzdálenost d mezi sondou a Marsem vypočteme z kosinové věty

$$d^2 = R_M^2 + \rho^2 - 2R_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi). \tag{2.7}$$



Obr. 5: Silové působení v blízkosti Marsu

Silové působení je vyznačeno v Obr. 5. Vektor přitažlivé síly Slunce můžeme zapsat jako

$$\vec{G} = -\kappa \frac{Mm}{\rho^3} \vec{r}$$

a vektor přitažlivé síly Marsu jako

$$\vec{G}_M = \kappa \frac{M_M m}{d^3} (\vec{r}_M - \vec{r}). \tag{2.8}$$

Věta (1.2) o změně momentu hybnosti hmotného bodu se nyní změní na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{b} = \vec{r} \times \left(\vec{G} + \vec{G}_M\right) = \vec{r} \times \vec{G}_M ,$$

protože nadále $\vec{r} \times \vec{G} = \vec{0}$. Dosazením z (2.8) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{b} = \kappa \frac{M_M m}{d^3} \vec{r} \times (\vec{r}_M - \vec{r}) = \kappa \frac{M_M m}{d^3} \vec{r} \times \vec{r}_M , \tag{2.9}$$

neboť $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$. Vektorový součin $\vec{r} \times \vec{r}_M$ má jenom jednu nenulovou složku, kolmou k polární rovině, s velikostí $\rho R_M \sin(\varphi_M - \varphi)$, podobně jako vektor $\vec{b}$ s velikostí podle (1.3) a (1.4) $m\rho v_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi}$. Bude tedy příslušná složka rovnice (2.9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m\rho^2 \dot{\varphi}\right) = \kappa \frac{M_M m \rho R_M \sin(\varphi_M - \varphi)}{d^3}$$

a po provedení derivace na levé straně, dosazení za d z (2.7) a úpravě

$$2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \kappa \frac{M_M R_M \sin(\varphi_M - \varphi)}{\left[R_M^2 + \rho^2 - 2R_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi)\right]^{\frac{3}{2}}} . \tag{2.10}$$

To je první z dvojice diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $\rho(t), \varphi(t)$. Druhou rovnici dostaneme např. z radiální složky věty o změně hybnosti.

$$ma_\rho = \left(\vec{G} + \vec{G}_M\right) \bullet \vec{e}_\rho ,$$

$$ma_\rho = -\kappa \frac{Mm}{\rho^3} \vec{r} \bullet \vec{e}_\rho + \kappa \frac{M_M m}{d^3} \left(\vec{r}_M - \vec{r}\right) \bullet \vec{e}_\rho ,$$

$$a_\rho = \kappa \left\{ -\frac{M}{\rho^2} + \frac{M_M}{d^3} \left[R_M \cos(\varphi_M - \varphi) - \rho \right] \right\},$$

takže nakonec po dosazení za d

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = \kappa \left\{ -\frac{M}{\rho^2} + \frac{M_M \left[R_M \cos(\varphi_M - \varphi) - \rho \right]}{\left[R_M^2 + \rho^2 - 2R_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi) \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \tag{2.11}$$

Hodnota φ_M ovšem není konstanta, protože Mars se pohybuje. Předpokládáme-li pohyb konstantní rychlostí v_M po kružnici s poloměrem R_M, máme k dispozici další diferenciální rovnici

$$\dot{\varphi}_M = \frac{v_M}{R_M} . \tag{2.12}$$

Soustava diferenciálních rovnic (2.10), (2.11) a (2.12) vyžaduje pět počátečních podmínek pro neznámé funkce $\rho(t), \varphi(t), \dot{\rho}(t), \dot{\varphi}(t), \varphi_M(t)$. Předpokládejme, že ovlivnění dráhy sondy Marsem se projeví až ve vzdálenosti (od Slunce) $0.8R_M$ a že modifikovaná dráha zde spojitě naváže na parabolu z odst. 2.1. Příslušný oblouk paraboly pak je analogicky ke (2.7)

$$\psi_{Z0.8M} = \arccos\left(2\frac{R_Z}{0.8R_M} - 1 \right)$$

a odpovídající čas letu od Země

$$T_{Z0.8M} = \frac{R_Z^2}{C} \left(2\,\mathrm{tg}\frac{\psi_{Z0.8M}}{2} + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 \frac{\psi_{Z0.8M}}{2} \right).$$

Počáteční podmínky budeme formulovat pro čas $T_{Z0.8M}$ takže první dvě počáteční podmínky jsou

$$\rho(T_{Z0.8M}) = 0.8R_M ,$$
$$\varphi(T_{Z0.8M}) = \psi_{Z0.8M} .$$

Počáteční podmínky pro derivace dostaneme z (2.4) a (1.9)

$$\dot{\rho}(T_{Z0.8M}) = \frac{C}{2R_Z} \sin \psi_{Z0.8M} ,$$

$$\dot{\varphi}(T_{Z0.8M}) = \frac{C}{(0.8R_M)^2} .$$

Nakonec zbývá určit $\varphi_M(\mathrm{T}_{Z0.8\mathrm{M}})$. Tuto hodnotu budeme při numerickém výpočtu volit zkusmo tak, aby sonda prolétla "za" Marsem a přitom minimální hodnota vzdálenosti d podle (2.7) byla jen o málo větší než poloměr r_M planety samotné.

Do numerického výpočtu vezmeme opět hodnoty z odst. 2.1 a doplníme

- poloměr oběžné dráhy Marsu $R_M = 228.10^9$ m,
- hmotnost Marsu $M_M = 6{,}42.10^{23}$ kg.

Pak vychází $\psi_{Z0.8\mathrm{M}} = 0{,}8701173589\,\mathrm{rad}$, $T_{Z0.8M} = 3{,}553078605.10^6$ s = $= 41{,}124$ dní a počáteční podmínky jsou

$$\rho(3{,}553078605.10^6) = 1{,}824.10^{11}\ \mathrm{m},$$
$$\varphi(3{,}553078605.10^6) = 0{,}8701173589\,\mathrm{rad},$$
$$\dot{\rho}(3{,}553078605.10^6) = 16077{,}97692\,\mathrm{ms}^{-1},$$
$$\dot{\varphi}(3{,}553078605.10^6) = 1{,}896617228.10^{-7}\ \mathrm{rads}^{-1} .$$

Soustava diferenciálních rovnic (2.10), (2.11) a (2.12) analytické řešení nemá. Je nutno provést řešení numerické. K tomu účelu byly rovnice řešeny v matematickém softwaru Maple numerickou metodou Runge-Kutta. Opakovaným výpočtem pak byla stanovena výchozí poloha Marsu

$$\varphi_M\left(3{,}553078605.10^6\right) = 0{,}98747898\,\text{rad}\,,$$

při které se dosáhne průletu sondy okolo Marsu v minimální vzdálenosti

$$d_{\min} = 8{,}932.10^9\ \text{m} \tag{2.13}$$

a dráha se zakřiví podle Obr. 6 (zelená křivka). Pro srovnání je zakreslena i parabolická dráha volného letu (červená křivka). Kružnice Z, M a J představují oběžné dráhy Země, Marsu a Jupiteru, bod na dráze Marsu je jeho poloha v okamžiku startu sondy z oběžné dráhy Země. Samotné zakřivení není ovšem cílem manévru, cílem je zvýšení rychlosti letu. Numerický výpočet dává zkrácený čas doletu na oběžnou dráhu Jupiteru

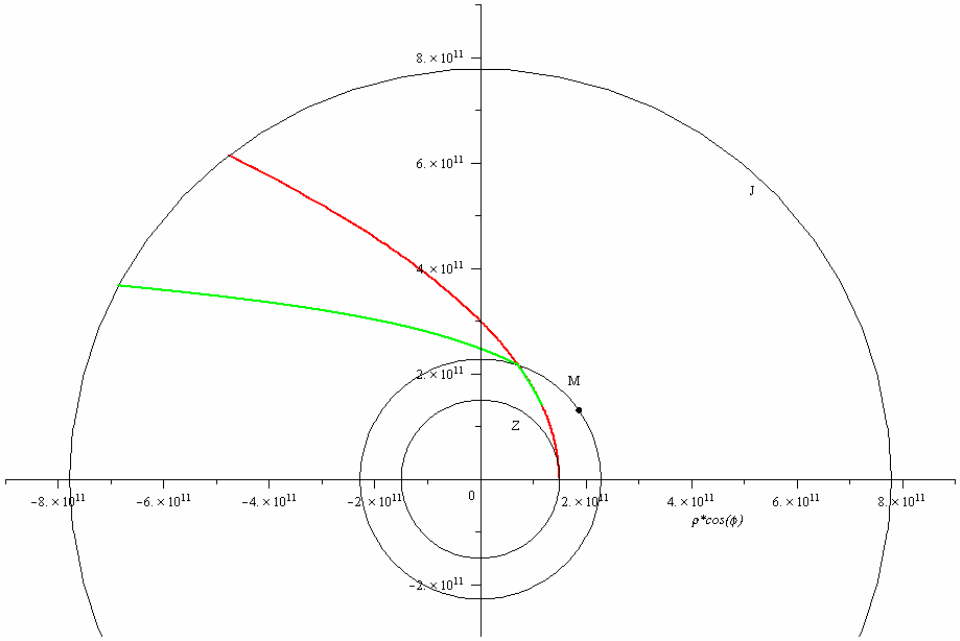
$$T^*_{ZJ} = 2{,}680.10^7\ \text{s} = 310{,}2\,\text{dní}\,,$$

což představuje zkrácení oproti volnému letu takřka o čtvrtinu.

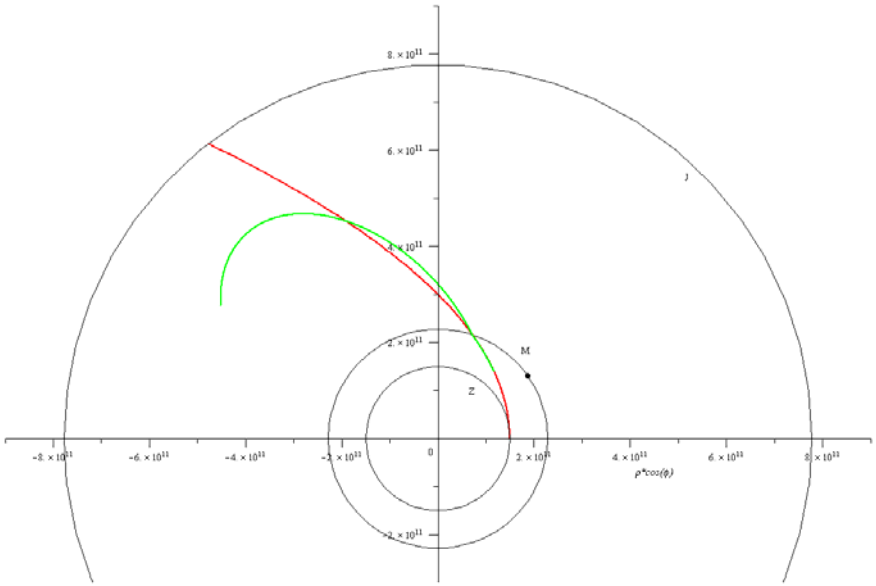
Metoda kosmického praku je ovšem velmi citlivá na správné načasování a provedení manévrů. Výpočty ukazují, že kdyby např. byla poloha Marsu v okamžiku startu sondy z oběžné dráhy Země jen 0,6" (0,6 úhlové vteřiny) zpět oproti vypočtené hodnotě, bude to mít fatální následky. Sonda se na úrovni oběžné dráhy Marsu dostane "před" planetu, trajektorie se zalomí na druhou stranu a současně dojde ke ztrátě rychlosti a sonda oběžné dráhy Jupiteru vůbec nedosáhne, jak ukazuje Obr. 7.

Nakonec dvě poznámky. Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že doletové časy zde uváděné jsou podstatně kratší než u reálných expedic. Důvod je ten, že sondy neodlétají z odběžné dráhy Země zde uvažovanou "parabolickou" rychlostí $v_P = 4{,}21.10^4\ \text{ms}^{-1}$. Na takovou rychlost je třeba sondu nejprve urychlit, což spotřebuje značné množství paliva. Palivo ovšem nese sonda na úkor užitečného zatížení. Takže je nutno vyhledat kompromis mezi hmotností užitečného zatížení a dobou letu. Další důvod je ten, že ne vždy jsou planety ve vhodné konfiguraci pro parabolický let. Pak je třeba volit pomalejší eliptické trajektorie a delší doletové časy.

Druhá poznámka se týká numerických výpočtů zde dokumentovaných. Vzdálenost $d_{\min}$ podle (2.13) se zdá být zbytečně velká; stačilo by třeba jen $3{,}6.10^6\ \text{m}$, což je průlet ve výšce zhruba 200 km nad povrchem Marsu. Takové hodnoty však nebylo možné dosáhnout, neboť integrační proces numerické metody Runge-Kutta se stával nestabilní. Řešením by možná bylo pracovat při numerickém výpočtu s větším počtem desetinných míst.



Obr. 6: Kosmický prak - průlet "za" Marsem



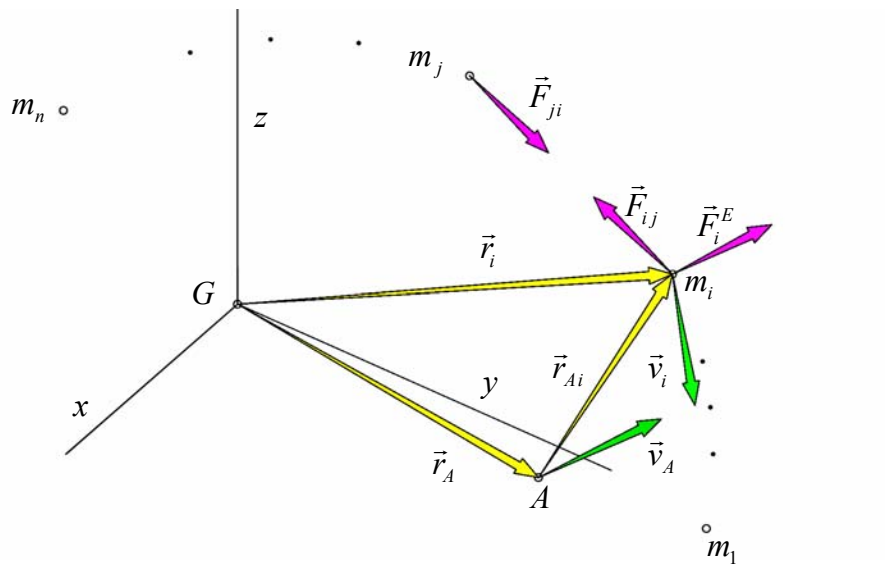
Obr. 7: Kosmický prak - průlet "před" Marsem

Kapitola III: Dynamika soustavy hmotných bodů pomocí dynamických vět

1. Teorie

Nejprve připomeňme základní **definice**, viz Obr. 1.

Soustava hmotných bodů je skupina hmotných bodů, mezi nimiž existují kinematické nebo silové vazby.



Obr. 1: Soustava hmotných bodů

Hybnost $i-$tého *hmotného bodu* je vektor $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$, kde m_i je hmotnost a $\vec{v}_i$ rychlost hmotného bodu.

Moment hybnosti $i-$tého *hmotného bodu vzhledem k bodu* A je vektor

$$\vec{b}_{Ai} = (\vec{r}_i - \vec{r}_A)\times m_i\vec{v}_i = \vec{r}_{Ai}\times m_i\vec{v}_i,$$

kde $\vec{r}_i$ resp. $\vec{r}_A$ resp. $\vec{r}_{Ai}$ je polohový vektor $i-$tého hmotného bodu resp. bodu A resp. $i-$tého hmotného bodu vzhledem k bodu A.

Kinetická energie $i-$tého *hmotného bodu* je skalární veličina $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i$.

Hybnost soustavy hmotných bodů je pak $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$, kde n je počet hmotných bodů v soustavě. Podobně *moment hybnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k bodu* A je $\vec{b}_A = \sum_{i=1}^{n}\vec{b}_{Ai}$ a *kinetická energie soustavy hmotných bodů je* $K = \sum_{i=1}^{n}K_i$.

Významné jsou rovněž hmotové vlastnosti soustavy hmotných bodů. Jedná se o *celkovou hmotnost soustavy* $m = \sum_{i=1}^{n}m_i$ a *statický moment soustavy vzhledem k bodu* A $\vec{S}_A = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i - \vec{r}_A)m_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Ai}m_i$.

Dále uveďme zmíněné **dynamické věty** v diferenciálním tvaru.

Věta o změně hybnosti soustavy hmotných bodů říká, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^E, \tag{1.1}$$

kde $\vec{F}_i^E$ je výslednice externích sil, působících na $i-$tý hmotný bod.

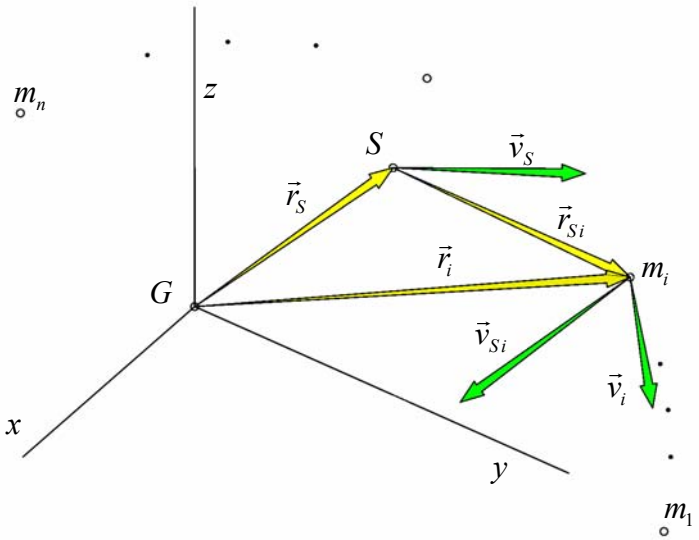
Věta o změně momentu hybnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k bodu A říká, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}_A =$$

$$= -\vec{v}_A \times m\vec{v}_S + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_A\right)\times \vec{F}_i^E = -\vec{v}_A \times m\vec{v}_S + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Ai}\times \vec{F}_i^E = \qquad (1.2)$$

$$= -\vec{v}_A \times m\vec{v}_S + \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{Ai}^E = -\vec{v}_A \times m\vec{v}_S + \vec{M}_A^E,$$

kde $\vec{v}_A$ je rychlost bodu A, $\vec{v}_S$ je rychlost těžiště S soustavy, $\vec{M}_{Ai}^E$ je moment výslednice externích sil $\vec{F}_i^E$ působící na $i-$tý hmotný bod vzhledem k bodu A a $\vec{M}_A^E$ je celkový moment externích sil vzhledem k bodu A.



Obr. 2: Těžiště soustavy, absolutní a relativní veličiny

Speciální pozornost je třeba věnovat případu, kdy vztažný bod A je těžištěm S soustavy hmotných bodů, $A \equiv S$, viz Obr. 2. V souladu s definicí těžiště je statický moment k těžišti roven nule, neboli

$$\vec{S}_S = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_S\right)m_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Si}m_i = \vec{0}, \qquad (1.3)$$

přičemž analogický vztah platí i pro relativní rychlosti

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{v}_i - \vec{v}_S\right)m_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{v}_{Si}m_i = \vec{0}. \qquad (1.4)$$

Zavedeme-li relativní rychlost $\vec{v}_{Si}$ $i-$tého hmotného bodu vzhledem k těžišti, dostaneme pro moment hybnosti $i-$tého hmotného bodu vzhledem k těžišti

$$\vec{b}_{Si} = \vec{r}_{Si}\times\left(m_i\vec{v}_{Si} + m_i\vec{v}_S\right) = \vec{r}_{Si}\times m_i\vec{v}_{Si} + \left(\vec{r}_{Si}m_i\right)\times\vec{v}_S$$

a pro celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k těžišti s přihlédnutím k (1.3)

$$\vec{b}_S = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Si}\times\left(m_i\vec{v}_{Si} + m_i\vec{v}_S\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Si}\times m_i\vec{v}_{Si} + \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Si}m_i\right)\times\vec{v}_S =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Si}\times m_i\vec{v}_{Si}. \qquad (1.5)$$

Jinými slovy, pro výpočet momentu hybnosti tělesa vzhledem k těžišti postačí pracovat s relativními veličinami jak pro polohy tak pro rychlosti jednotlivých hmotných bodů. Přitom věta (1.2) dává pro případ $A \equiv S$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}_S = -\vec{v}_S \times m\vec{v}_S + \vec{M}_S^E = \vec{M}_S^E, \qquad (1.6)$$

protože pro kolineární vektory $\vec{v}_S$ a $m\vec{v}_S$ je vektorový součin roven nule.

Věta o změně kinetické energie soustavy hmotných bodů říká, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}P_i = P, \qquad (1.7)$$

kde P_i. je výkon výslednice sil působících na $i-$tý hmotný bod a P je celkový výkon sil působících v soustavě. Výslovně upozorněme na to, že v tomto případě se množina působících sil neomezuje na síly externí, tedy že

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}\,,\; i = 1 \ldots n\,,$$

kde $\vec{F}_{ij}$ je síla, kterou $j-$tý hmotný bod působí na $i-$tý hmotný bod.

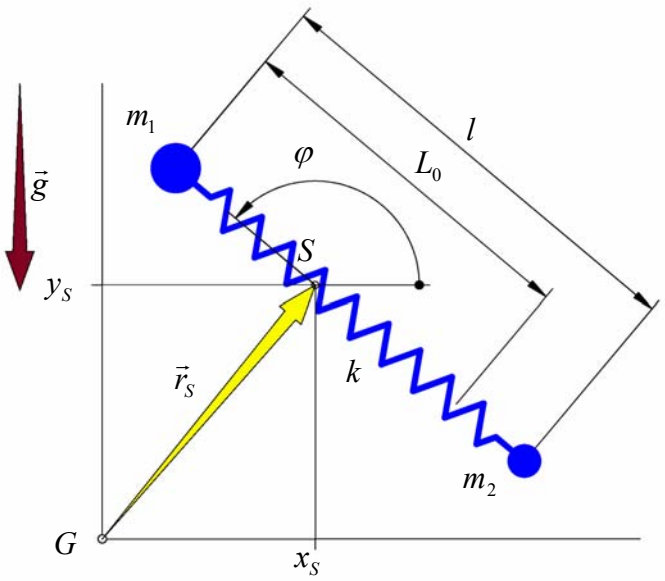
Speciální případ nastává, jsou-li působící síly potenciální. Pak je možno aplikovat *Zákon zachování mechanické energie* ve tvaru

$$K + V = \text{konst.}\,, \tag{1.8}$$

kde V je celková potenciální energie sil působících v soustavě.

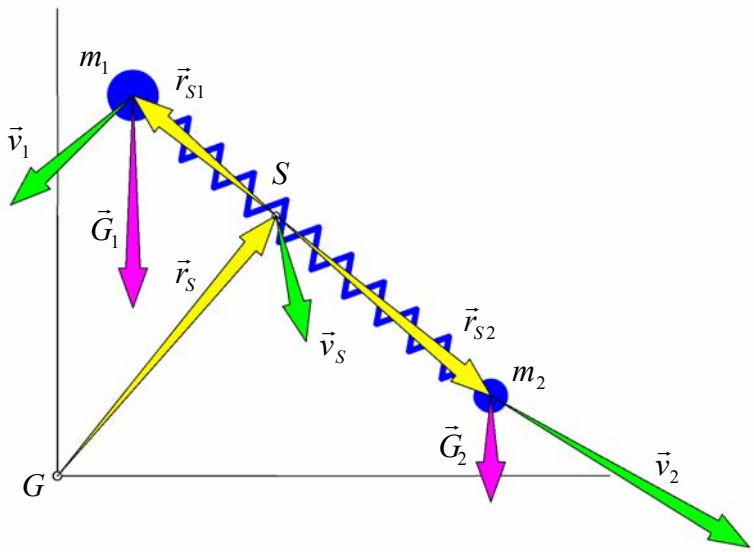
2. Příklad

Ve vertikální rovině budeme sledovat pohyb dvojice hmotných bodů spojených pružinou při vnějším zatížení tíhovou sílou, viz Obr. 3.



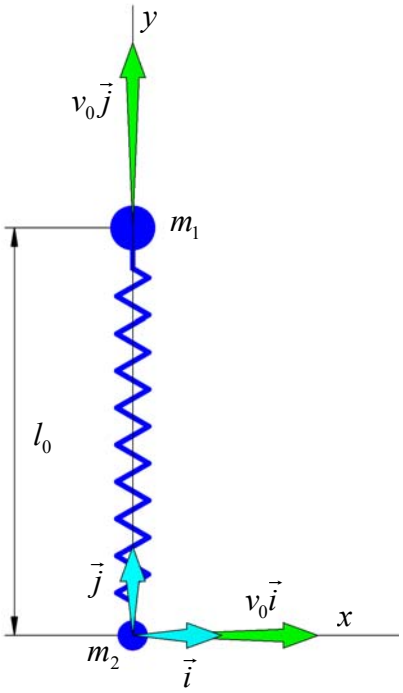
Obr. 3: K zadání příkladu

Hmotnosti m_1 a m_2 jednotlivých bodů a volná délka L_0 a konstanta tuhosti k pružiny jsou dané veličiny. Okamžitá poloha těžiště S soustavy daná polohovým vektorem $\vec{r}_S$ měřeným z počátku G globálního souřadnicového systému, okamžitý úhel φ spojnice obou bodů a okamžitá vzájemná vzdálenost l obou bodů jsou veličiny určované.



Obr. 4: Běžný stav soustavy

Běžný stav soustavy ukazuje Obr. 4. Znázorněny jsou absolutní poloha $\vec{r}_S$ a rychlost $\vec{v}_S$ těžiště S, relativní polohové vektory $\vec{r}_{S1}$ a $\vec{r}_{S2}$ jednotlivých hmotných bodů, jejich absolutní rychlosti $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ a vnější zatěžující tíhové síly $\vec{G}_1 = -m_1 g\,\vec{j}$ a $\vec{G}_2 = -m_2 g\,\vec{j}$.



Obr. 5: Počáteční stav.

Počáteční stav soustavy znázorňuje Obr. 5. Počáteční polohy obou bodů jsou $\vec{r}_1(0) = l_0\,\vec{j}$ a $\vec{r}_2(0) = \vec{0}$ a rychlosti $\vec{v}_1(0) = v_0\,\vec{j}$ a $\vec{v}_2(0) = v_0\,\vec{i}$, kde $l_0 \neq L_0$ a v_0 jsou dané konstanty.

Řešení:

Podle Obr. 3 s přihlédnutím k (1.3) a (1.4) dostaneme pro soustavu dvou hmotných bodů

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_S + \vec{r}_{S1}\,, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_S + \vec{r}_{S2}\,, \qquad m_1\vec{r}_{S1} + m_2\vec{r}_{S2} = 0 \tag{2.1}$$

a

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_S + \vec{v}_{S1}\,, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_S + \vec{v}_{S2}\,, \qquad m_1\vec{v}_{S1} + m_2\vec{v}_{S2} = 0. \tag{2.2}$$

Hybnost soustavy

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

je pak

$$\vec{p} = m_1(\vec{v}_S + \vec{v}_{S1}) + m_2(\vec{v}_S + \vec{v}_{S2}) = (m_1 + m_2)\vec{v}_S\,. \tag{2.3}$$

Dosazením do (1.1) dostáváme tak první vektorovou rovnici pro řešení daného problému

$$(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_S = \vec{G}_1 + \vec{G}_2\,, \tag{2.4}$$

neboť externími silami jsou v daném případě právě jen obě síly tíhové. Protože $\vec{v}_S = v_{Sx}\vec{i} + v_{Sy}\vec{j}$, představuje (2.4) dvě skalární rovnice

$$(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}v_{Sx}}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

$$(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}v_{Sy}}{\mathrm{d}t} = -(m_1 + m_2)g\,,$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}v_{Sx}}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v_{Sy}}{\mathrm{d}t} = -g\,. \tag{2.5}$$

První z rovnic (2.5) říká, že v_{Sx} nezávisí na čase, je tedy konstantní a je stejná jako na počátku, tedy

$$v_{Sx} = v_{Sx}(0)\,.$$

Řešení druhé z rovnic (2.5) separací proměnných dává

$$\int_{v_{Sy}(0)}^{v_{Sy}} \mathrm{d}v_{Sy} = -g\int_0^t \mathrm{d}t\,,$$

$$v_{Sy} = v_{Sy}(0) - gt.$$

Počáteční hodnoty $v_{Sx}(0), v_{Sy}(0)$ dostaneme z (2.2) v čase $t = 0$ s přihlédnutím k daným počátečním hodnotám pro $\vec{v}_1(0), \vec{v}_2(0)$

$$m_1[\vec{v}_1(0) - \vec{v}_S(0)] + m_2[\vec{v}_2(0) - \vec{v}_S(0)] = \vec{0}\,,$$

$$\vec{v}_S(0) = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}\vec{i} + \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\vec{j}\,,$$

takže

$$v_{Sx} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}\,,$$
$$v_{Sy} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} - gt. \tag{2.6}$$

Integrací složek rychlosti dostaneme složky polohového vektoru těžiště

$$\int_{x_S(0)}^{x_S} \mathrm{d}\,x_S = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \int_0^t \mathrm{d}\,t,$$
$$x_S = x_S(0) + \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} t$$

a

$$\int_{y_S(0)}^{y_S} \mathrm{d}\,y_S = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \int_0^t \mathrm{d}\,t - g \int_0^t t\,\mathrm{d}\,t,$$
$$y_S = y_S(0) + \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t - \frac{1}{2} g\,t^2.$$

Počáteční poloha těžiště $x_S(0), y_S(0)$ vychází z (2.1) a daných počátečních hodnot pro $\vec{r}_1(0), \vec{r}_2(0)$

$$m_1\left[\vec{r}_1(0) - \vec{r}_S(0)\right] + m_2\left[\vec{r}_2(0) - \vec{r}_S(0)\right] = \vec{0}\,,$$
$$\vec{r}_S(0) = \frac{m_1 l_0}{m_1 + m_2}\vec{j}\,, \tag{2.7}$$

takže trajektorie těžiště je nakonec

$$\vec{r}_S = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} t\,\vec{i} + \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(l_0 + v_0 t\right) - \frac{1}{2} g\,t^2\right]\vec{j}\,. \tag{2.8}$$

Evidentně se jedná o rovnici šikmého vrhu pro těžiště, které se zjevně pohybuje nezávisle na relativních pohybech jednotlivých hmotných bodů vzhledem k tomuto těžišti.

Dále je třeba určit právě tyto relativní pohyby jednotlivých hmotných bodů vzhledem k těžišti. K dispozici máme věty (1.2) a (1.7) resp. (1.6) a (1.8). První z nich má pro dva hmotné body zatížené vlastními tíhami tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{b}_S = \vec{r}_{S1} \times \vec{G}_1 + \vec{r}_{S2} \times \vec{G}_2\,. \tag{2.9}$$

přičemž ze (2.1) vyplývá, že

$$\vec{r}_{S2} = -\vec{r}_{S1}\frac{m_1}{m_2}\,.$$

Dosazením do (2.9) tak dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{b}_S = \vec{r}_{S1} \times \left(-m_1 g\,\vec{j}\right) - \frac{m_1}{m_2}\vec{r}_{S1} \times \left(-m_2 g\,\vec{j}\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{b}_S = \vec{0}.$$

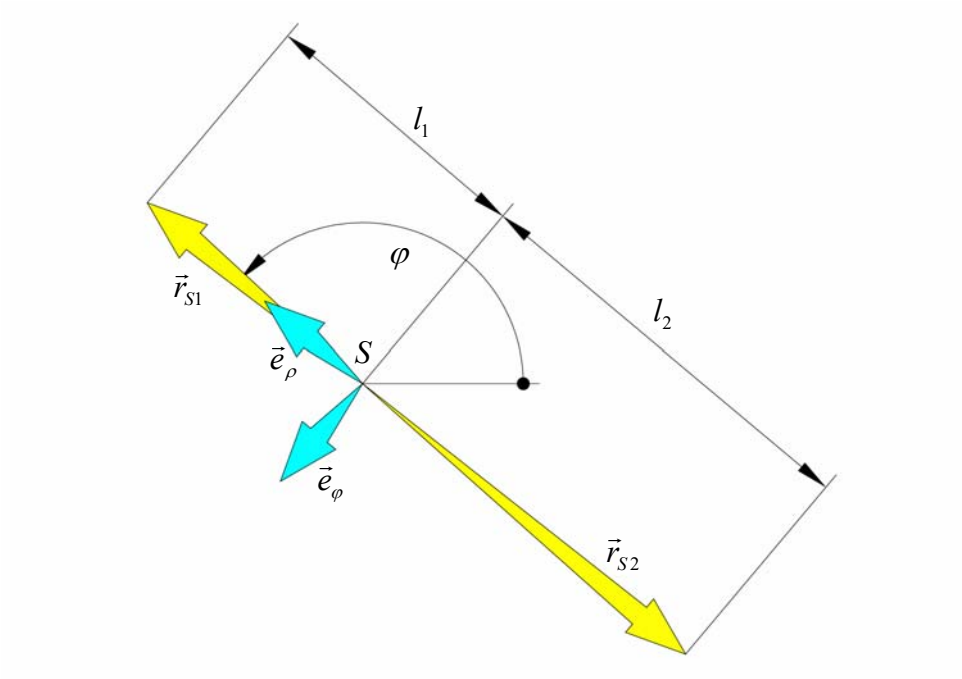
To ale znamená, že pro daný případ je moment hybnosti k těžišti konstantní, stejný jako na počátku, tedy

$$\vec{b}_S = \vec{b}_S(0). \tag{2.10}$$

Dále budeme pracovat s pomocí polárního souřadnicového systému s počátkem v těžišti S, s bázovými jednotkovými vektory $\vec{e}_\rho$ ve směru radiálním a $\vec{e}_\varphi$ ve směru transverzálním podle Obr. 6. Relativní polohové vektory pak budou

$$\vec{r}_{S1} = l_1\,\vec{e}_\rho,$$
$$\vec{r}_{S2} = -l_2\,\vec{e}_\rho \tag{2.11}$$

a relativní rychlosti



Obr. 6: K rovnicím (2.11).

$$\vec{v}_{S1} = \dot{l}_1 \vec{e}_\rho + l_1 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi ,$$

$$\vec{v}_{S2} = -\dot{l}_2 \vec{e}_\rho - l_2 \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi .$$

Dosazením (2.11) do (2.1) dostaneme

$$m_1 l_1 \vec{e}_\rho - m_2 l_2 \vec{e}_\rho = \vec{0},$$

$$m_1 l_1 - m_2 l_2 = 0.$$

Nyní zavedeme pro vzdálenost obou bodů novou souřadnici

$$l = l_1 + l_2 ,$$

která nám dovolí vyjádřit

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l , \quad \dot{l}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{l} ,$$

$$l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l , \quad \dot{l}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{l} ,$$

takže relativní polohové vektory jsou

$$\vec{r}_{S1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \vec{e}_\rho , \qquad \vec{r}_{S2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} l \vec{e}_\rho \tag{2.12}$$

a relativní rychlosti

$$\vec{v}_{S1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\dot{l} \vec{e}_\rho + l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \right), \qquad \vec{v}_{S2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\dot{l} \vec{e}_\rho + l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \right). \tag{2.13}$$

Podle (1.5) je pak moment hybnosti soustavy dvou hmotných bodů po úpravě

$$\vec{b}_S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \dot{\varphi} \left(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi \right), \tag{2.14}$$

takže vektorová rovnice (2.10) má jedinou nenulovou složku (ve směru kolmém k rovině pohybu)

$$l^2 \dot{\varphi} = l(0)^2 \dot{\varphi}(0). \tag{2.15}$$

Počáteční hodnoty na pravé straně vyjádříme pomocí daných počátečních podmínek. Nejprve v kartézských souřadnicích

$$\vec{v}_{S1}(0) - \vec{v}_{S2}(0) = \vec{v}_1(0) - \vec{v}_2(0) = v_0 \vec{j} - v_0 \vec{i} \tag{2.16}$$

a následně v polárních souřadnicích podle (2.13) a pro čas $t = 0$

$$\vec{v}_{S1}(0)-\vec{v}_{S2}(0)=$$
$$=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left[\dot{l}(0)\vec{e}_\rho(0)+l(0)\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi(0)\right]+$$
$$+\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[\dot{l}(0)\vec{e}_\rho(0)+l(0)\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi(0)\right]= \tag{2.17}$$
$$=\dot{l}(0)\vec{e}_\rho(0)+l(0)\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi(0).$$

Podle Obr. 5 je ale $\vec{e}_\rho(0)=\vec{j}$, $\vec{e}_\varphi(0)=-\vec{i}$, takže srovnáním (2.16) a (2.17) dostaneme

$$\dot{l}(0)=v_0 \tag{2.18}$$

a

$$l(0)\dot{\varphi}(0)=v_0,$$

neboli

$$\dot{\varphi}(0)=\frac{v_0}{l(0)}, \tag{2.19}$$

přičemž podle zadání $l(0)=l_0$. Nakonec dosazením do (2.15) dostáváme

$$l^2\dot{\varphi}=l_0v_0. \tag{2.20}$$

Rovnice (2.20) je diferenciální rovnice 1. řádu pro dvě neznámé funkce $l(t), \varphi(t)$. Potřebujeme tedy ještě druhou rovnici. Tu dodá buď věta o změně kinetické energie (1.7) nebo zákon zachování mechanické energie (1.8). Rozhodneme podle charakteru působících sil. Vnější síly $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ jsou tíhové, tudíž potenciální s potenciálními energiemi

$$V_1=m_1 g\, y_1,$$
$$V_2=m_2 g\, y_2.$$

Vnitřní síly $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ jsou realizovány pružinou, která generuje potenciální energii

$$V_p=\frac{1}{2}k(l-L_0)^2,$$

kde k je konstanta tuhosti a L_0 volná délka pružiny. Zákon zachování mechanické energie tedy použít lze, s celkovou potenciální energií

$$V=m_1 g\, y_1+m_2 g\, y_2+\frac{1}{2}k(l-L_0)^2$$

resp.

$$V=(m_1+m_2)g\, y_S+\frac{1}{2}k(l-L_0)^2. \tag{2.21}$$

Kinetická energie soustavy dvou hmotných bodů je

$$K=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=$$
$$=\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_S+\vec{v}_{S1})\cdot(\vec{v}_S+\vec{v}_{S1})+\frac{1}{2}m_2(\vec{v}_S+\vec{v}_{S2})\cdot(\vec{v}_S+\vec{v}_{S2})= \tag{2.22}$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_S^2+\vec{v}_S\cdot(m_1\vec{v}_{S1}+m_2\vec{v}_{S2})+\frac{1}{2}m_1v_{S1}^2+\frac{1}{2}m_2v_{S2}^2.$$

Druhá mocnina v_S^2 vektoru $\vec{v}_S$ je invariantní vzhledem k souřadnicovému systému, ve kterém je vyjádřen; můžeme proto použít kartézské složky podle (2.6)

$$v_S^2=v_{Sx}^2+v_{Sy}^2=\left(\frac{m_2v_0}{m_1+m_2}\right)^2+\left(\frac{m_1v_0}{m_1+m_2}-gt\right)^2. \tag{2.23}$$

Prostřední člen ve (2.22) je vzhledem ke (2.2) nulový a třetí se čtvrtým členem dávají s přihlédnutím ke (2.13)

$$\frac{1}{2}m_1 v_{S1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{S2}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 \right] \left(\dot{l}\,\vec{e}_\rho + l\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \right),$$

takže nakonec

$$K + V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_S^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \right) + \\ + (m_1+m_2) g\, y_S + \frac{1}{2}k(l-L_0)^2. \tag{2.24}$$

Pro výpočet $K(0)+V(0)$ dosadíme do (2.24) podle (2.23), (2.18), (2.19) a (2.7)

$$v_S^2(0) = \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1+m_2)^2} v_0^2,$$

$$\dot{l}(0) = v_0,$$

$$l(0) = l_0,$$

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{l_0},$$

$$y_S(0) = \frac{m_1}{m_1+m_2} l_0,$$

takže po úpravě

$$K(0)+V(0) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2 + m_1 g\, l_0 + \frac{1}{2}k(l_0-L_0)^2. \tag{2.25}$$

Zákon zachování mechanické energie (1.8) můžeme nyní napsat jako

$$K + V = K(0) + V(0),$$

neboli

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_S^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \right) + (m_1+m_2) g\, y_S + \\ + \frac{1}{2}k(l-L_0)^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2 + m_1 g\, l_0 + \frac{1}{2}k(l_0-L_0)^2. \tag{2.26}$$

Z toho nakonec

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \right) = \\ = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(v_0^2 - v_S^2\right) + m_1 g\, l_0 - (m_1+m_2) g\, y_S + \\ + \frac{1}{2}k(l_0-L_0)^2 - \frac{1}{2}k(l-L_0)^2 \tag{2.27}$$

je druhá diferenciální rovnice pro dvě neznámé funkce $l(t), \varphi(t)$, která platí společně s (2.20). Dosadíme-li za $\dot{\varphi}$ právě z (2.20), dostaneme po úpravě

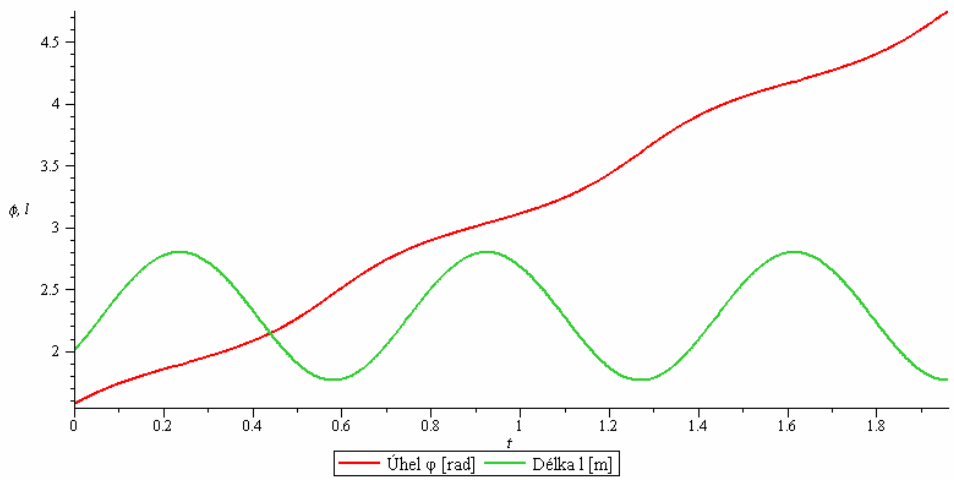
$$\dot{l}^2 = \frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2}\left(v_0^2 - v_S^2 - 2 g\, y_S \right) + 2\frac{m_1+m_2}{m_1} g\, l_0 + \\ + k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left[(l_0-L_0)^2 - (l-L_0)^2 \right] - \left(\frac{l_0}{l} \right)^2 v_0^2, \tag{2.28}$$

přičemž v_S^2 a y_S jsou v tuto chvíli podle (2.23) a (2.8) již známé funkce času.

Podle tvaru rovnice (2.28) by se mohlo zdát, že okamžitá délka l pružiny závisí prostřednictvím hodnot v_S^2 a y_S na pohybu těžiště, ačkoliv naopak tomu tak není - viz výše. Když ale do (2.28) dosadíme z (2.23) a (2.8), dostaneme po úpravě

$$\dot{l}^2 = 2v_0^2 + k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left[(l_0 - L_0)^2 - (l - L_0)^2\right] - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2 v_0^2, \qquad (2.29)$$

kde již závislost na pohybu těžiště nepozorujeme. Dá se tedy závěrem konstatovat, že tak jak pohyb těžiště nezávisí na relativním pohybu jednotlivých hmotných bodů, tak také relativní pohyb jednotlivých hmotných bodů nezávisí na pohybu těžiště.



Obr. 6: Řešení pro $l(t), \varphi(t)$

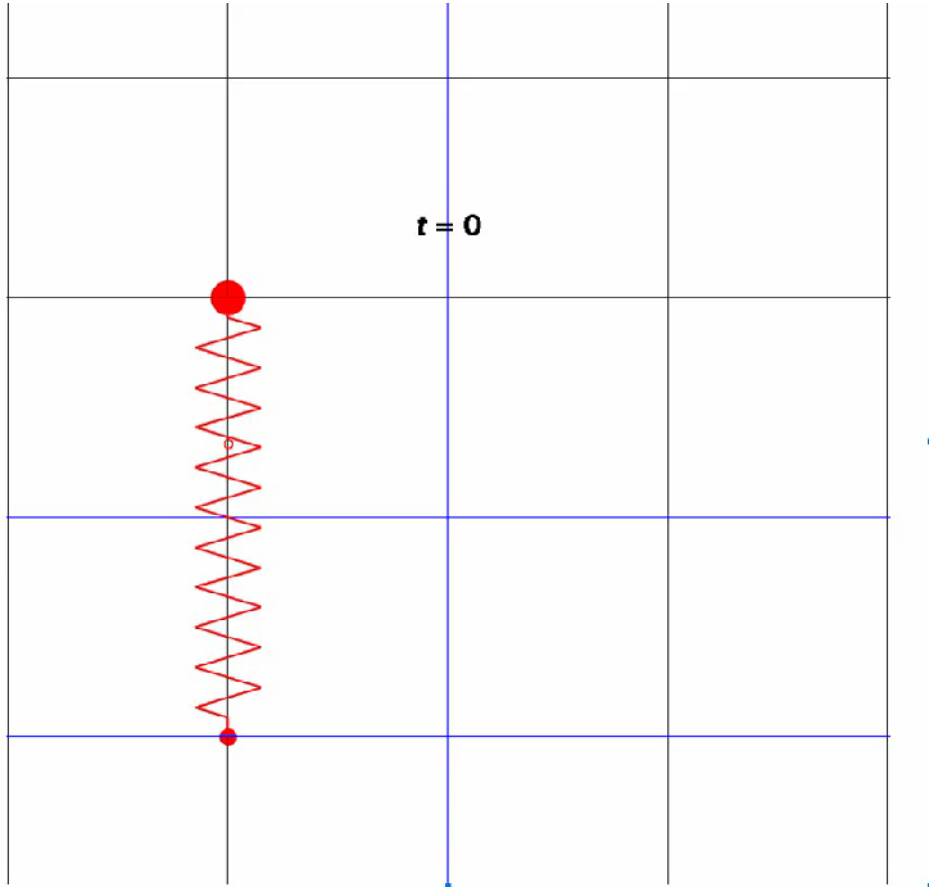
Soustava rovnic (2.20) a (2.29) s počátečními podmínkami podle (2.18) a (2.19) analytické řešení nemá. Vždy je ale možno nalézt numerické řešení. Pro daný problém bylo k numerickému řešení použito matematického software Maple s danými hodnotami pro

$$m_1 = 2\ \text{kg}, \quad L_0 = 2{,}2\ \text{m}, \quad g = 9{,}81\ \text{ms}^{-2}, \quad v_0 = 4\ \text{ms}^{-1}.$$

$$m_2 = 1\ \text{kg}, \quad k = 50\ \text{Nm}^{-1}, l_0 = 2\ \text{m}.$$

Výsledek řešení soustavy rovnic (2.20) a (2.29) v intervalu časů $t \in \langle 0, 2 \rangle$ s ukazuje Obr. 6. Vidíme, že v tomto intervalu se úhel φ změní přibližně o π a délka l osciluje s konstantní periodou 0,69 s a amplitudou 0,51 m mezi hodnotami 1,77 m a 2,79 m.

Poklepáním na obrázek Animace se spustí animace výsledného děje. Volný pád těžiště je odfiltrován tak, jakoby pozorovatel "padal" spolu s těžištěm. Pohyb těžiště je znázorněn jednak pohyblivým pozadím, jednak vyznačením jeho trajektorie na pozadí (zelená křivka).



Animace

Kapitola IV: Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro mechanický systém bez kinematických vazeb.

1. Teorie

Mějme soustavu fyzikálních objektů s n stupni volnosti, která je co do tvaru jednoznačně popsána n *zobecněnými souřadnicemi* $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Kinetickou energii K takové soustavy vypočteme z hmotových charakteristik jednotlivých objektů a z jejich rychlostí. Soustavu N sil $\boldsymbol{F}_i, i = 1, 2, \ldots, N$ působících v soustavě a na soustavu přepočteme na tzv. *zobecněné síly*

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}, \; j = 1, 2, \cdots, n,$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ jsou polohové vektory působišť jednotlivých sil. *Lagrangeovy rovnice 2. druhu* pak mají tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ve speciálním případě, kde všechny síly v soustavě jsou potenciální s celkovou potenciální energií V, přecházejí rovnice na tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

A protože potenciální energie není funkcí *zobecněných rychlostí* $\dot{q}_j$, lze zavedením nové funkce, tzv. kinetického potenciálu

$$L = K - V,$$

přejít k Lagrangeovým rovnicím ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

2. Příklad

Pro ilustraci použití Lagrangeových rovnic 2. druhu použijeme opět problém řešený v kapitole Dynamika soustavy hmotných bodů pomocí vět.

Uvažujeme proto opět ve vertikální rovině volný - tj. bez kinematických vazeb - pohyb dvou hmotných bodů zatížených jejich tíhou a spojených pružinou podle Obr. 3 výše zmíněné kapitoly. Kinetickou energii máme tedy již vypočtenou jako

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_S^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2\right),$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti obou hmotných bodů, v_S je rychlost těžiště soustavy, l je okamžitá délka spojovací pružiny a φ je úhel, který spojnice obou bodů svírá s osou x globálního souřadnicového systému. Podobně potenciální energie je

$$V = (m_1 + m_2) g\, y_S + \frac{1}{2} k (l - L_0)^2,$$

kde g je tíhové zrychlení, y_S je y-ová souřadnice těžiště, k je konstanta tuhosti a L_0 je volná délka pružiny. S přihlédnutím k tomu, že rychlost těžiště je

$$v_S^2 = v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 = \dot{x}_S{}^2 + \dot{y}_S{}^2,$$

můžeme kinetický potenciál zapsat jako

$$L = K - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\dot{x}_S{}^2 + \dot{y}_S{}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2\right) -$$

$$-(m_1 + m_2) g\, y_S - \frac{1}{2} k (l - L_0)^2.$$

Jako zobecněné souřadnice použijeme souřadnice těžiště

$$q_1 = x_S\,,\; q_2 = y_S\,,$$

délku pružiny rovnou vzdálenosti obou bodů

$$q_3 = l\,,$$

a úhel, který svírá spojnice obou bodů se souřadnicovou osou x

$$q_4 = \varphi\,.$$

Nyní stanovíme parciální derivace L podle jednotlivých zobecněných rychlostí

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_S} = \left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_S\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_S} = \left(m_1 + m_2\right)\dot{y}_S\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\dot{l},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,l^2\dot{\varphi}.$$

Tyto parciální derivace je dále třeba derivovat podle času

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_S}\right) = \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_S\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_S}\right) = \left(m_1 + m_2\right)\ddot{y}_S\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\ddot{l}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi}\right).$$

Parciální derivace kinetického potenciálu podle zobecněných souřadnic jsou

$$\frac{\partial L}{\partial x_S} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_S} = -\left(m_1 + m_2\right)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,l\dot{\varphi}^2 - k\left(l - L_0\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

takže po dosazení do Lagrangeových rovnic dostaneme

$$\left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_S = 0,$$

$$\left(m_1 + m_2\right)\ddot{y}_S + \left(m_1 + m_2\right)g = 0,$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\ddot{l} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,l\,\dot{\varphi}^2 + k\left(l - L_0\right) = 0,$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(2l\dot{l}\,\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi}\right) = 0.$$

To jsou čtyři obyčejné diferenciální rovnice druhého stupně pro čtyři neznámé funkce $x_S(t), y_S(t), l(t), \varphi(t)$. Z nich první dvě

$$\ddot{x}_S = 0 \tag{2.1}$$

a

$$\ddot{y}_S = -g \tag{2.2}$$

představují samostatné diferenciální rovnice pro řešení pohybu těžiště a druhé dvě

$$\ddot{l} = l\dot{\varphi}^2 - k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}(l - L_0),$$
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\,\dot{l}\,\dot{\varphi}}{l}, \tag{2.3}$$

zde upravené do kanonického tvaru, představují soustavu dvou simultánních diferenciálních rovnic pro řešení relativního pohybu obou bodů okolo těžiště.

Rovnice (2.1) má jednoduché řešení jak pro rychlost těžiště ve směru osy x

$$v_{Sx} = \dot{x}_S = v_{Sx}(0),$$

tak i pro samotnou x-ovou souřadnici

$$x_S = x_S(0) + v_{Sx}(0)t.$$

Analogicky má rovnice (2.2) řešení pro y-ovou složku rychlosti těžiště

$$v_{Sy} = \dot{y}_S = v_{Sy}(0) - gt$$

a pro y-ovou souřadnici těžiště

$$y_S = y_S(0) + v_{Sy}(0)t - \frac{1}{2}g\,t^2.$$

Počáteční podmínky jsme v kapitole Dynamika soustavy hmotných bodů pomocí vět stanovili jako

$$v_{Sx}(0) = \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2},\ x_S(0) = 0,$$
$$v_{Sy}(0) = \frac{m_1 v_0}{m_1+m_2},\ y_S(0) = \frac{m_1 l_0}{m_1+m_2}.$$

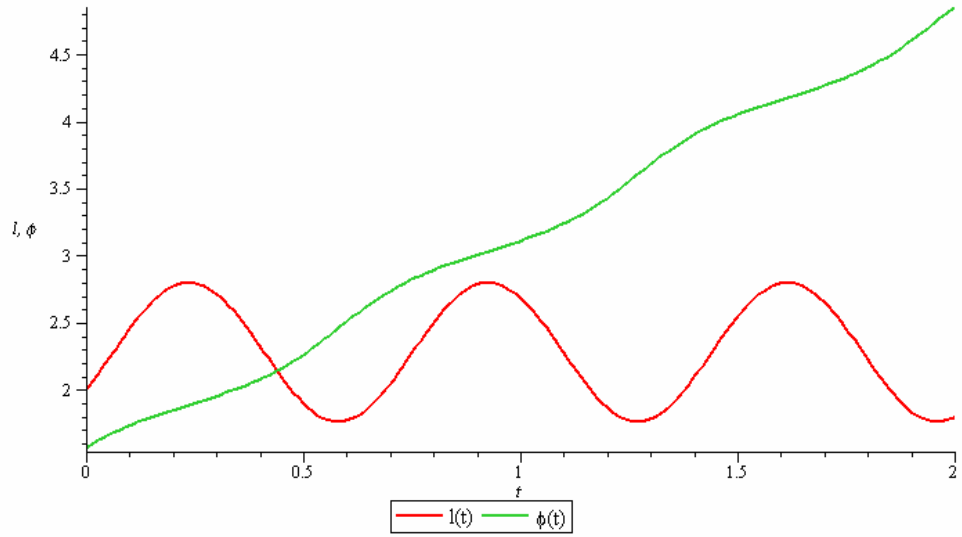
Soustavu (2.3) dvou rovnic 2. stupně převedeme známým způsobem na soustavu čtyř rovnic 1. stupně

$$\dot{l} = u,$$
$$\dot{\varphi} = \omega,$$
$$\dot{u} = l\,\omega^2 - k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}(l - L_0), \tag{2.4}$$
$$\dot{\omega} = -\frac{2\,u\,\omega}{l}.$$

a řešíme ji s počátečními podmínkami

$$u(0) = \dot{l}(0) = v_0, \quad l(0) = l_0,$$
$$\omega(0) = \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{l_0}, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \tag{2.5}$$

které opět přebíráme z kapitoly Dynamika soustavy hmotných bodů pomocí vět.



Obr. 1: Parametry relativního pohybu

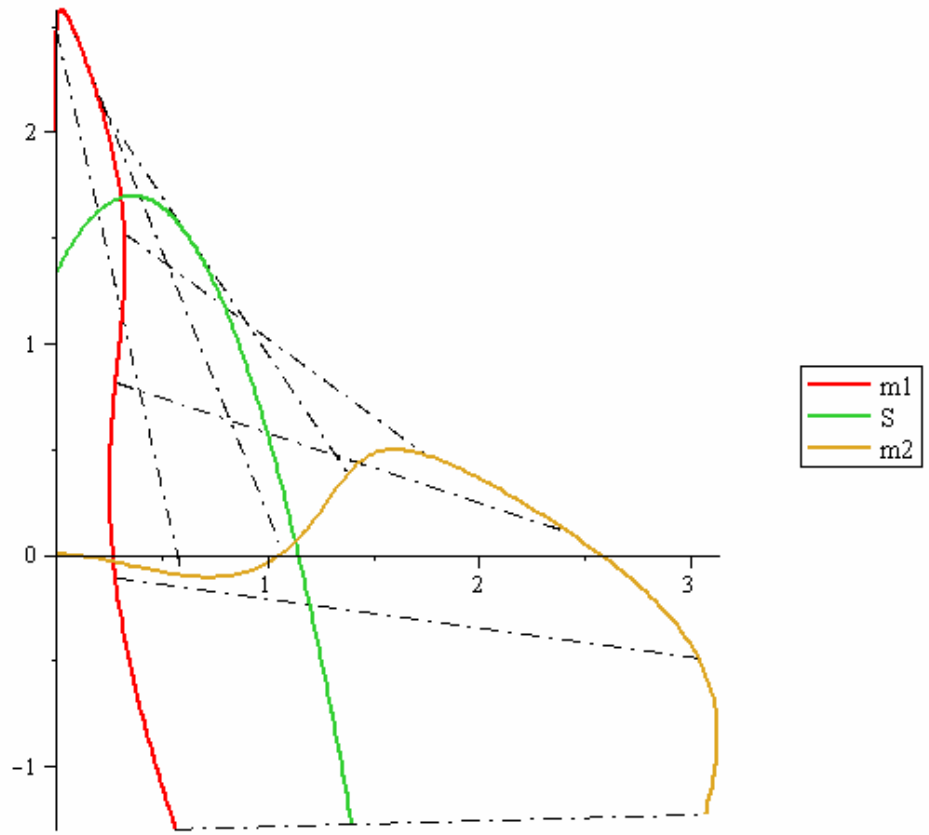
Použijeme opět stejná numerická data

$m_1 = 2\ \text{kg}, \quad L_0 = 2{,}2\ \text{m}, \quad g = 9{,}81\ \text{ms}^{-2}, \quad v_0 = 4\ \text{ms}^{-1}.$

$m_2 = 1\ \text{kg}, \quad k = 50\ \text{Nm}^{-1}, l_0 = 2\ \text{m}$

a řešíme soustavu (2.3) s počátečními podmínkami (2.4), opět s pomocí matematického softwaru Maple. Výsledky znázorňuje Obr. 1.

Obr. 2 znázorňuje trajektorie těžiště S, hmotného bodu m_1 a hmotného bodu m_2. Čerchované úsečky zobrazují postupné polohy spojnice obou bodů, resp. osy pružiny s krokem $0{,}05\ \text{s}$.

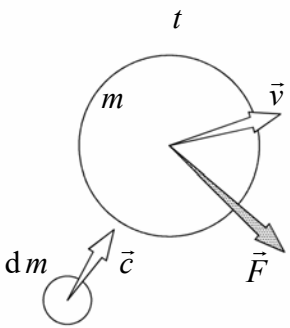


Obr. 2: Trajektorie obou bodů a jejich těžiště.

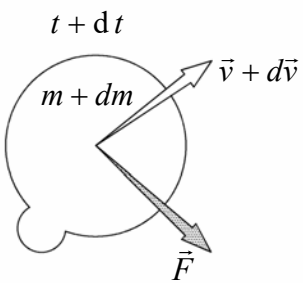
Kapitola V:
Dynamika hmotného bodu s proměnnou hmotností

1. Teorie

Budeme uvažovat dvoučlennou soustavu hmotných bodů, které se pohybují blízko sebe tak, že se po určité době spojí. Předpokládejme, že v čase t se oba body nacházejí v poloze podle Obr. 1a. Jeden bod má hmotnost m, okamžitou rychlost $\vec{v}$ a působí naň externí síla $\vec{F}$. Druhý bod má hmotnost elementární $\mathrm{d}m$ a rychlost $\vec{c}$. V čase $t+\mathrm{d}t$ jsou již body podle Obr. 1b. spojeny v jeden, který má změněnou hmotnost $m+dm$ a rychlost $\vec{v}+d\vec{v}$. U externí síly $\vec{F}$ změnu během krátkého časového okamžiku $\mathrm{d}t$ nepředpokládáme.



Obr. 1a.



Obr. 1b.

Nyní použijeme *větu o změně hybnosti soustavy hmotných bodů* v integrálním tvaru

$$\vec{p}(t_2)-\vec{p}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t\,,$$

ale protože je časový interval elementární, není nutno na pravé straně integrovat, takže

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)=\vec{F}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.1}$$

Hybnost naší soustavy před spojením je

$$\vec{p}(t)=m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{c}$$

a po spojení

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t)=(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}),$$

takže po dosazení do (1.1) máme

$$m\vec{v}+\mathrm{d}m\,\vec{v}+m\,\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\vec{v}-m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{c}=\vec{F}\,\mathrm{d}t\,.$$

První a pátý člen se vyruší a čtvrtý člen se jako veličina nekonečně malá druhého řádu zanedbá. Po úpravě pak dostáváme

$$m\vec{a}=\vec{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{c}-\vec{v}), \tag{1.2}$$

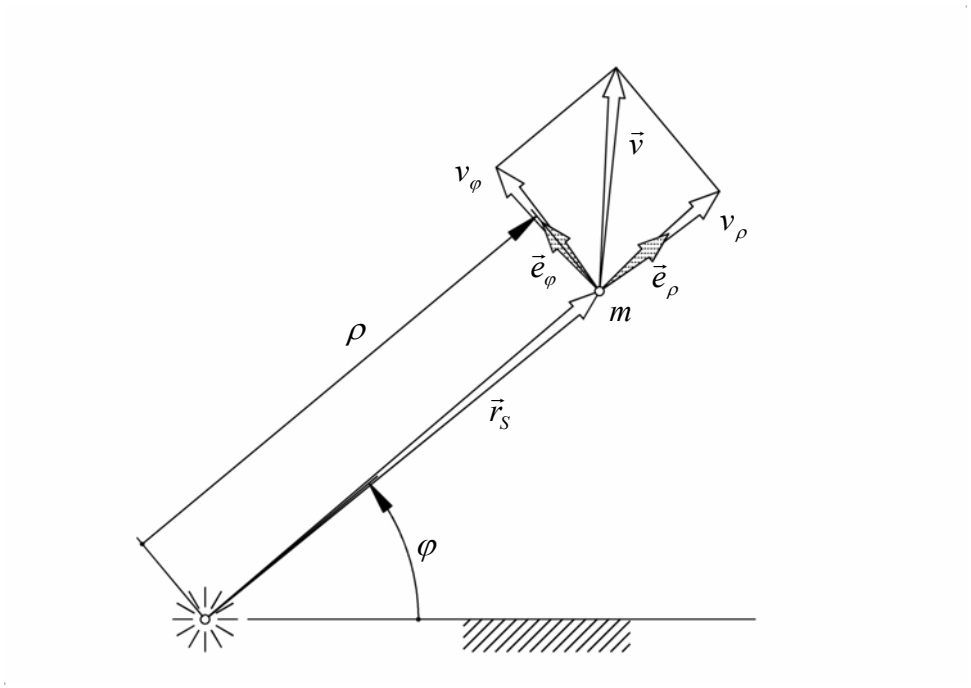
což je *pohybová rovnice hmotného bodu s proměnnou hmotností*. Člen na pravé straně

$$\vec{F}_R=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{c}-\vec{v})=\dot{m}\vec{u} \tag{1.3}$$

se nazývá *reaktivní (*též *propulzní) síla*, přičemž veličina $\dot{m}$ s fyzikálním rozměrem $\mathrm{kg\,s^{-1}}$ se nazývá *hmotový tok* a vektor $\vec{u}=\vec{c}-\vec{v}$ *relativní rychlost* hmotového toku vzhledem ke hmotnému bodu. Hmotový tok je veličina kladná, když hmota hmotného bodu přibývá, a záporná, když hmota hmotného bodu ubývá.

2. Příklad

Jako příklad budeme studovat (zatím) hypotetický kosmický aparát nazývaný sluneční plachetnice.



Obr. 2.

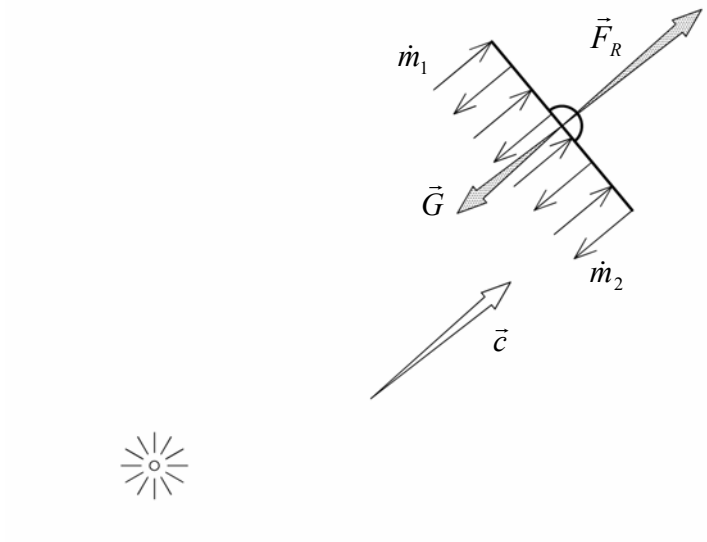
Uvažujme nejprve pasivní kosmickou sondu v meziplanetárním prostoru v dostatečné vzdálenosti od všech hmotných objektů kromě Slunce, tedy situaci podle Obr. 2. Zde je sonda zakreslena v polárním souřadnicovém systému se středem (pólem) ve Slunci. Hmotnost sondy je m, její okamžitá rychlost ve složkách v_ρ, v_φ a okamžitá vzdálenost od slunce ρ. Polohový úhel φ se měří od základny, kterou je spojnice Slunce se vzdálenou hvězdou (stálicí). $\vec{r}_S$ je polohový vektor sondy a $\vec{e}_\rho$ resp. $\vec{e}_\varphi$ jsou radiální resp. transverzální jednotkový vektor souřadnicového systému.

Nyní si představme, že sonda je tvořena zrcadlem orientovaným ke Slunci, Obr. 3. Na zrcadlo dopadá sluneční záření neboli hmotový tok fotonů $\dot{m}_1$ rychlostí světla c. Fotony jsou nejprve zrcadlem zachyceny, čímž se podle (1.3) realizuje reaktivní síla v radiálním směru

$$\vec{F}_{R1} = \dot{m}_1 \left(c - v_\rho\right) \vec{e}_\rho .$$

Ve srovnání s c je ale v_ρ zcela zanedbatelná, takže

$$\vec{F}_{R1} = \dot{m}_1 c \vec{e}_\rho \,,\ \dot{m}_1 > 0 .$$



Obr. 3.

Fotony se ovšem od zrcadla odrážejí rychlostí $-c\,\vec{e}_\rho$ v množství $\dot{m}_2 < 0$. Za předpokladu dokonalé odrazivosti zrcadla je ale úbytek hmotnosti odrazem stejný jako přírůstek hmotnosti záchytem, tedy

$$\dot{m}_2 = -\dot{m}_1 .$$

Přitom úbytkem hmotnosti se realizuje reaktivní síla

$$\vec{F}_{R2} = \dot{m}_2 \left(-c\vec{e}_\rho\right) = \dot{m}_1 c \vec{e}_\rho ,$$

tedy stejná jako $\vec{F}_{R1}$, a celková reaktivní síla je

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R2} = 2\dot{m}_1 c\,\vec{e}_\rho . \tag{2.1}$$

Zůstává otázka, jaký je hmotový tok $\dot{m}_1$.

Podle teorie relativity je energie záření rovna součinu hmotnosti částic a rychlosti světla na druhou. Je-li tedy celková hmotnost fotonů zachycených zrcadlem m_1, bude kinetická energie dopadajícího záření

$$K = m_1 c^2 . \tag{2.2}$$

Současně ale platí obecná *věta o změně kinetické energie*

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = P , \tag{2.3}$$

kde P je výkon působících sil. V případě našeho zrcadla je výkonem P ta část výkonu P_S Slunce, která připadá na plochu S zrcadla. Protože je celkový zářivý výkon P_S Slunce rozložen rovnoměrně na každou kulovou plochu se středem ve Slunci, bude ve vzdálenosti ρ od Slunce připadat na jednotku plochy výkon $P_S/4\pi\rho^2$, takže na plochu S zrcadla připadá výkon

$$P = P_S \frac{S}{4\pi\rho^2} . \tag{2.4}$$

Dosadíme-li nyní (2.2) a (2.4) do (2.3), dostáváme

$$\dot{m}_1 c^2 = P_S \frac{S}{4\pi\rho^2} ,$$

takže

$$\dot{m}_1 = \frac{P_S}{c^2} \frac{S}{4\pi\rho^2} . \tag{2.5}$$

Dosazením (2.5) do (2.1) dostáváme celkovou reaktivní sílu záření ve vzdálenosti ρ od Slunce

$$\vec{F}_R = \frac{P_S}{c} \frac{S}{2\pi\rho^2} \vec{e}_\rho . \tag{2.6}$$

Při tom je nutno podotknout, že podmínkou platnosti (2.6) je, aby zrcadlo zůstávalo při svém pohybu trvale orientováno ke Slunci. V praxi by to vyžadovalo instalaci systému pro orientaci v prostoru.

Reaktivní síla není ovšem jediná síla působící na zrcadlo. Je zde ještě přitažlivá síla Slunce; podle Newtonova gravitačního zákona je to

$$\vec{G} = -\kappa \frac{mM}{\rho^2} \vec{e}_\rho , \tag{2.7}$$

kde κ je gravitační konstanta a M hmotnost Slunce.

Dosazením (2.7) do (1.2) tak dostáváme Newtonovu pohybovou rovnici ve tvaru

$$m\vec{a} = \left(\frac{P_S}{c} \frac{S}{2\pi\rho^2} - \kappa \frac{mM}{\rho^2} \right) \vec{e}_\rho ,$$

ze které vypočteme

$$\vec{a} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{P_S}{2\pi c} \frac{S}{m} - \kappa M \right) \vec{e}_\rho . \tag{2.8}$$

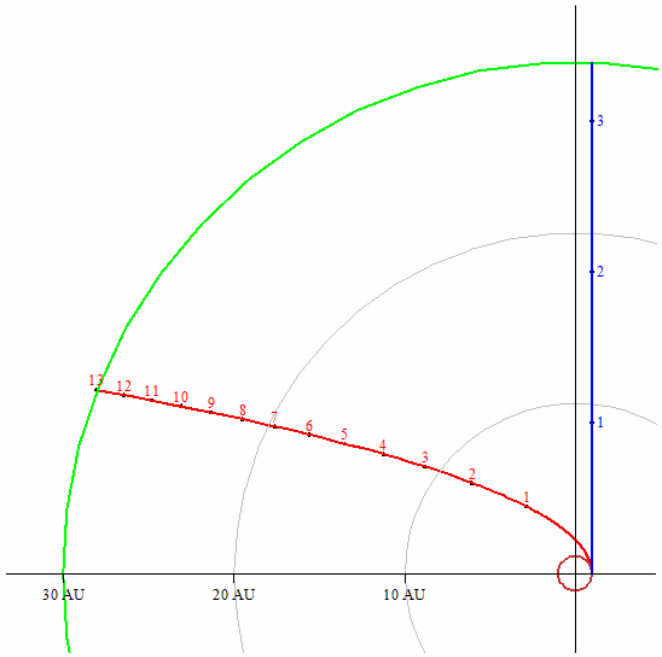
Protože P_S, π, c, κ, M jsou známé konstanty, závisí velikost zrychlení kromě na ρ již jen na poměru S/m, tedy poměru plochy S zrcadla a hmotnosti m sondy. Při poměru

$$\frac{S}{m} = 2\pi c \frac{\kappa M}{P_S} \tag{2.9}$$

se člen v závorce ve (2.8) anuluje a zrychlení je bez ohledu na okamžitou vzdálenost od Slunce nulové.

To se nezdá být příliš úžasný výsledek. Uvědomme si však, že to znamená konstantní rychlost, konstantní co do směru i co do velikosti. Tedy sonda se bude pohybovat (vzhledem ke Slunci) stejnou rychlostí, jakou bude mít na oběžné dráze Země okolo Slunce. Tato rychlost se volí v širokém rozmezí, v závislosti na konfiguraci planet a užitečné hmotnosti sondy. Vezměme pro srovnání tzv. parabolickou rychlost $v_P = 4{,}21.10^4\ \mathrm{ms}^{-1}$. Je to rychlost, se kterou standardní sonda opustí oběžnou dráhu Země po parabole. Dá se vypočítat, že po takové dráze trvá let sondy k oběžné dráze Neptunu, který je dnes považován za poslední těleso Sluneční soustavy, přibližně 13 let. Stejnou cestu by sluneční plachetnice vykonala za pouhých 3,4 roku. Viz Obr. 4. (Vzdálenosti od Slunce vyznačeny v astronomických jednotkách - AU. 1 AU = vzdálenost Země od Slunce.)

Technická potíž realizace takové sluneční plachetnice však spočívá v hodnotě S/m. Dosadíme-li do (2.9) známé konstanty P_S, π, c, κ, M, dostaneme $S/m \approx 70\,\mathrm{m}^2\mathrm{kg}^{-1}$. Tedy na každý jeden kilogram sondy potřebujeme $70\,\mathrm{m}^2$ zrcadla.



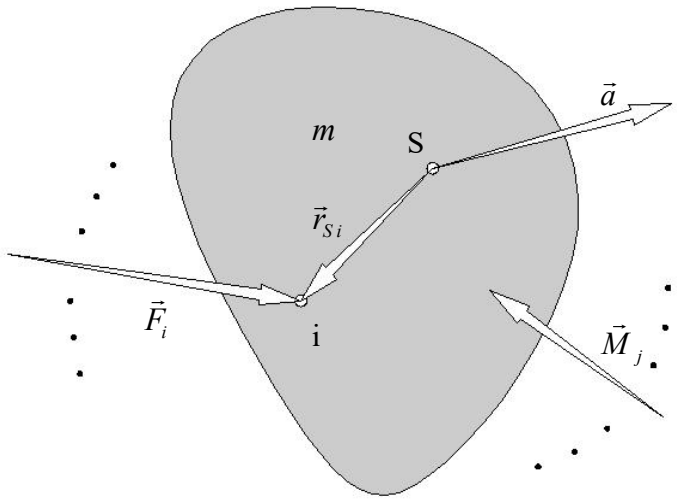
Obr. 4.

Kapitola VI: Dynamika posuvného pohybu tělesa

1. Teorie

Nejprve připomeňme definici posuvného pohybu tělesa, známou z kinematiky: *Těleso se pohybuje pohybem posuvným, jestliže každá jeho přímka zachovává svůj směr*. Při takovém pohybu všechny body tělesa opisují stejné, navzájem posunuté trajektorie a v témže čase mají stejné vektory rychlosti a stejné vektory zrychlení.

Pro dynamickou analýzu uvažujme obecné těleso podle Obr. 1 s hmotností m a s těžištěm v bodě S. Těleso budiž zatíženo množinou n osamělých sil (akčních i reakčních) $\vec{F}_i, i = 1,...,n$ s působišti v bodech $\mathrm{i} = 1,...,\mathrm{n}$ s polohovými vektory vzhledem k těžišti $\vec{r}_{Si}, i = 1,...,n$ a množinou l silových dvojic (akčních i reakčních) s momenty $\vec{M}_j, j = 1,...,l$.



Obr. 1: Zatížení a pohyb tělesa.

V důsledku zatížení se těleso pohybuje se zrychlením $\vec{a}$, které je vyznačeno v těžišti.

Pohybové rovnice posuvného pohybu tělesa jsou

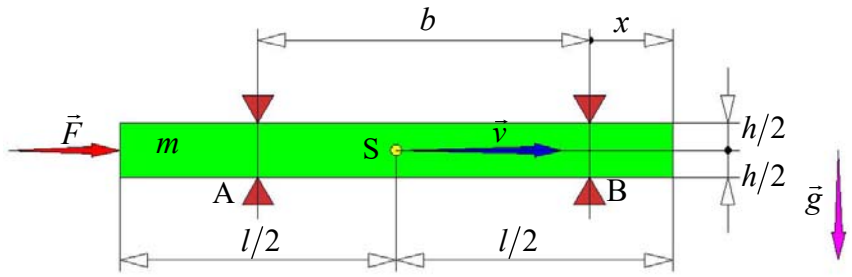
$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{l}\vec{M}_j = \vec{0}\,, \tag{1.2}$$

které je možno číst následovně: *Těleso se pohybuje pohybem posuvným se zrychlením podle* (1.1), *jestliže všechny působící silové účinky (akční i reakční) jsou v momentové rovnováze podle* (1.2).

2. Příklad

Podle Obr. 2 je homogenní hranol o hmotnosti m a o rozměrech $l \times h (\times h)$ vodorovně uložen na dvou podporách v místech A a B ve vzájemné vzdálenosti $b < l$. Podpory jsou drsné s nestejnými koeficienty smykového tření $f_A \neq f_B$. Hranol se nachází v tíhovém poli $\vec{g}$ a je zatížen konstantní horizontální silou $\vec{F}$, jejíž nositelka prochází těžištěm hranolu. Určete

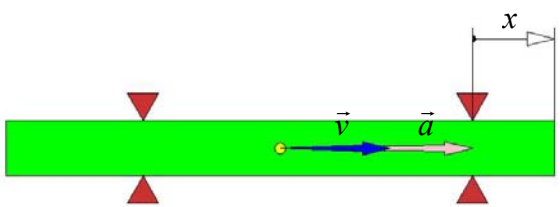


Obr. 2

závislost $v(x)$ rychlosti posuvného pohybu hranolu na dráze a velikost F síly $\vec{F}$ při okrajových podmínkách $v(0)=0$ a $v(l-b)=0$, které znamenají, že hranol se rozeběhne z klidu při poloze pravého konce nad podporou B a opět se zastaví při poloze levého konce nad podporou A.

Řešení:

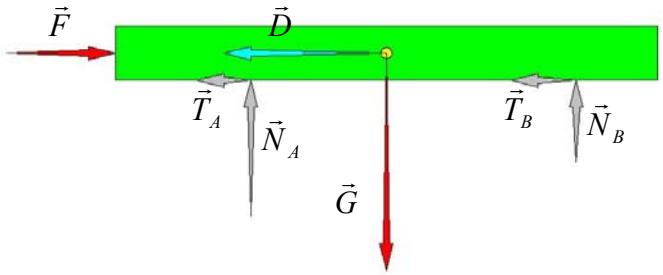
Podle zadávacího Obr. 2 nejprve nakreslíme kinematické schéma, Obr. 3, ve kterém vyznačíme okamžitou polohu x hranolu a vektory rychlosti $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$, vztažené (například) k těžišti hranolu, přičemž kladné orientace obou vektorů volíme ve směru rostoucí polohové souřadnice x.



Obr. 3: Kinematické schéma.

Dále provedeme uvolnění tělesa, Obr. 4, tzn. zatížíme je akčními silami $\vec{G}$ a $\vec{F}$, reakčními silami $\vec{N}_A, \vec{T}_A$ resp. $\vec{N}_B, \vec{T}_B$ nahradíme odebrané podpory a do těžiště hranolu umístíme dynamickou sílu $\vec{D}$. Přitom dbáme, aby třecí síly $\vec{T}_A$ a $\vec{T}_B$ byly orientovány proti zvolenému směru vektoru rychlosti a aby dynamická síla $\vec{D}$ byla orientována proti zvolenému směru vektoru zrychlení. Kladné směry normálných sil $\vec{N}_A$ a $\vec{N}_B$ volíme proti směru tíhy $\vec{G}$.

Podle uvolnění tělesa nyní napíšeme rovnice dynamické rovnováhy tělesa. Nejprve složkové pro složky sil ve směrech x a y



Obr. 4: Silové schéma – uvolnění.

$$F - T_A - T_B - D = 0 \tag{2.1}$$

$$-G + N_A + N_B = 0 \tag{2.2}$$

a pak momentovou, psanou například pro momenty vzhledem k těžišti

$$N_B\left(\frac{l}{2} - x\right) - N_A\left(x + b - \frac{l}{2}\right) - (T_A + T_B)\frac{h}{2} = 0. \tag{2.3}$$

Specifikace sil pro daný případ jsou

$$G = mg \tag{2.4}$$

$$T_A = f_A N_A \tag{2.5}$$

$$T_B = f_B N_B \tag{2.6}$$

$$D = ma, \tag{2.7}$$

přičemž předpokládáme, že normálné síly N_A a N_B jsou obě kladné. (Tento předpoklad bude v závěru výpočtu nutno zkontrolovat.)

Nakonec přidáme rovnice kinematické. Pro daný typ úlohy se hodí jediná

$$a = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x}. \tag{2.8}$$

Vlastní řešení zahájíme dosazením specifikačních a kinematických rovnic do rovnic dynamické rovnováhy. Dostaneme soustavu tří rovnic

$$F - f_A N_A - f_B N_B - \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}\, v^2}{\mathrm{d}\, x} = 0 \tag{2.9}$$

$$-mg + N_A + N_B = 0 \tag{2.10}$$

$$N_B\left(\frac{l}{2} - x\right) - N_A\left(x + b - \frac{l}{2}\right) - \left(f_A N_A + f_B N_B\right)\frac{h}{2} = 0, \tag{2.11}$$

která obsahuje čtyři proměnné, a to N_A, N_B, v a x. Protože x je nezávisle proměnná, budou řešením tři funkce $N_A(x), N_B(x), v(x)$. Rovnici (2.11) ještě upravíme na tvar

$$N_B\left(\frac{l}{2} - x - f_B \frac{h}{2}\right) - N_A\left(x + b - \frac{l}{2} + f_A \frac{h}{2}\right) = 0 \tag{2.12}$$

a řešíme rovnice (2.10) a (2.12) pro neznámé N_A, N_B s parametrem x. Výsledkem jsou dvě funkce

$$N_A(x) = mg \frac{l - 2x - f_B h}{2b + \left(f_A - f_B\right)h}, \tag{2.13}$$

$$N_B(x) = mg \frac{2x + 2b - l + f_A h}{2b + \left(f_A - f_B\right)h}, \tag{2.14}$$

které nyní dosadíme do rovnice (2.9). Dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\, v^2}{\mathrm{d}\, x} + 2g f_A \frac{l - 2x - f_B h}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} + 2g f_B \frac{2x + 2b - l + f_A h}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} - \frac{2F}{m} = 0, \tag{2.15}$$

kterou lze řešit separací

$$\mathrm{d}\, v^2 = \left[4g \frac{f_A - f_B}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} x - 2g \frac{2b f_B + \left(f_A - f_B\right)l}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} + \frac{2F}{m}\right]\mathrm{d}\, x \tag{2.16}$$

a integrací při aplikaci levé okrajové podmínky $v(0) = 0$

$$\int_0^{v^2(x)} \mathrm{d}\, v^2 = 4g \frac{f_A - f_B}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} \int_0^x x\, \mathrm{d}\, x - \left[2g \frac{2b f_B + \left(f_A - f_B\right)l}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} - \frac{2F}{m}\right] \int_0^x \mathrm{d}\, x \tag{2.17}$$

s výsledkem

$$v^2(x) = 2g \frac{f_A - f_B}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} x^2 - \left[2g \frac{2b f_B + \left(f_A - f_B\right)l}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} - \frac{2F}{m}\right] x. \qquad 2.(18)$$

Hledanou hodnotu F stanovíme z aplikace druhé okrajové podmínky $v(l - b) = 0$, která vede na rovnici

$$v^2(l - b) = 0 = 2g \frac{f_A - f_B}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} (l - b)^2 - \left[2g \frac{2b f_B + \left(f_A - f_B\right)l}{2b + \left(f_A - f_B\right)h} - \frac{2F}{m}\right](l - b) \tag{2.19}$$

pro F, s výsledkem

$$F = mg \frac{\left(f_A + f_B\right)b}{2b + \left(f_A - f_B\right)h}. \tag{2.20}$$

Dosazením za F do rovnice (2.18) dostáváme nakonec řešení

$$v(x) = \sqrt{2g x \frac{\left(f_A - f_B\right)\left(x + b - l\right)}{2b + \left(f_A - f_B\right)h}}, \tag{2.21}$$

které zjevně splňuje obě okrajové podmínky.

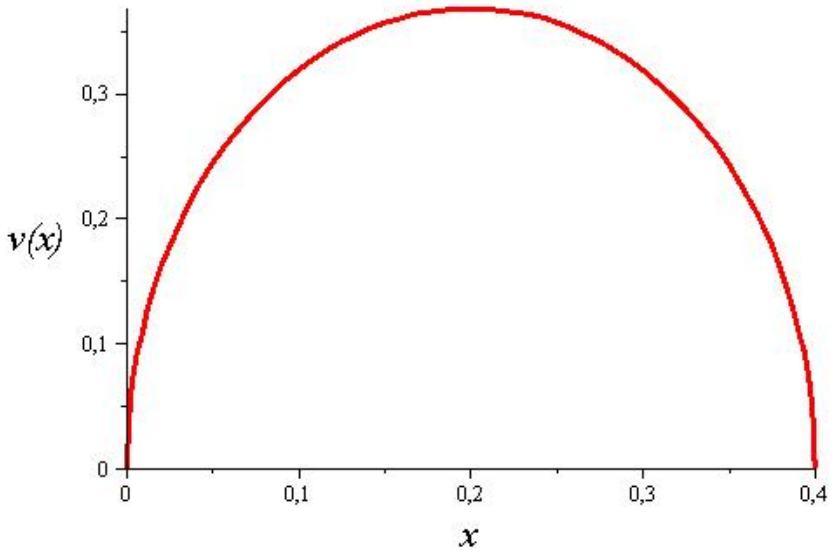
Pro konkrétní číselné zadání

$b = 0{,}6\ \mathrm{m}$, $l = 1{,}0\ \mathrm{m}$, $h = 0{,}1\ \mathrm{m}$,
$m = 80{,}0\ \mathrm{kg}$, $g = 10{,}0\ \mathrm{ms^{-2}}$, $f_A = 0{,}2$, $f_B = 0{,}4$.

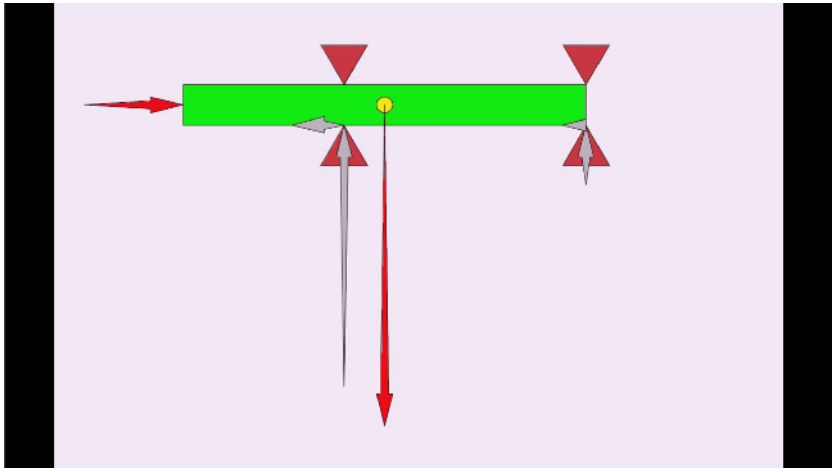
vychází

$F = 244{,}0678\ \mathrm{N}$

a graf závislosti $v(x)$ rychlosti na poloze podle Obr. 5. Animaci výsledného děje znázorňuje Obr.6.



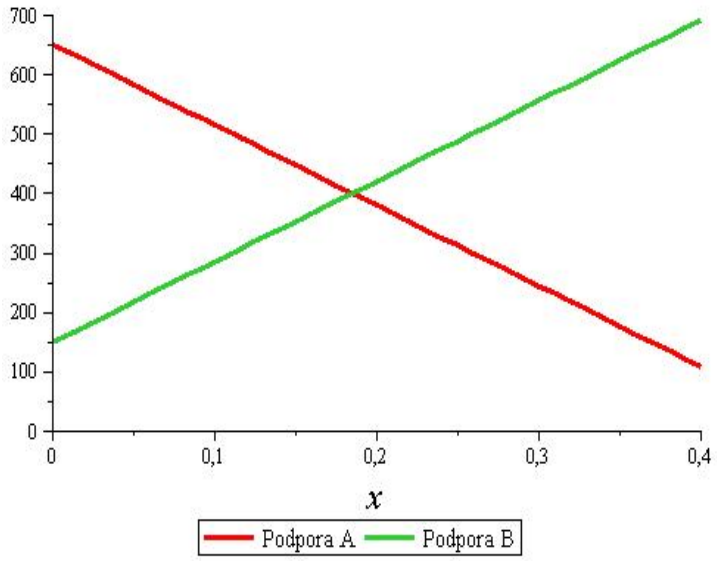
Obr. 5: Výsledný průběh rychlosti



Obr. 6: Animace

Nakonec je nutno kontrolovat, zda jsou v celém rozsahu pohybu splněny výše uvedené předpoklady řešení $N_A \geq 0$ a $N_B \geq 0$. Přesvědčíme se vykreslením grafů funkcí $N_A(x)$ resp. $N_B(x)$ podle (2.13) resp. (2.14), viz Obr. 7.

Předpoklady jsou zjevně splněny, takže řešení je platné.



Obr. 7: Průběh podpůrných reakcí

Diskuse výsledku:

Působením konstantní síly $F = 244{,}0678\ \mathrm{N}$ se tedy hranol rozeběhne z klidu při poloze pravého konce nad podporou B, dosáhne maximální rychlosti $0{,}36\ \mathrm{m/s}$ a opět se zastaví při poloze levého konce nad podporou A.

To se při zběžném pohledu zdá podivné: podle standardní rovnice $\vec{F} = m\vec{a}$ by konstantní síla měla způsobit kladné konstantní zrychlení, neboli konstantní nárůst rychlosti!

Tento zdánlivý rozpor je způsoben přídavným působením třecích sil na podporách, přičemž koeficienty smykového tření na obou podporách se musejí lišit. Kdyby totiž bylo $f_A = f_B$ vyšla by podle (2.20) jistá nenulová síla F ale podle (2.21) by rychlost zůstala nulová, tedy k pohybu by vůbec nedošlo.

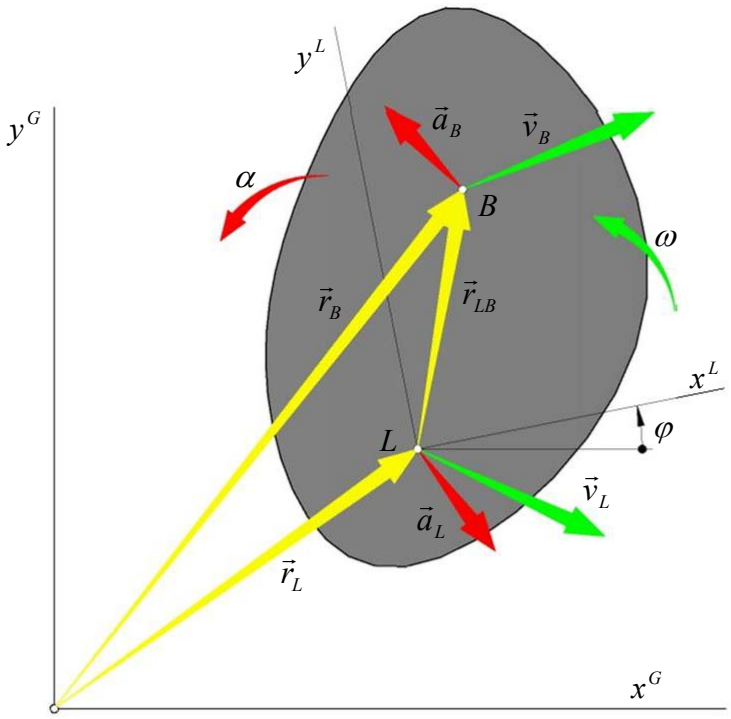
Kapitola VII:
Dynamika tělesa s obecným rovinným pohybem

1. Teorie

Nejprve připomeňme základní **definice**:

Těleso koná *rovinný pohyb*, jestliže trajektorie všech jeho bodů jsou rovinné křivky v navzájem rovnoběžných rovinách.

Těleso koná *obecný rovinný pohyb*, jestliže žádný jeho bod není pevný a žádná jeho přímka nezachovává svůj směr.



Obr. 1: Kinematika obecného rovinného pohybu

Kinematiku obecného rovinného pohybu popisujeme pomocí pohybu lokálního souřadnicového systému $\left(L, x^L, y^L\right)$, pevně spojeného s tělesem, v globálním nepohyblivém souřadnicovém systému $\left(G, x^G, y^G\right)$, viz Obr. 1. Počátek L lokálního souřadnicového systému se nazývá *referenčním bodem* tělesa a úhel φ, sevřený osami x^G, x^L, se nazývá *polohovým úhlem relativní rotace* tělesa okolo referenčního bodu.

Poloha obecného bodu B tělesa je dána vektorovou rovnicí

$$\vec{r}_B = \vec{r}_L + \vec{r}_{LB}\,.$$

Zavedeme-li algebraické vektory

$$\boldsymbol{r}_B^G = \begin{bmatrix} x_B^G \\ y_B^G \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_L^G = \begin{bmatrix} x_L^G \\ y_L^G \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_B^L = \begin{bmatrix} x_B^L \\ y_B^L \end{bmatrix},$$

bude platit základní *transformační rovnice*

$$\boldsymbol{r}_B^G = \boldsymbol{r}_L^G + \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_B^L, \tag{1.1}$$

kde

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

je tzv. *transformační matice*.

Rychlost obecného bodu B tělesa je pak dána jako

$$\boldsymbol{v}_B^G = \boldsymbol{v}_L^G + \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}^{GL}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{r}_B^L,$$

kde jsou rychlosti

$$\boldsymbol{v}_B^G = \begin{bmatrix} v_{Bx}^G \\ v_{By}^G \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_L^G = \begin{bmatrix} v_{Lx}^G \\ v_{Ly}^G \end{bmatrix}.$$

Analogicky zrychlení

$$\boldsymbol{a}_B^G = \boldsymbol{a}_L^G + \left(\ddot{\varphi} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\varphi^2} \right) \boldsymbol{r}_B^L ,$$

kde

$$\boldsymbol{a}_B^G = \begin{bmatrix} a_{Bx}^G \\ a_{By}^G \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_L^G = \begin{bmatrix} a_{Lx}^G \\ a_{Ly}^G \end{bmatrix}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\varphi^2} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} = -\boldsymbol{T} .$$

Pohybové rovnice pro řešení **dynamiky** obecného rovinného pohybu tělesa s hmotností m a momentem setrvačnosti J_L k referenčnímu bodu L uvádíme buď ve tvaru Newtonově

$$m\vec{a}_L + m\vec{a}_{LSt} + m\vec{a}_{LSn} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,$$

$$\vec{r}_{LS} \times m\vec{a}_L + J_L \vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Li} \times \vec{F}_i ,$$

nebo d'Alembertově

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{D} + \vec{T} + \vec{C} = \vec{0},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Li} \times \vec{F}_i + \vec{r}_{LS} \times \vec{D} + \vec{M}_D = \vec{0},$$

kde jsou zavedeny tzv. (doplňkové) dynamické účinky:
dynamická síla unášivého posuvného pohybu

$$\vec{D} = -m\vec{a}_L , \tag{1.2}$$

působící v těžišti, tečná síla dynamická

$$\vec{T} = -m\vec{a}_{LSt} = -me\alpha\, \vec{t}_{LS}^{\,0} ,$$

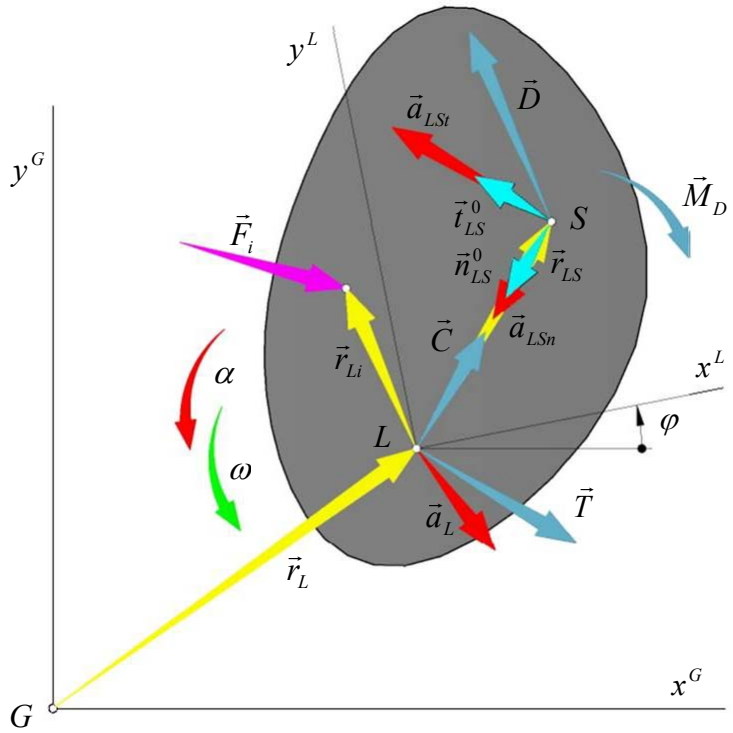
působící v referenčním bodě, odstředivá síla

$$\vec{C} = -m\vec{a}_{LSn} = -me\omega^2\, \vec{n}_{LS}^{\,0} , \tag{1.3}$$

rovněž působící v těžišti a dynamický moment

$$\vec{M}_D = -J_L \vec{\alpha} . \tag{1.4}$$

Význam jednotlivých symbolů viz Obr. 2, S představuje těžiště tělesa, excentricita $e = \overline{LS}$.



Obr. 2: Dynamika obecného rovinného pohybu

Alternativně se pro mechanický systém s ideálními (= bez pasivních odporů) vazbami s výhodou použijí skalární *Lagrangeovy rovnice 2. druhu*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,\ldots,n, \tag{1.5}$$

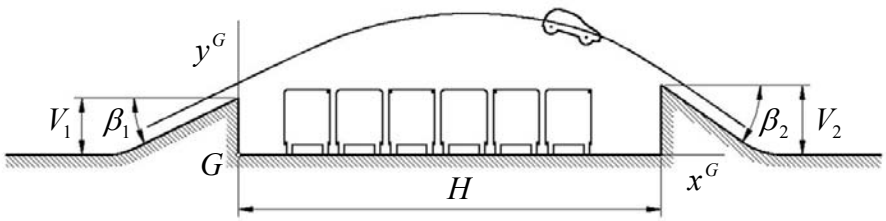
kde n je počet stupňů volnosti objektu, K je kinetická energie objektu, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ jsou tzv. zobecněné souřadnice, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ jsou zobecněné rychlosti a

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}, \; j=1,2,\cdots,n, \tag{1.6}$$

jsou tzv. zobecněné síly, které nahrazují soustavu N sil $\boldsymbol{F}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ reálně v soustavě působících v bodech s polohovými vektory $\boldsymbol{r}_i$, $i=1,2,\ldots,N$. Vektory $\boldsymbol{F}_i$ a $\boldsymbol{r}_i$ je třeba zadat složkami v témže souřadnicovém systému.

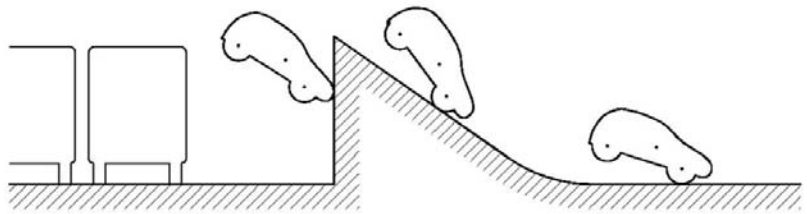
2. Příklad

Jako příklad vybereme kaskadérský pokus přeskočit autem jistou horizontální vzdálenost H, viz Obr. 3. Při takových pokusech bývá překonávaná vzdálenost zatarasena nějakými předměty, na obrázku jsou naznačeny autobusy stojící napříč. Proto je třeba dosáhnout i určitou výšku letu.



Obr. 3: Kaskadérský pokus

Skok má několik fází. Nejprve se auto rozjíždí; v závěru rozjezdu najíždí na startovní rampu, skloněnou pod úhlem β_1 a sahající do výšky V_1. Pro samotný skok je rozhodující následující fáze, kterou budeme nazývat **fáze 1**. Ta je charakterizována tím, že na rampě jsou opřena jen kola zadní nápravy, zatímco kola přední nápravy jsou už "ve vzduchu". Jakmile se i zadní kola odpoutají od rampy, nastává **letová fáze**. Letová fáze končí dopadem na cílovou rampu skloněnou pod úhlem β_2 a sahající do výšky V_2. K úspěchu pokusu je třeba, aby **přistání** bylo hladké; vyloučeny jsou některé kolizní situace naznačené na Obr. 4.



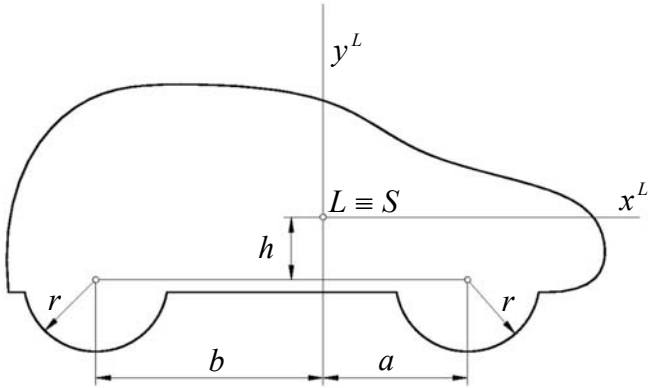
Obr. 4: Kolizní situace při přistání

Vlastní automobil je schematicky znázorněn na Obr. 5. Lokální souřadnicový systém je svým počátkem L umístěn do těžiště S. Lokální osa x^L směřuje dopředu ve směru jízdy, osa y^L vzhůru. Těleso budeme považovat za dokonale tuhé, takže kótované rozměry a, b, h, r budeme deklarovat jako konstanty.

Umístění globálního souřadnicového systému $\left(G, x^G, y^G\right)$ je znázorněno v Obr. 3.

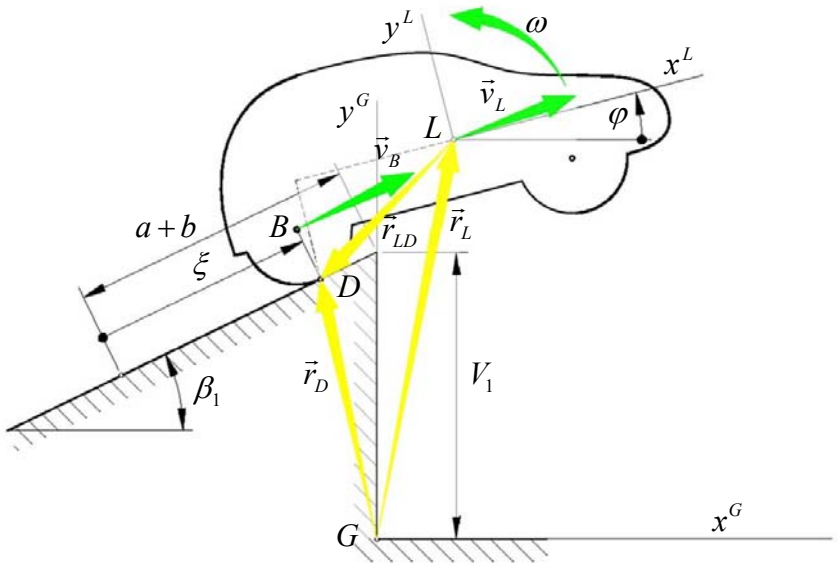
2.1. Fáze 1

Kinematické schéma pro fázi 1 je znázorněno na Obr. 6. V této fázi má vozidlo 2º volnosti, ke kterým je třeba přiřadit dvě souřadnice. Protože budeme pracovat metodou Lagrangeových rovnic, mohou být souřadnice dosti obecné. Jako první souřadnici ξ zvolíme vzdálenost mezi okamžitou



Obr. 5: Rozměry vozu

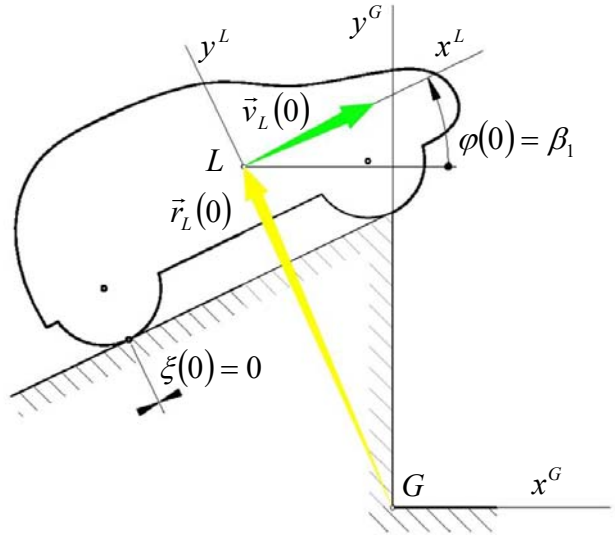
polohou středu zadního kola a jeho polohou počáteční, tj. polohou, kterou měl v okamžiku, kdy dotykový bod předního kola právě dosáhl hrany startovací rampy. Jako druhou souřadnici φ zvolíme okamžitý úhel mezi



Obr. 6: Kinematické schéma pro fázi 1

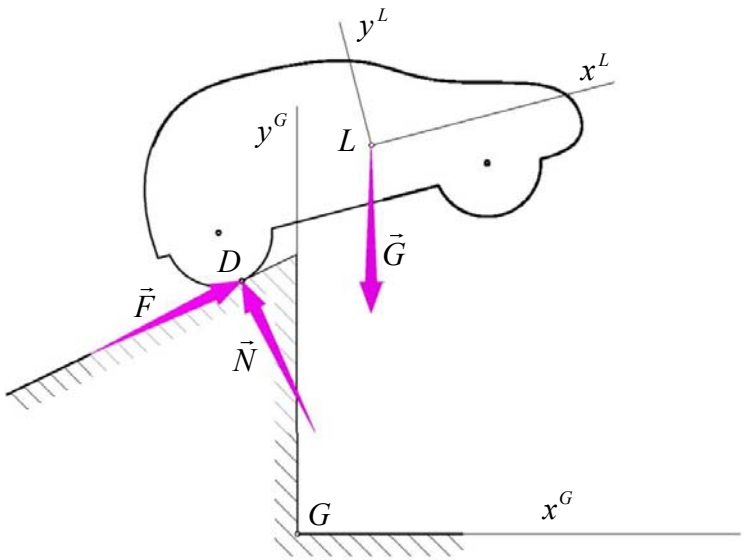
osami x^G, x^L. V obrázku je dále znázorněn okamžitý globální polohový vektor $\vec{r}_L$ referenčního bodu L, vektor $\vec{v}_L$ jeho rychlosti a orientovaný oblouček ω úhlové rychlosti.

Počátek fáze 1 je znázorněn na Obr. 7. Zde jsou vyznačeny počáteční hodnoty $\xi(0) = 0$ a $\varphi(0) = \beta_1$ pro obě souřadnice a počáteční vektory $\vec{r}_L(0)$ a $\vec{v}_L(0)$.



Obr. 7: Počátek fáze 1

Silové schéma pro fázi 1 ukazuje Obr. 8. Uvažujeme tíhovou sílu $\vec{G}$ působící v těžišti vozidla, normálnou reakci rampy $\vec{N}$ a trakční sílu $\vec{F}$, obě působící v dotykovém bodě D zadního kola. (Trakční síla působící na zadní kolo implikuje vozidlo s poháněnou zadní nápravou.) Protože jsme se rozhodli pro metodu Lagrangeových rovnic, nezavádějí se žádné silové dynamické účinky.



Obr. 8: Silové schéma pro fázi 1

Pohyb vozu ve fázi 1 je obecný rovinný. Za referenční bod volíme počátek L lokálního souřadnicového systému, který je totožný s těžištěm S. Pro výpočet kinetická energie vozidla proto použijeme vzorec

$$K = \frac{1}{2} m v_L^2 + \frac{1}{2} J_L \omega^2, \tag{2.1}$$

kde m je hmotnost vozidla, $v_L = v_S$ rychlost jeho těžiště, $L_L = J_S$ moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm a $\omega = \dot{\varphi}$ úhlová rychlost. Zavedeme -li poloměr setrvačnosti i_L vozidla vztahem

$$J_L = m\, i_L^2,$$

zjednoduší se (2.1) na

$$K = \frac{1}{2} m \left(v_L^2 + i_L^2\, \omega^2 \right). \tag{2.2}$$

Pro použití v Lagrangeových rovnicích musíme nyní kinetickou energii vyjádřit pomocí zobecněných souřadnic ξ a φ a jejich derivací $\dot{\xi}$ a $\dot{\varphi}$. Podle Obr. 6 je globální polohový vektor dotykového bodu D zadní nápravy

$$\boldsymbol{r}_D^G = \begin{bmatrix} -(a+b-\xi)\cos\beta_1 \\ V_1 - (a+b-\xi)\sin\beta_1 \end{bmatrix}.$$

Aplikací rovnice (1.1) na bod D dostáváme

$$\boldsymbol{r}_D^G = \boldsymbol{r}_L^G + \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_D^L,$$

takže

$$\boldsymbol{r}_L^G = \boldsymbol{r}_D^G - \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_D^L. \tag{2.3}$$

Lokální polohový vektor $\boldsymbol{r}_D^L$ bodu D je podle Obr. 6

$$\boldsymbol{r}_D^L = \begin{bmatrix} -b + r\sin(\beta_1 - \varphi) \\ -h - r\cos(\beta_1 - \varphi) \end{bmatrix},$$

takže po dosazení do (2.3) dostáváme po úpravě

$$\boldsymbol{r}_L^G = \begin{bmatrix} -(a+b-\xi)\cos\beta_1 + [b - r\sin(\beta_1-\varphi)]\cos\varphi \\ V_1 - (a+b-\xi)\sin\beta_1 + [b - r\sin(\beta_1-\varphi)]\sin\varphi \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -[h + r\cos(\beta_1-\varphi)]\sin\varphi \\ [h + r\cos(\beta_1-\varphi)]\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Derivováním (2.4) podle času dostaneme po úpravě rychlost $\boldsymbol{v}_L^G$ referenčního bodu L

$$\boldsymbol{v}_L^G = \begin{bmatrix} \dot{\xi}\cos\beta_1 - (b\sin\varphi + h\cos\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{\xi}\sin\beta_1 + (b\cos\varphi - h\sin\varphi)\dot{\varphi} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Hodnota v_L je invariantní vzhledem k použitému souřadnicovému systému; podle (2.5) vychází

$$v_L^2 = \dot{\xi}^2 + 2[b\sin(\beta_1-\varphi) - h\cos(\beta_1-\varphi)]\dot{\xi}\dot{\varphi} + (b^2 + h^2)\dot{\varphi}^2,$$

takže podle (2.2) je kinetická energie

$$K = \frac{1}{2} m\left\{\dot{\xi}^2 + 2\left[b\sin(\beta_1 - \varphi) - h\cos(\beta_1 - \varphi)\right]\dot{\xi}\dot{\varphi} + \left(b^2 + h^2 + i_L^2\right)\dot{\varphi}^2\right\}.$$

Pro dosazení do Lagrangeových rovnic (1.5) potřebujeme nyní určit derivace kinetické energie. Nejprve podle souřadnic

$$\frac{\partial K}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = m\left[-b\cos(\beta_1 - \varphi) - h\sin(\beta_1 - \varphi)\right]\dot{\xi}\dot{\varphi}.$$

Dále podle časových derivací

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} + m\left[b\sin(\beta_1 - \varphi) - h\cos(\beta_1 - \varphi)\right]\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m\left[b\sin(\beta_1 - \varphi) - h\cos(\beta_1 - \varphi)\right]\dot{\xi} + m\left(b^2 + h^2 + i_L^2\right)\dot{\varphi}$$

a následně podle času

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}}\right) = m\ddot{\xi} + m\left[-b\cos(\beta_1 - \varphi) - h\sin(\beta_1 - \varphi)\right]\dot{\varphi}^2 + \\ + m\left[b\sin(\beta_1 - \varphi) - h\cos(\beta_1 - \varphi)\right]\ddot{\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left[-b\cos(\beta_1 - \varphi) - h\sin(\beta_1 - \varphi)\right]\dot{\xi}\dot{\varphi} + \\ + m\left[b\sin(\beta_1 - \varphi) - h\cos(\beta_1 - \varphi)\right]\ddot{\xi} + \\ + m\left(b^2 + h^2 + i_L^2\right)\ddot{\varphi}.$$

Pro dosazení do pravých stran Lagrangeových rovnic (1.5) vypočteme nyní zobecněné síly. Pro výpočet podle (1.6) použijeme vektory sil a poloh vyjádřené v globálním souřadnicovém systému, takže

$$Q_\xi = \left(\boldsymbol{N}^G + \boldsymbol{F}^G\right)\bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_D^G}{\partial \xi} + \boldsymbol{G}^G \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_L^G}{\partial \xi},$$

$$Q_\varphi = \left(\boldsymbol{N}^G + \boldsymbol{F}^G\right)\bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_D^G}{\partial \varphi} + \boldsymbol{G}^G \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_L^G}{\partial \varphi}.$$

Zde

$$\boldsymbol{N}^G = \left[-N\sin\beta_1 \quad N\cos\beta_1\right]^T,$$

$$\boldsymbol{F}^G = \left[F\cos\beta_1 \quad F\sin\beta_1\right]^T,$$

$$\boldsymbol{G}^G = \left[0 \quad -mg\right]^T$$

a

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_D^G}{\partial \xi} = \left[\cos\beta_1 \quad \sin\beta_1\right]^T,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_L^G}{\partial \xi} = \left[\cos\beta_1 \quad \sin\beta_1\right]^T,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_D^G}{\partial \varphi} = \left[0 \quad 0\right]^T,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_L^G}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -b\sin\varphi - h\cos\varphi \\ b\cos\varphi - h\sin\varphi \end{bmatrix},$$

takže

$$Q_\xi = F - mg\sin\beta_1,$$

$$Q_\varphi = mg\left(-b\cos\varphi + h\sin\varphi\right).$$

(Povšimněme si, že zobecněné síly a tím ani celé rovnice neobsahují normálnou sílu N. To je zcela v pořádku, protože N je vazebná, nepracovní síla.)

Po dosazení do (1.5) dostáváme dvě diferenciální rovnice druhého řádu pro dvě neznámé funkce $\xi(t)$, $\varphi(t)$. Zavedeme-li další dvě funkce $v_B = \dot{\xi}$, $\omega = \dot{\varphi}$ s významem rychlosti bodu B a úhlové rychlosti vozidla

podle Obr. 6, dostáváme po úpravě a kanonizaci soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = \Big\{\Big[-h\omega^2\left(b^2+h^2+i_L^2\right)+gb\left(h\sin\varphi-b\cos\varphi\right)\Big]\sin(\beta_1-\varphi)+$$
$$+\Big[-b\omega^2\left(b^2+h^2+i_L^2\right)-gh\left(h\sin\varphi-b\cos\varphi\right)\Big]\cos(\beta_1-\varphi)+$$
$$+\left(b^2+h^2+i_L^2\right)\left(g\sin\beta_1-\frac{F}{m}\right)\Big\}/R,$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Big\{\omega^2 bh\left[\sin^2(\beta_1-\varphi)-\cos^2(\beta_1-\varphi)\right]+$$
$$+\left[b\left(\frac{F}{m}-g\sin\beta_1\right)+\omega^2\left(b^2-h^2\right)\cos(\beta_1-\varphi)\right]\sin(\beta_1-\varphi)+$$
$$+h\left(g\sin\beta_1-\frac{F}{m}\right)\cos(\beta_1-\varphi)-g\left(h\sin\varphi-b\cos\varphi\right)\Big\}/R,$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = v_B,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega,$$

kde

$$R = \left[h\cos(\beta_1-\varphi)-b\sin(\beta_1-\varphi)\right]^2-b^2-h^2-i_L^2. \tag{2.6}$$

Soustava se řeší s počátečními podmínkami

$$\xi(0)=0,$$
$$\varphi(0)=\beta_1,$$
$$v_B(0)=v_0,$$
$$\omega(0)=0.$$

Vyřešené funkce $\xi(t), \varphi(t), v_B(t), \omega(t)$ se použijí k výpočtu $\boldsymbol{r}_L^G(t)$ podle (2.4) a $\boldsymbol{v}_L^G(t)$ podle (2.5).

Konec fáze 1 nastane, když dotykový bod D dosáhne hrany startovací rampy, tj. když $\xi = a+b$. K tomu dojde v čase T, který se určí z rovnice

$$\xi(T) = a+b.$$

Koncové hodnoty pro fázi 1 a současně počáteční hodnoty pro letovou fázi jsou podle (2.4), (2.5)

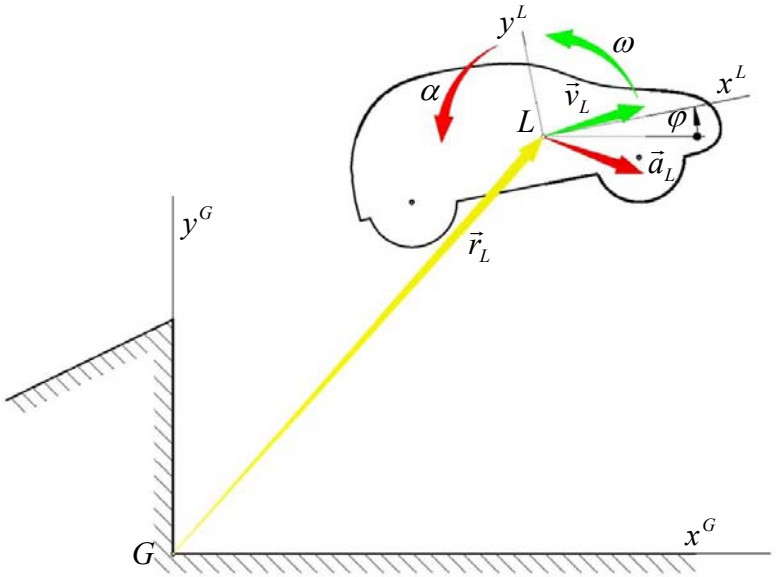
$$\boldsymbol{r}_L^G(T) = \begin{bmatrix} x_L^G(T) \\ y_L^G(T) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \left[b-r\sin(\beta_1-\varphi(T))\right]\cos\varphi(T)-\left[h+r\cos(\beta_1-\varphi(T))\right]\sin\varphi(T) \\ \left[b-r\sin(\beta_1-\varphi(T))\right]\sin\varphi(T)+\left[h+r\cos(\beta_1-\varphi(T))\right]\cos\varphi(T) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_L^G(T) = \begin{bmatrix} v_{Lx}^G(T) \\ v_{Ly}^G(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_B(T)\cos\beta_1-\left(b\sin\varphi(T)+h\cos\varphi(T)\right)\omega(T) \\ v_B(T)\sin\beta_1+\left(b\cos\varphi(T)-h\sin\varphi(T)\right)\omega(T) \end{bmatrix}.$$

2.2. Letová fáze

Pohyb vozu v letové fázi je obecný rovinný se třemi stupni volnosti, protože nejsou přítomny žádné vazby. K těmto třem stupňům volnosti přiřadíme jako souřadnice dvě globální složky x_L^G, y_L^G polohového vektoru $\vec{r}_L$ těžiště (= referenčního bodu) L a okamžitý úhel φ mezi osami x^G, x^L. Kinematické schéma pro letovou fázi ukazuje Obr. 9. V obrázku jsou dále znázorněny vektory rychlosti $\vec{v}_L$ a zrychlení $\vec{a}_L$ těžiště a orientované obloučky pro úhlovou rychlost ω a úhlové zrychlení α tělesa.

Budeme postupovat metodou pohybových rovnic ve variantě d'Alembertově. Silové schéma pro ten případ znázorňuje Obr. 10. Do těžiště je zde zavedena jediná akční síla, tíha $\vec{G}$, a z dynamických sil (1.2) až (1.3) jen $\vec{D}$ (ve složkách D_x, D_y), protože $\vec{T}$ i $\vec{C}$ jsou nulové díky excentricitě $e=0$. Jediný momentový účinek představuje dynamický moment $\vec{M}_D$ podle (1.4).



Obr. 9: Kinematické schéma pro letovou fázi

Rovnice dynamické rovnováhy napsané podle silového schématu jsou

$$x^G: \quad -D_x = 0,$$
$$y^G: \quad -D_y - G = 0,$$
$$L: \quad -M_D = 0.$$

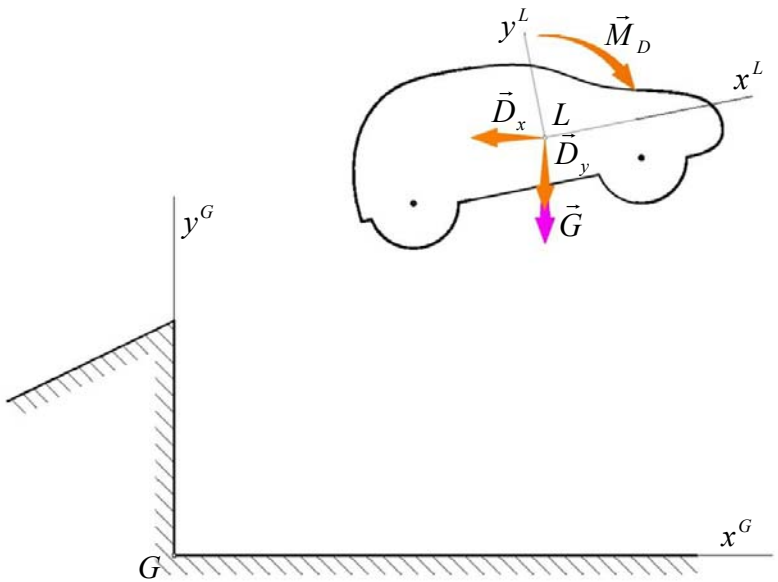
Po dosazení podle (1.2) a (1.4) a s přihlédnutím ke kinematickým vztahům

$$a_{Lx}^G = \dot{v}_{Lx}^G = \ddot{x}_L^G,$$
$$a_{Ly}^G = \dot{v}_{Ly}^G = \ddot{y}_L^G,$$
$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

dostáváme integrací postupně pro $t > T$

$$\begin{aligned}
&a_{Lx}^G = 0,\\
&v_{Lx}^G(t) = v_{Lx}^G(T) = konst.,\\
&x_L^G(t) = x_L^G(T) + v_{Lx}^G(T)(t-T),\\
&a_{Ly}^G = -g,\\
&v_{Ly}^G(t) = v_{Ly}^G(T) - g(t-T),\\
&y_L^G(t) = y_L^G(T) + v_{Ly}^G(T)(t-T) - \frac{1}{2}g(t-T)^2,\\
&\alpha = 0,\\
&\omega(t) = \omega(T) = konst.,\\
&\varphi(t) = \varphi(T) + \omega(T)(t-T).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Zjevně se tedy v letové fázi pohybuje těžiště vozidla podle zákona šikmého vrhu a současně vozidlo rotuje okolo příčné osy procházející



Obr. 10: Silové schéma pro letovou fázi

těžištěm konstantní úhlovou rychlostí.

Numerický výpočet hledaných funkcí pro letovou fázi podle (2.7) by byl velmi jednoduchý. Totéž však nelze říci o řešení diferenciálních rovnic (2.6) pro fázi 1. Bylo proto nutno nasadit výpočetní techniku (systém MAPLE). Řešení bylo provedeno pro následující hodnoty:

- rozměry vozidla:
  $a = 1{,}0$ m, $b = 1{,}5$ m,
  $h = 0{,}5$ m, $r = 0{,}4$ m,
- hmotové charakteristiky vozidla:
  $m = 1\,500$ kg, $i = 0{,}6$ m,
- rozměry ramp:
  $V_1 = 2{,}5$ m, $V_2 = 2{,}5$ m,
  $\beta_1 = 20°$, $\beta_2 = 20°$,
- tíhové zrychlení:
  $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$.

2.3.Přistání

Další parametry úlohy, tj. velikost trakční síly F ve fázi 1, rychlost v_0 na počátku fáze 1 a horizontální vzdálenost H ramp je třeba zvolit tak, aby "dolet" byl cca 75 m a aby přistání bylo "hladké". "Hladkým" přistáním budeme rozumět situaci, kdy náklon vozidla, určený úhlem φ, směr tečny trajektorie těžiště $arctg\frac{v_{Ly}^G}{v_{Lx}^G}$ a sklon β_2 přistávací rampy jsou si alespoň přibližně rovny, a současně se vozidlo nachází v přiměřené výšce nad horizontální rovinou.

Opakovaným výpočtem bylo zjištěno, že taková situace nastává při volbě $F = 10000$ N, $v_0 = 120$ km/hod. $= 33{,}3\ \mathrm{ms}^{-1}$ v čase $t = 2{,}45$ s, kdy $\varphi = -21{,}7°$ a $arctg\frac{v_{Ly}^G}{v_{Lx}^G} = -21{,}1°$ při výšce těžiště vozidla $y_L^G = 2{,}44$ m.

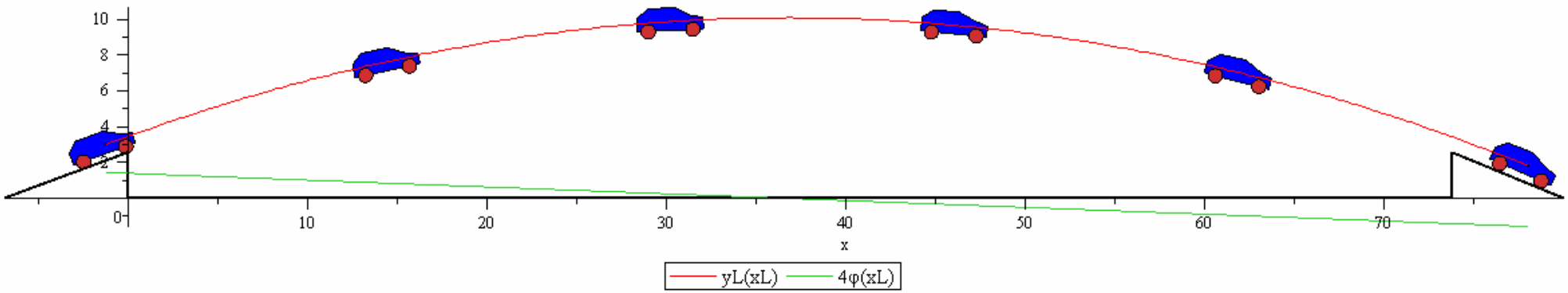
Umístěním přistávací rampy do vzdálenosti $H = 73{,}8$ m se pak dosáhne "hladkého" přistání, jak ukazuje Obr. 11, resp.animace na Obr. 12.

Je nutno připomenout, že letová fáze je zcela pasivní, nelze v ní parametry letu nijak ovlivnit. Jediná možnost k ovlivnění letu je ve fázi 1, kdy je vozidlo koly zadní nápravy ještě na rampě. Zde musí být v relaci rychlost vozidla, které se dosáhne hlavně rozjezdem ještě před nájezdem na rampu, a trakční síla. Na Obr. 13 je výsledek pokusu se stejnou rychlostí v_0, ale při trakční síle $F = 0$. Vidíme, že absence trakční síly ve fázi 1, která, ačkoliv trvá jen velmi krátce (v daném případě jen 0,075 s), způsobí jednak zkrácení doletu ale hlavně "přistání" v nepřijatelném náklonu. To například vylučuje použití vozidla s poháněnou přední nápravou.

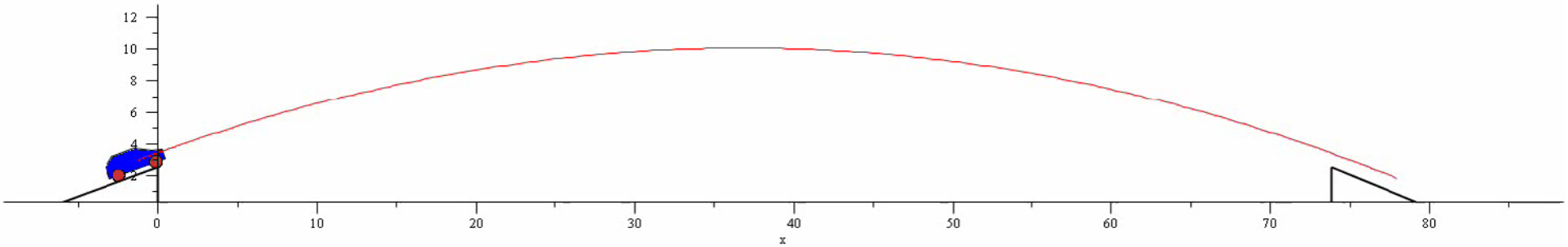
Dalším problémem je výkon motoru vozidla. V daném případě je výkon trakční síly $P = Fv_0 = 10\,000$ N.$33{,}3\ \mathrm{ms}^{-1} = 333$ kW. Přitom motor samotný musí mít výkon podstatně větší vzhledem ke ztrátám v pohonném ústrojí. Tedy nic pro málo výkonná vozidla. Dále velmi záleží na pneumatikách. Trakční síla totiž maximálně může být $F = fN$, kde f je koeficient suchého tření, v daném případě mezi pneumatikou a rampou. Normálnou sílu N jsme v našem modelu nepočítali, dá se odhadnout na hodnotu blízkou váze vozidla, řekněme $0{,}9mg = 0{,}9.1500.9{,}81 = 13\,243$ N. Koeficient suchého tření by tedy musel být $f = 10\,000/13\,243 = 0{,}75$, což je na samé hranici možností pro danou materiálovou dvojici.

Nakonec musíme zmínit základní nedostatek našeho matematického modelu. Totiž zanedbání aerodynamických účinků na vozidlo. Obtékání vzduchu okolo vozidla působí silami spojitě rozloženými na povrchu karoserie. Jejich výslednicí jsou odporová síla a silová dvojice s otáčivým účinkem okolo příčné osy. Oba tyto účinky zásadním způsobem ovlivňují zejména letovou fázi. K zahrnutí do výpočtu by bylo nutné stanovit oba účinky buď měřením v aerodynamickém tunelu (dokonce při ofukování pod různými úhly náběhu) nebo simulačním modelováním pomocí CFD software. Oba způsoby jsou velmi nákladné, takže lze předpokládat, že

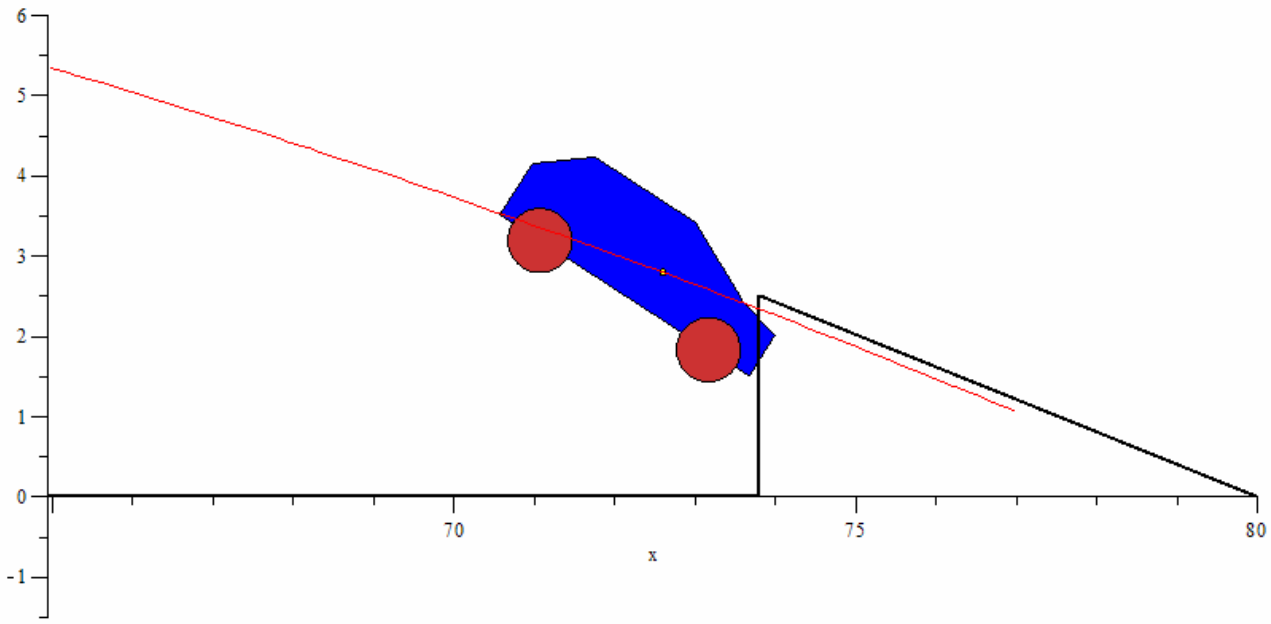
(úspěšné) kaskadérské show jsou výsledkem spíše četných pokusů než detailních výpočtů.



Obr. 11: Graf trajektorie a náklonu vozidla



Obr. 12: Animace



Obr. 13: Neúspěšný pokus při $F = 0$

Literatura.

JULIŠ, Karel, BREPTA, Rudolf a kol. *Mechanika II. díl, Dynamika*. Praha: SNTL, 1987.
BROUSIL, Jaromír, SLAVÍK, Jaromír a ZEMAN, Vladimír. *Dynamika.* Praha: SNTL, 1989.

Název	Řešené problémy z dynamiky
Autor	doc. Ing. Miroslav Šír, CSc..
Určeno pro	fakultu strojní, studijní program Strojírenství
Vydavatel	Technická univerzita v Liberci, Studentská 1402/2, Liberec
Schváleno	Rektorátem TUL dne 25.02.2020, čj. RE 40/20
Vyšlo	listopad 2020
Počet stran	50
Vydání	1.
Rok prvního vydání	2020
Č. publikace	55-004-20

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou

ISBN 978-80-7494-514-4

9 788074 945144